

Высшее образование

**Т.И. ТРОФИМОВА**

# **ФИЗИКА**

**в таблицах и формулах**

Рекомендовано Министерством образования  
Российской Федерации  
в качестве учебного пособия  
для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по техническим специальностям



ДРОФА

Москва 2002

УДК 530.1(083.4)

ББК 22.3

Т76

**Рецензенты:**

кафедра прикладной физики Московского государственного авиационного института (зав. кафедрой акад. РАН Р. Ф. Ганиев);  
канд. физ.-мат. наук И. Я. Ицхоки

**Трофимова Т. И.**

**Т76** Физика в таблицах и формулах: Учеб. пособие для студентов вузов. — М.: Дрофа, 2002. — 432 с.: ил.

ISBN 5—7107—4291—0

Материал, изложенный в учебном пособии, охватывает все разделы курса физики для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений.

Особенность и новизна представления курса заключается в том, что теоретический материал приведен в виде оригинальных блоков, в которых наглядно, однако без потери глубины содержания сформулированы основные законы и понятия, приведены наиболее важные формулы, прослежена логическая связь между рассматриваемыми физическими явлениями и понятиями.

Отбор материала и метод его изложения позволит понять и осмыслить курс физики, затем восстановить в памяти необходимую информацию, а также быстро повторить пройденный курс.

Большое внимание уделено вопросам современной физики, а также иллюстративному материалу. В конце пособия приводится подробный предметный указатель.

*Для студентов вузов, техникумов и колледжей. Полезно для повторения пройденного материала и подготовки ко всем видам занятий в вузах, техникумах, на подготовительных отделениях. Может быть использовано преподавателями в качестве опорных конспектов.*

УДК 530.1(083.4)

ББК 22.3

ISBN 5—7107—4291—0

© ООО «Дрофа», 2002

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Отличительная особенность учебного пособия «Физика в таблицах и формулах» — отсутствие традиционного описательного изложения материала. Особенность и новизна представления курса состоит в том, что программный материал приведен в виде оригинальных блоков, в которых наглядно, однако без ущерба для глубины содержания, сформулированы основные законы и понятия, приведены основные формулы, а также прослежена логическая связь между рассматриваемыми физическими явлениями. Такое изложение материала позволит читателю изучить курс физики, понять и осмыслить основные положения, затем восстановить в памяти необходимую информацию, а когда это необходимо, — «покопаться» в выводах или обоснованиях законов и явлений, которые сопровождают весь материал.

В книге рассмотрены физические основы классической механики, элементы специальной теории относительности, основы молекулярной физики и термодинамики, электростатика, постоянный ток и электромагнетизм, колебания и волны — механические и электромагнитные, элементы геометрической и волновой оптики, квантовой природы излучения, квантовой физики атомов, молекул и твердых тел, физики атомного ядра и элементарных частиц. Большое внимание уделено вопросам современной физики, в частности, элементам квантовой механики (например, рассмотрены операторы важнейших физических величин, а также ряд конкретных квантово-механических задач).

Материал, изложенный в пособии, соответствует программе курса физики инженерно-технических специальностей высших учебных заведений и предназначен для студентов вузов любой формы обучения (дневной, вечерней или заочной), в которых на изучение физики отводится ограниченное число часов.

Материал распределен так, что таблицы, которые оказываются «лишними», можно опустить. Большое внимание уделено иллюстративному материалу, позволяющему наглядно продемонстрировать изучаемые физические явления. В конце книги приведены последние достижения науки и техники (насколько известно автору, в учебных изданиях это сделано впервые).

Пособие предназначено для студентов вузов, техникумов и колледжей. Оно также будет полезно для повторения пройденного материала, при подготовке ко всем видам занятий в вузах, техникумах, на подготовительных отделениях, может быть использовано преподавателями в качестве опорных конспектов.

Более подробную информацию о работах автора можно получить на сайте Интернета [www.miem.edu.ru](http://www.miem.edu.ru) (раздел «Учебные пособия»).

Пожелания и замечания по содержанию книги посылать по адресу [highschool@drofa.ru](mailto:highschool@drofa.ru) и [trofimova@miem.edu.ru](mailto:trofimova@miem.edu.ru).

*Автор*

## 1.1 Физика и другие науки

### Физика

#### Определение

Наука о наиболее простых и вместе с тем наиболее общих формах движения *материи* и их взаимных превращениях.

Наука, изучающая общие свойства и законы движения вещества и поля (формулировка академика А. Ф. Иоффе).

#### Пояснение

Изучаемые физикой формы движения материи — наиболее простые (присутствуют во всех более сложных формах движения материи), являясь тем самым и наиболее общими формами движения материи. Поле (известно, что взаимодействие осуществляется посредством полей), наряду с веществом, — одна из форм существования материи.

### Материя

Окружающий мир, все существующее вокруг нас и обнаруживаемое нами посредством ощущений.

Неотъемлемым свойством материи и формой ее существования является движение. Движение в широком смысле слова — это всевозможные изменения материи — от простого перемещения до сложнейших процессов мышления.

### Связь физики

#### с естественными науками

По словам академика С. И. Вавилова, теснейшая связь физики с другими разделами естествознания привела к тому, что физика глубокими корнями проникла в астрономию, геологию, химию, биологию и другие естественные науки. В результате возник ряд новых смежных дисциплин, таких, как астрофизика, геофизика, физическая химия, биофизика и пр.

#### с техникой

Эта связь двусторонняя. Физика выросла из потребностей техники (развитие механики у древних греков, например, было вызвано запросами строительной и военной техники того времени), и техника, в свою очередь, определяет направление физических исследований (например, в свое время задача создания наиболее экономичных тепловых двигателей вызвала бурное развитие термодинамики). С другой стороны, от развития физики зависит технический уровень производства. Физика — база для создания новых отраслей техники (электронная техника, ядерная техника и др.).

#### с философией

Крупные открытия в области физики, например закон сохранения и превращения энергии, являлись ареной острой борьбы различных подходов в философии. Академику С. И. Вавилову принадлежат следующие слова: «Предельная общность значительной части содержания физики, ее фактов и законов искони сближала физику с философией. Иногда физические утверждения по своему характеру таковы, что их трудно отличить от философских утверждений, и физик обязан быть философом». Верное философское обобщение научных открытий в области физики играет большую роль в формировании научного мировоззрения.



# 1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

## 1.1. Основы кинематики

### 1.1.1. СТРУКТУРА МЕХАНИКИ И РАЗЛИЧНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

#### 1.2 Механика и ее структура

---

##### Механика

---

Часть физики, в которой изучаются закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение.

##### классическая (механика Галилея—Ньютона)

Изучает законы движения макроскопических тел, скорости которых малы по сравнению со скоростью распространения света в вакууме.

##### релятивистская

Изучает законы движения макроскопических тел со скоростями, сравнимыми со скоростью распространения света в вакууме (основана на *специальной теории относительности*, сформулированной А. Эйнштейном).

##### квантовая

Изучает законы движения микроскопических тел (отдельных атомов и элементарных частиц).

##### Разделы механики

---

##### кинематика

Изучает движение тел, не рассматривая причины, которые это движение обуславливают.

##### динамика

Изучает законы движения тел и причины, которые вызывают или изменяют это движение.

##### статика

Изучает законы равновесия системы тел.

Если известны законы движения тел, то из них можно установить и законы равновесия.

#### 1.3 Физические модели в механике

---

##### Физические модели

---

Модели, применяемые в механике для описания движения тел (изменения с течением времени взаимного расположения тел или их частей) в зависимости от условий конкретных задач.

##### Материальная точка

---

Тело, обладающее массой, размерами которого в данной задаче можно пренебречь. Понятие материальной точки — *абстрактное*, но его введение облегчает решение практических задач. Например, изучая движение планет по орбитам вокруг Солнца, можно принять их за материальные точки.

##### Система материальных точек

---

Произвольное макроскопическое тело или систему тел можно мысленно разбить на малые взаимодействующие между собой части, каждая из которых рассматривается как материальная точка. Тогда изучение движения произвольной системы тел сводится к изучению *системы материальных точек*. В механике сначала изучают движение одной материальной точки, а затем переходят к изучению движения системы материальных точек.

## Абсолютно твердое тело

Тело, которое ни при каких условиях не может деформироваться и при всех условиях расстояние между двумя точками (точнее, между двумя частицами) этого тела остается постоянным.

## Абсолютно упругое тело

Тело, деформация которого подчиняется *закону Гука*, а после прекращения действия внешних сил принимает свои первоначальные размеры и форму.

## Абсолютно неупругое тело

Тело, полностью сохраняющее деформированное состояние после прекращения действия внешних сил.

## 1.1.2. МЕХАНИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

### 1.4 Система отсчета. Кинематические уравнения движения

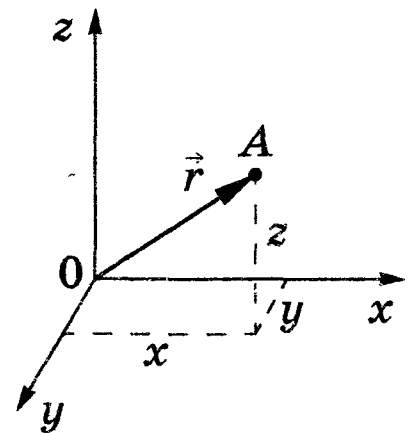
#### Тело отсчета

Произвольно выбранное тело, относительно которого определяется положение других (движущихся) тел.

Положение любого движущегося тела определяется по отношению к телу отсчета, поэтому *механическое движение относительно*.

#### Система координат

Система (в простейшем случае прямоугольная декартова система  $xuz$  (см. рисунок)), *связанная с телом отсчета*.



#### Система отсчета

Совокупность тела отсчета, связанной с ним системы координат и синхронизированных между собой часов.

#### Кинематические уравнения движения материальной точки

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases} \text{ или } \vec{r} = \vec{r}(t)$$

Положение материальной точки  $A$  в декартовой системе координат определяется тремя координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  или радиусом-вектором  $\vec{r}$  (он проводится из начала отсчета координат  $O$  в точку  $A$ ). При движении материальной точки ее координаты с течением времени изменяются, поэтому ее движение определяется записанной системой скалярных уравнений или эквивалентным ей векторным уравнением.

### 1.5 Траектория, длина пути, вектор перемещения

#### Траектория

Линия, описываемая движущейся материальной точкой (или телом) относительно выбранной системы отсчета.

В зависимости от формы траектории различают прямолинейное движение, криволинейное движение, движение по окружности и т. д.

◆ Вид траектории зависит от характера движения материальной точки и от системы отсчета.

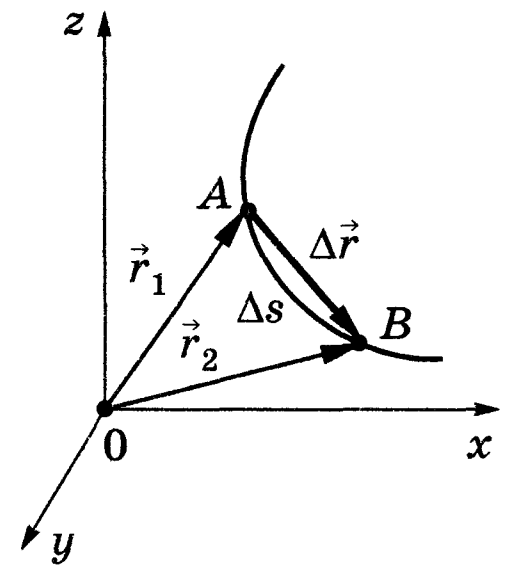
## Вектор перемещения

Вектор  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ , проведенный из начального положения движущейся точки в положение ее в данный момент времени (приращение радиуса-вектора точки за рассматриваемый промежуток времени).

## Длина пути

Длина участка траектории  $AB$ , пройденного материальной точкой за данный промежуток времени:  $\Delta s = \Delta s(t)$  — скалярная функция времени.

При прямолинейном движении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории и модуль перемещения  $|\Delta\vec{r}|$  равен пройденному пути  $\Delta s$ :  $|\Delta\vec{r}| = \Delta s$ .



## Плоское движение

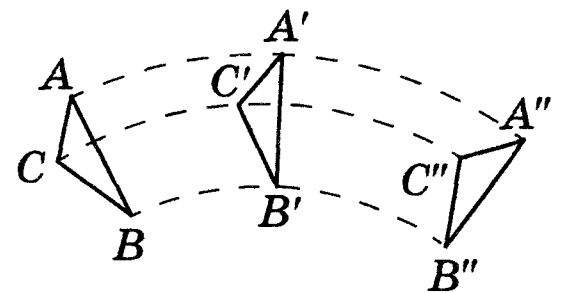
Движение, при котором все точки траектории лежат в одной плоскости.

## 1.6 Поступательное и вращательное движение твердого тела

### Поступательное движение твердого тела

Движение, при котором любая прямая, жестко связанная с движущимся телом и проведенная через две произвольные точки данного тела, остается параллельной самой себе (см. рисунок).

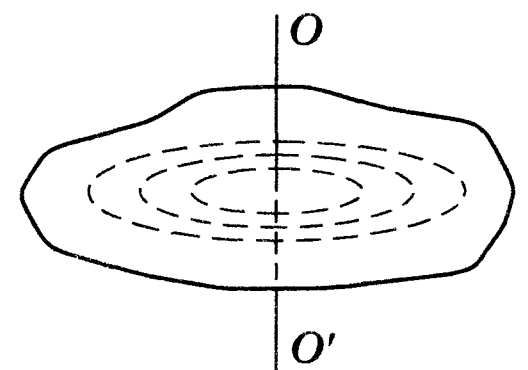
При поступательном движении *все точки тела движутся одинаково*, поэтому его поступательное движение можно охарактеризовать движением какой-то произвольной точки тела (например, движением центра масс тела).



### Вращательное движение твердого тела

Движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

Различные точки твердого тела движутся по-разному, поэтому его вращательное движение нельзя охарактеризовать движением какой-то одной точки.



## 1.1.3. КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

### 1.7 Скорость

#### Скорость

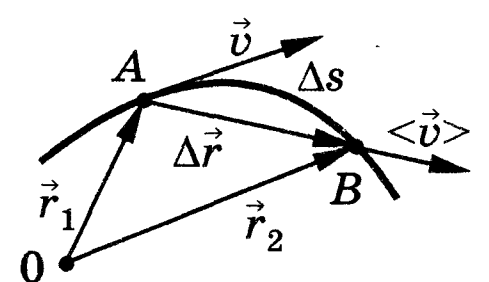
Векторная величина, которая определяет как *быстроту* движения, так и его *направление* в данный момент времени.

#### Средняя скорость

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Векторная величина, определяемая отношением приращения радиуса-вектора точки  $\Delta\vec{r}$  к промежутку времени  $\Delta t$ , в течение которого это приращение произошло.

Направление вектора средней скорости совпадает с направлением  $\Delta\vec{r}$ .



## Мгновенная скорость

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Векторная величина, определяемая первой производной радиуса-вектора движущейся точки по времени.

Вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории в сторону движения (см. рисунок на с. 5).

## Модуль мгновенной скорости

$$v = |\vec{v}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Равен первой производной пути по времени.

## Единица скорости

1 м/с

1 метр в секунду — скорость прямолинейно и равномерно движущейся точки, при которой эта точка за время 1 с перемещается на расстояние 1 м.

## Проекции вектора скорости на оси координат

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

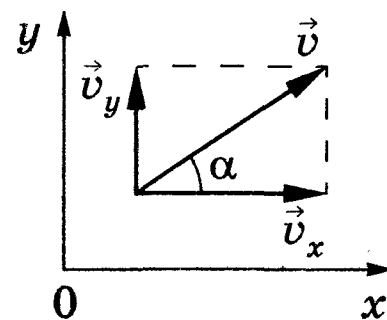
$x, y, z$  — соответственно проекции радиуса-вектора на оси координат.

## Движение в одной плоскости

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

$$v_x = v \cos \alpha, \quad v_y = v \sin \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

$v_x, v_y$  — проекции вектора скорости  $v$  на оси координат.



## 1.8 Ускорение и его составляющие

### Ускорение

Характеристика *неравномерного* движения, определяющая быстроту изменения скорости по модулю и направлению.

### Среднее ускорение

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Векторная величина, равная отношению изменения скорости  $\Delta \vec{v}$  к интервалу времени  $\Delta t$ , за которое это изменение произошло.

### Мгновенное ускорение

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Векторная величина, определяемая первой производной скорости по времени.

### Составляющие ускорения

#### тангенциальная

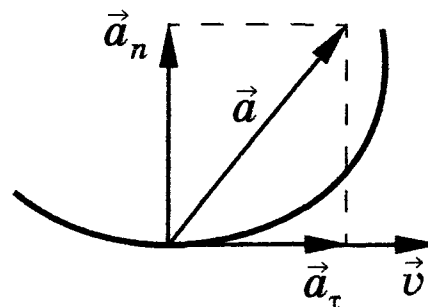
$$a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

Характеризует быстроту изменения скорости *по модулю* (направлена по касательной к траектории, см. рисунок).

#### нормальная

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

Характеризует быстроту изменения скорости *по направлению* (направлена к центру кривизны траектории, см. рисунок).



## Полное ускорение при криволинейном движении

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

Геометрическая сумма тангенциальной и нормальной составляющих ускорения.

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

Модуль полного ускорения.

## Единица ускорения

$$1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

1 метр на секунду в квадрате — ускорение прямолинейного ускоренного движения точки, при котором за 1 с скорость точки изменяется на 1 м/с.

## Классификация движения в зависимости от тангенциальной и нормальной составляющих ускорения

$a_\tau$	$a_n$	Движение
0	0	Прямолинейное равномерное
$a_\tau = a = \text{const}$	0	Прямолинейное равнопеременное
$a_\tau = f(t)$	0	Прямолинейное с переменным ускорением
0	const	Равномерное по окружности
0	$\neq 0$	Равномерное криволинейное
const	$\neq 0$	Криволинейное равнопеременное
$a_\tau = f(t)$	$\neq 0$	Криволинейное с переменным ускорением

## 1.1.4. ПРИМЕРЫ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ ДВИЖЕНИЯ

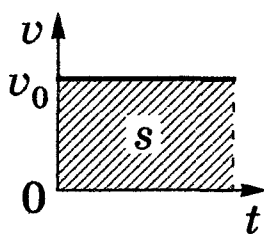
### 1.9 Равномерное и равноускоренное движение

#### Равномерное движение ( $v = v_0 = \text{const}$ )

Скорость  
Ускорение

$$v = v_0 = \text{const}$$

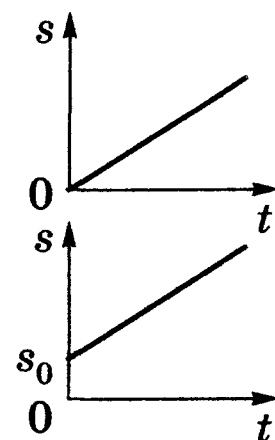
$$a = 0$$



Пройденный путь

$$\text{при } s(0) = 0 \\ s = v_0 t$$

$$\text{при } s(0) = s_0 \\ s = s_0 + v_0 t$$



#### Равноускоренное движение ( $a = \text{const}$ )

Ускорение

$$a = \text{const}$$

Скорость

$$\text{при } v(0) = 0, \\ s(0) = 0$$

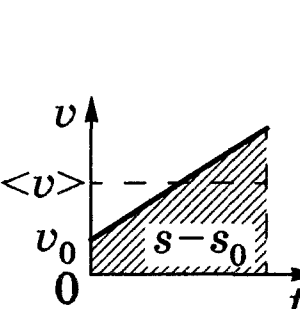
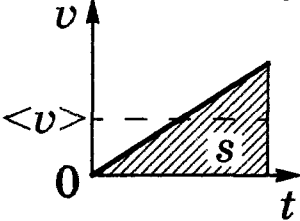
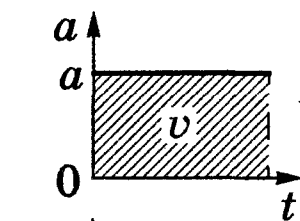
$$v = at = \sqrt{2as},$$

$$\langle v \rangle = at/2 = s/t$$

$$\text{при } v(0) = v_0, \\ s(0) = s_0$$

$$v = v_0 + at,$$

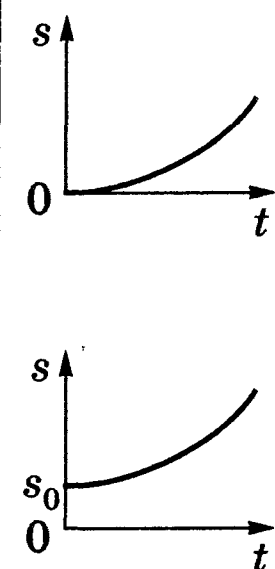
$$\langle v \rangle = v_0 + at/2$$



Пройденный путь

$$\text{при } v(0) = 0, \\ s(0) = 0 \\ s = \frac{at^2}{2}$$

$$\text{при } v(0) = v_0, \\ s(0) = s_0 \\ s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$



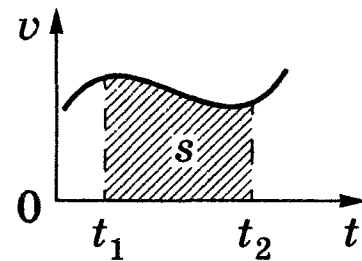
[ $v(0)$  — скорость в момент времени  $t = 0$ ;  $s(0)$  — путь в момент времени  $t = 0$ ;  $s_0 = s(t_0)$  — путь, пройденный к моменту времени  $t_0$ ;  $\langle v \rangle$  — средняя скорость]

## 1.10 Вычисление пройденного пути

Путь, пройденный материальной точкой за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

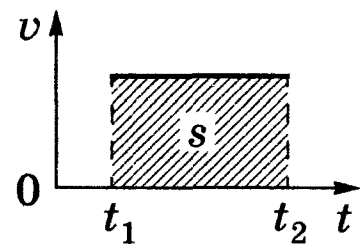
Для определения  $s$  надо знать функцию  $v(t)$ . Тогда пройденный путь за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$  определяется заштрихованной на рисунке площадью.



Путь, пройденный материальной точкой за время  $t$  при равномерном движении

$$s = \int_0^t v dt = v \int_0^t dt = vt$$

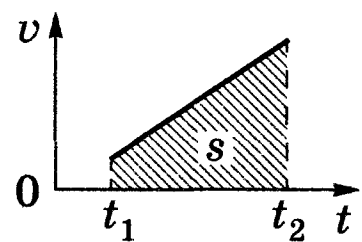
Для определения  $s$  надо знать функцию  $v(t)$ . Тогда путь, пройденный за промежуток времени от  $t$  до  $t_2$ , определяется заштрихованной на рисунке площадью.



Путь, пройденный материальной точкой за время  $t$  при равноускоренном движении

$$s = \int_0^t v dt = \int_0^t (v_0 + at) dt = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

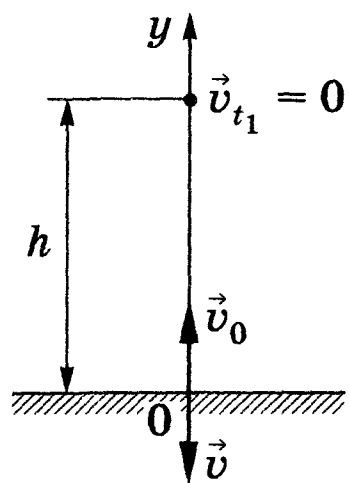
Для определения  $s$  надо знать функцию  $v(t)$ . Тогда путь, пройденный за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$ , определяется заштрихованной на рисунке площадью.



## 1.11 Свободное падение тел

Исходные данные	Движение, которое совершало бы тело только под действием силы тяжести без учета сопротивления воздуха			
	В случае свободного падения тела с небольшой высоты $h$ ( $h \ll R$ , $R$ — радиус Земли) оно движется с постоянным ускорением $\vec{g}$ , направленным вертикально вниз ( $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения)			
Кинематические уравнения движения	$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2},$ $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} t,$ $\vec{a} = \vec{g}$	Первое из этих уравнений — общее векторное равенство, описывающее движение тела с постоянным ускорением $\vec{g}$ из точки $\vec{r}_0$ с начальной скоростью $\vec{v}_0$		
Проекции кинематических уравнений на ось $y$ в любой момент времени	$y = v_0 t + \frac{gt^2}{2},$ $v = v_0 + gt,$ $a = g$	Ось $y$ направлена вертикально вниз. Начало отсчета помещено в точку начала движения. Принято $t_0 = 0$		
Путь, пройденный телом в свободном падении в момент времени $t$	$h = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$	Свободное падение тела без начальной скорости ( $\vec{v}_0 = 0$ )	продолжительность свободного падения	$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$
	при $\vec{v}_0 = 0$ $h = \frac{gt^2}{2}$		скорость	$v = \sqrt{2gh}$

## 1.12 Движение тела, брошенного вертикально вверх

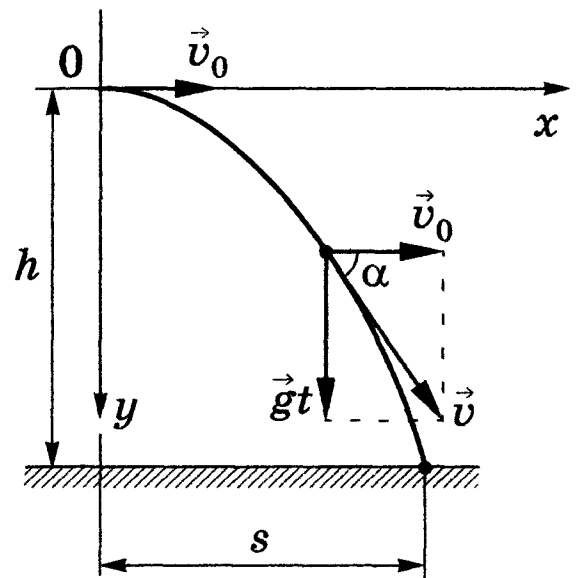
Исходные данные	Тело движется вертикально вверх с начальной скоростью $\vec{v}_0$	
	Без учета сопротивления воздуха ускорение $\vec{a}$ тела в любой момент движения равно ускорению свободного падения $\vec{g}$ ( $\vec{a} = \vec{g}$ )	
	До наивысшей точки подъема движение — равнозамедленное, после достижения ее — свободное падение без начальной скорости	
Кинематические уравнения движения	$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2},$ $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} t,$ $\vec{a} = \vec{g}$	Первое из этих уравнений — общее векторное равенство, описывающее движение тела с постоянным ускорением $\vec{g}$ из точки $\vec{r}_0$ с начальной скоростью $\vec{v}_0$
Проекции кинематических уравнений на ось $y$ в любой момент времени	$y = v_0 t - \frac{g t^2}{2},$ $v = v_0 - g t,$ $a = -g$	<p>Ось <math>y</math> направлена вертикально вверх. Начало отсчета помещено в точку начала движения. Принято <math>t_0 = 0</math></p> 
Время подъема	$t_1 = \frac{v_0}{g}$	В верхней точке $v = 0$ , т. е. $0 = v_0 - g t_1$ , откуда и получается выражение для $t_1$
Высота подъема	$h = \frac{v_0^2}{g}$	$h = y_{\max} = v_0 t_1 - \frac{g t_1^2}{2} = \frac{v_0^2}{2g}$
Общее время движения	$t = \frac{2v_0}{g}$	При приземлении $y(t) = 0$ : $0 = v_0 t - \frac{g t^2}{2}$ , откуда и получается выражение для $t$
Время падения	$t_2 = \frac{v_0}{g}$	$t_2 = t - t_1 = \frac{2v_0}{g} - \frac{v_0}{g} = \frac{v_0}{g}$ (равно времени подъема)
Конечная скорость движения	$v = -v_0$	$v = v_0 - g t = v_0 - g \frac{2v_0}{g} = -v_0.$ <p>Конечная скорость движения по модулю равна начальной скорости. Знак «минус» показывает, что конечная скорость направлена против оси <math>y</math>, т. е. вертикально вниз</p>

## 1.13 Движение тела, брошенного горизонтально

Исходные данные	Тело брошено горизонтально с начальной скоростью $\vec{v}_0$ с высоты $h$
	Без учета сопротивления воздуха ускорение $\vec{a}$ тела в любой момент движения равно ускорению свободного падения $\vec{g}$ ( $\vec{a} = \vec{g}$ )

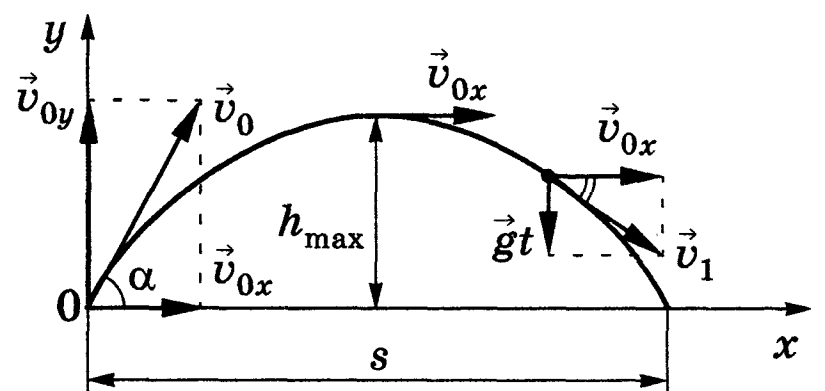


<i>Кинематические уравнения движения</i>	$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2},$ $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} t,$ $\vec{a} = \vec{g}$	Эти уравнения записаны для случая, когда начало отсчета помещено в точку начала движения и начальный момент времени $t_0$ принят равным нулю ( $t_0 = 0$ )
<i>Проекции кинематических уравнений на оси координат</i>	<p>Ось <math>x</math></p> $x = v_0 t,$ $v_x = v_0,$ $a_x = 0$	<p>Ось <math>y</math></p> $y = \frac{g t^2}{2},$ $v_y = g t,$ $a_y = g$
<i>Уравнение траектории движения тела, брошенного горизонтально</i>	$y = \frac{g}{2v_0^2} x^2$	Парабола Из написанных выше первых двух уравнений исключили время
<i>Время полета</i>	$t_{\Pi} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$	Приравняв $y = h = \frac{g t_{\Pi}^2}{2}$ , получим выражение для $t_{\Pi}$
<i>Горизонтальная дальность полета</i>	$s = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$	$s = x_{\max} = v_0 t_{\Pi} = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$
<i>Модуль мгновенной скорости в любой момент времени</i>	$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$	Вектор мгновенной скорости $\vec{v}$ в каждой точке траектории направлен по касательной к траектории (см. рисунок)



## 1.14 Движение тела, брошенного под углом к горизонту

<i>Исходные данные</i>	Тело брошено с начальной скоростью $\vec{v}_0$ под углом $\alpha$ к горизонту	
	Без учета сопротивления воздуха ускорение $\vec{a}$ тела в любой момент движения равно ускорению свободного падения $\vec{g}$ ( $\vec{a} = \vec{g}$ )	
<i>Кинематические уравнения движения</i>	$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2},$ $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} t,$ $\vec{a} = \vec{g}$	Эти уравнения записаны для случая, когда начало отсчета помещено в точку начала движения и начальный момент времени $t_0$ принят равным нулю ( $t_0 = 0$ )
<i>Проекции кинематических уравнений на оси координат</i>	<p>Ось <math>x</math></p> $x = v_{0x} t,$ $v_x = v_{0x},$ $a_x = 0$	<p>Ось <math>y</math></p> $y = v_{0y} t - \frac{g t^2}{2},$ $v_y = v_{0y} - g t,$ $a_y = g$
<i>Проекции начальной скорости на оси координат</i>	<p>Ось <math>x</math></p> $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$	<p>Ось <math>y</math></p> $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$



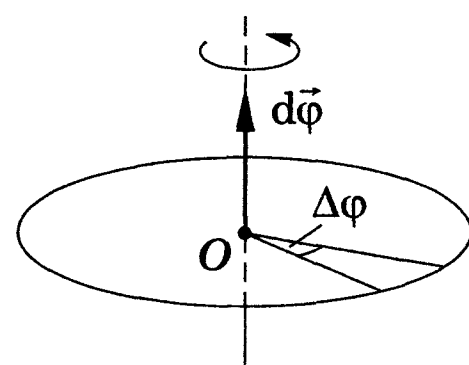
Время подъема	$t_{\pi} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$	В высшей точке подъема $v_y = 0$ : $0 = v_0 \sin \alpha - gt_{\pi}$ , откуда и получаем выражение для $t_{\pi}$
Максимальная высота подъема	$h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$	$h_{\max} = y_{\max} = v_0 \sin \alpha \cdot t_{\pi} - \frac{gt_{\pi}^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$
Общее время движения	$t_{\text{общ}} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$	При приземлении $y(t) = 0$ : $0 = v_0 \sin \alpha \cdot t_{\text{общ}} - \frac{gt_{\text{общ}}^2}{2}$ ; $t_{\text{общ}} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$
Время падения	$t_{\text{пад}} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$	$t_{\text{пад}} = t_{\text{общ}} - t_{\pi} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = t_{\pi}$ (равно времени подъема)
Дальность броска	$s = \frac{v_0 \sin 2\alpha}{g}$	$s = x_{\max} = v_{0x} t_{\text{общ}} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$

## 1.1.5. КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

### 1.15 Элементарный угол поворота, угловая скорость

#### Элементарный угол поворота ( $d\vec{\phi}$ )

Элементарные (бесконечно малые) повороты рассматривают как векторы. Модуль вектора  $d\vec{\phi}$  равен углу поворота, а его направление совпадает с направлением поступательного движения острия винта, головка которого вращается в направлении движения точки по окружности, т. е. подчиняется **правилу правого винта**.



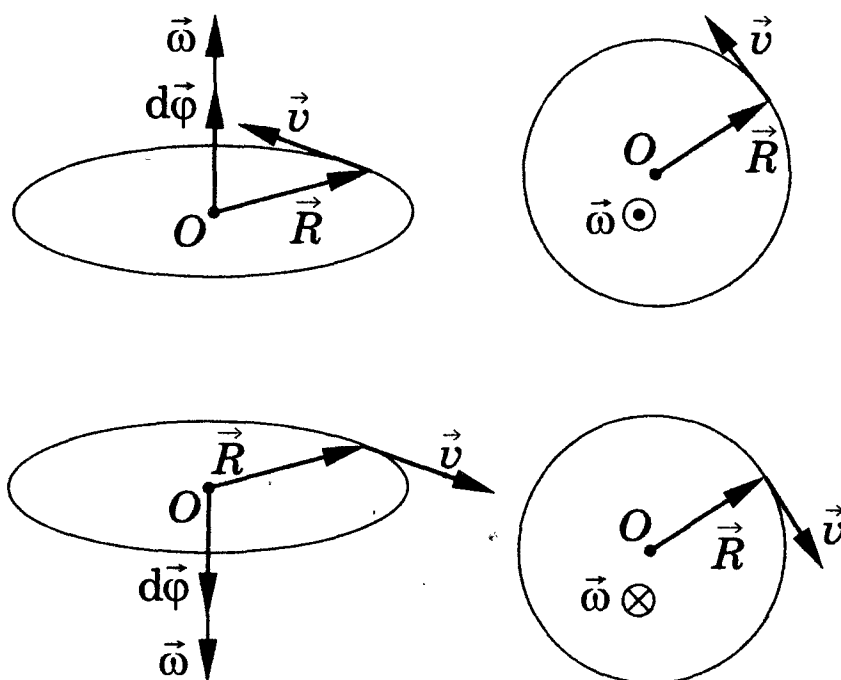
#### Угловая скорость

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\phi}}{\Delta t}$$

Вектор  $\vec{\omega}$  направлен вдоль оси вращения по **правилу правого винта**, т. е. так же, как и вектор  $d\vec{\phi}$  (см. рисунок).

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}$$

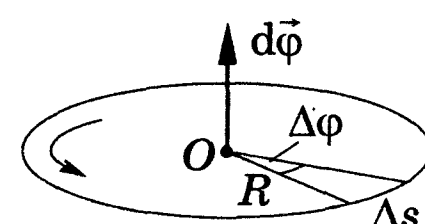
Векторная величина, определяемая первой производной угла поворота тела по времени.



#### Связь модулей линейной и угловой скоростей

$$v = \omega R$$

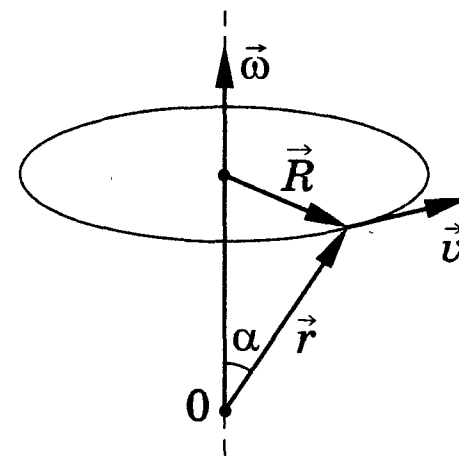
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R \Delta \phi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = R \omega$$



## Связь векторов линейной и угловой скоростей

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}]$$

Положение рассматриваемой точки задается радиусом-вектором  $\vec{r}$  (проводится из лежащего на оси вращения начала координат  $O$ ). Векторное произведение  $[\vec{\omega} \vec{r}]$  совпадает по направлению с вектором  $\vec{v}$  и имеет модуль, равный  $\omega r \sin \alpha = \omega R$ , т. е.  $\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}]$ .



## Единица угловой скорости

$$1 \text{ рад/с}$$

1 радиан в секунду — угловая скорость равномерно вращающегося тела, все точки которого за 1 с поворачиваются относительно оси на угол 1 рад.

## Псевдовекторы (аксиальные векторы)

Векторы, направления которых связываются с направлением вращения (например,  $d\vec{\varphi}$ ,  $\vec{\omega}$ ). Эти векторы не имеют определенных точек приложения: они могут откладываться из любой точки на оси вращения.

## 1.16 Равномерное движение материальной точки по окружности

### Равномерное движение по окружности

Движение, при котором материальная точка (тело) за равные промежутки времени проходит равные по длине дуги окружности.

Угловая скорость  $\omega = \text{const}$ :  $\omega = \frac{\varphi}{t}$  ( $\varphi$  — угол поворота).

### Период вращения $T$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Время, за которое материальная точка совершает один полный оборот по окружности, т. е. поворачивается на угол  $2\pi$ .

Так как промежутку времени  $\Delta t = T$  соответствует  $\Delta\varphi = 2\pi$ , то  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

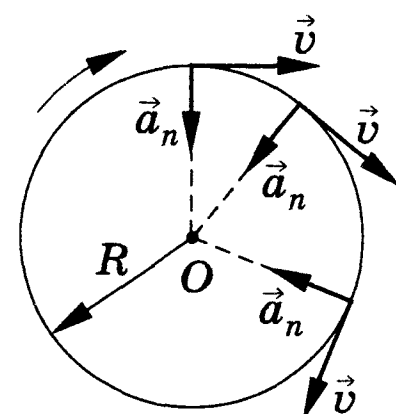
### Частота вращения

$$n = \frac{1}{T}$$

Число полных оборотов, совершаемых материальной точкой при равномерном ее движении по окружности, в единицу времени.

### Характерная особенность равномерного движения по окружности

Равномерное движение по окружности — частный случай криволинейного движения. Движение по окружности со скоростью, постоянной по модулю ( $\vec{v} = \text{const}$ ), является *ускоренным*. Это обусловлено тем, что при постоянном модуле направление скорости все время изменяется.



### Ускорение материальной точки, равномерно движущейся по окружности

$$a_{\tau} = 0$$

Тангенциальная составляющая ускорения при равномерном движении точки по окружности равна нулю.

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

Нормальная составляющая ускорения (*центростремительное ускорение*) направлена по радиусу к центру окружности (см. рисунок). В любой точке окружности вектор нормального ускорения перпендикулярен вектору скорости.

Ускорение материальной точки, равномерно движущейся по окружности в любой ее точке, центростремительное.

## 1.17 Угловое ускорение. Связь линейных и угловых величин

### Угловое ускорение

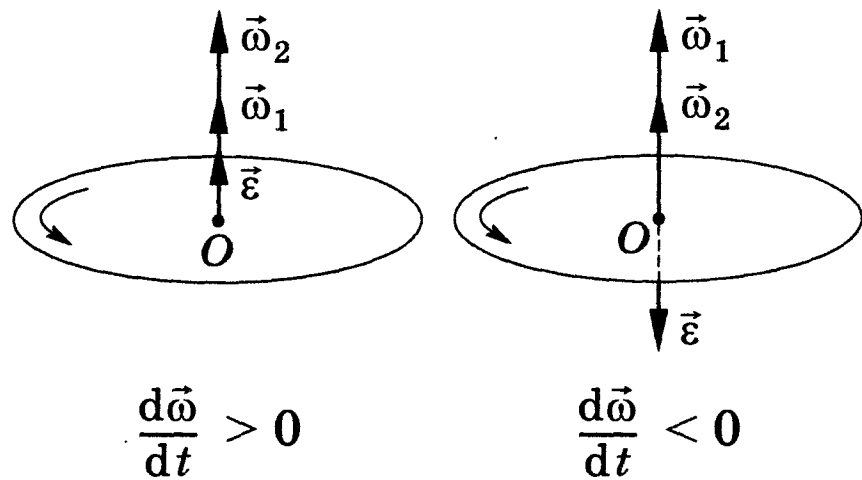
$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Векторная величина, определяемая первой производной угловой скорости по времени.

### Направление вектора углового ускорения

При вращении тела вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения в сторону вектора элементарного приращения угловой скорости.

При ускоренном движении вектор  $\vec{\varepsilon}$  сонаправлен вектору  $\vec{\omega}$ , при замедленном — противоположен ему. Вектор  $\vec{\varepsilon}$  — псевдовектор 1.15.



### Единица углового ускорения

$$1 \text{ рад/с}^2$$

1 радиан на секунду в квадрате равен угловому ускорению равноускоренно вращающегося тела, при котором оно за время 1 с изменяет угловую скорость на 1 рад/с.

### Связь линейных и угловых величин

$$a_\tau = R\varepsilon$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon$$

$$a_n = \omega^2 R$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

[ $R$  — радиус окружности;  
 $v$  — линейная скорость;  
 $a_\tau$  — тангенциальное ускорение;  
 $a_n$  — линейное ускорение;  
 $\omega$  — угловая скорость]

## 1.2. Основы динамики поступательного движения

### 1.2.1. ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА. МАССА И ИМПУЛЬС ТЕЛА. СИЛА

## 1.18 Первый закон Ньютона

### Формулировки первого закона Ньютона

Всякая материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит ее изменить это состояние. (В этой формулировке Ньютон привел закон, установленный еще Галилеем.)

Существуют такие системы отсчета, относительно которых поступательно движущиеся тела сохраняют свою скорость постоянной, если на них не действуют другие тела (или действие других тел компенсируется).

Утверждение о существовании инерциальных систем отсчета составляет содержание первого закона Ньютона.

### Инерциальная система отсчета

Система отсчета, относительно которой материальная точка, свободная от внешних воздействий, либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно.

## Неинерциальная система отсчета

Система отсчета, движущаяся относительно инерциальной системы отсчета с ускорением.

## Инерциальность гелиоцентрической системы отсчета

Опытным путем установлено, что инерциальной можно считать *гелиоцентрическую* (звездную) *систему отсчета* (начало координат находится в центре Солнца, а оси проведены в направлении определенных звезд). Система отсчета, связанная с Землей, строго говоря, неинерциальна, однако эффекты, обусловленные ее неинерциальностью (Земля вращается вокруг собственной оси и вокруг Солнца), при решении многих задач пренебрежимо малы, и в этих случаях ее можно считать инерциальной.

## 1.19 Масса и импульс тела. Сила

### Инертность тел

Свойство, присущее всем телам и заключающееся в том, что тела оказывают сопротивление изменению его скорости (как по модулю, так и по направлению).

### Масса тела

Физическая величина, являющаяся одной из основных характеристик материи, определяющая ее инерционные (*инертная масса*) и гравитационные (*гравитационная масса*) свойства.

В настоящее время можно считать доказанным, что инертная и гравитационная массы равны друг другу (с точностью, не меньшей  $10^{-12}$  их значения).

### Свойства массы в рамках классической механики

Масса — величина *аддитивная* (масса составного тела равна сумме масс его частей); величина *постоянная* (не изменяется при движении тела).

### Единица массы

1 кг

1 килограмм — масса, равная массе международного прототипа килограмма (платиново-иридиевого цилиндра, хранящегося в Международном бюро мер и весов).

### Импульс материальной точки (тела)

$\vec{p} = m\vec{v}$

Векторная величина, численно равная произведению массы материальной точки (тела) на ее скорость и имеющая направление скорости.

### Единица импульса

1 (кг · м)/с

1 килограмм-метр в секунду равен импульсу материальной точки (тела) массой 1 кг, движущейся со скоростью 1 м/с.

### Сила

Векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение или изменяет свою форму и размеры.

В каждый момент времени сила характеризуется *числовым значением*, *направлением* в пространстве и *точкой приложения*.

## 1.2.2. ВТОРОЙ И ТРЕТИЙ ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

### 1.20 Основной закон динамики

#### Общая формулировка второго закона Ньютона

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Скорость изменения импульса материальной точки (тела) равна действующей на нее (него) силе.

Записанное уравнение называют еще *уравнением движения материальной точки*.

#### Еще одна формулировка второго закона Ньютона

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

или

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

Ускорение, приобретаемое материальной точкой (телом), пропорционально вызывающей его силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки (тела).

#### Единица силы

$$1 \text{ Н} = 1 (\text{кг} \cdot \text{м})/\text{с}^2$$

1 ньютон — сила, которая массе в 1 кг сообщает ускорение  $1 \text{ м}/\text{с}^2$  в направлении действия силы.

◆ Второй закон Ньютона справедлив только в инерциальных системах отсчета **1.18**.

### 1.21 Принцип независимости действия сил

#### Формулировка принципа независимости действия сил

Если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то каждая из этих сил сообщает материальной точке ускорение, согласно второму закону Ньютона, как будто других сил нет.

#### Ускорение, приобретаемое точкой под действием нескольких сил

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i = \frac{\vec{F}}{m}$$

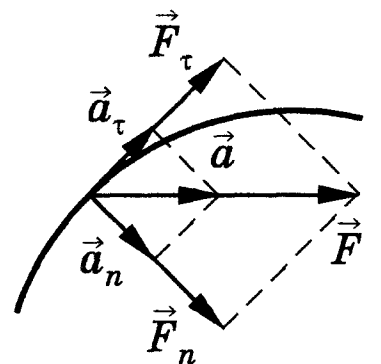
$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$  — результирующая сила. Сила  $\vec{F}$  может быть разложена на две составляющие — *тангенциальную* ( $\vec{F}_\tau$ ) и *нормальную* ( $\vec{F}_n$ ):  $\vec{F} = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n$  (см. рисунок).

#### Тангенциальная и нормальная составляющие силы

$$F_\tau = ma_\tau = m \frac{dv}{dt};$$

$$F_n = ma_n = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R$$

Разложение силы на составляющие приводит к существенному упрощению решения задач. Например, на рисунке действующая сила  $\vec{F} = m\vec{a}$  разложена на два компонента: тангенциальную силу  $\vec{F}_\tau$  (направлена по касательной к траектории) и нормальную силу  $\vec{F}_n$  (направлена по нормали к центру кривизны).



◆ Если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то, согласно принципу независимости действия сил, под  $\vec{F}$  во втором законе Ньютона понимают результирующую силу.

## 1.22 Третий закон Ньютона

### Формулировка третьего закона Ньютона

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Всякое действие материальных точек (тел) друг на друга имеет характер взаимодействия; силы, с которыми действуют друг на друга материальные точки, всегда равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки.

[ $\vec{F}_{12}$  — сила, действующая на первую материальную точку со стороны второй;  
 $\vec{F}_{21}$  — сила, действующая на вторую материальную точку со стороны первой]

### Силы в третьем законе Ньютона

Эти силы приложены к *разным* материальным точкам (телам), всегда действуют *парами* и являются силами *одной природы*.

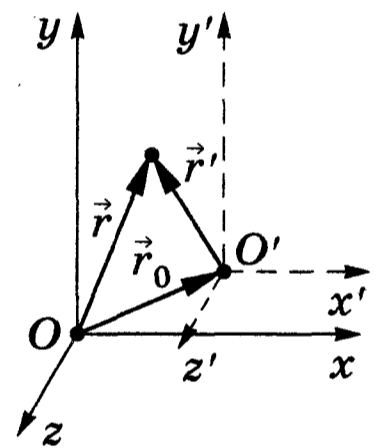
◆ Третий закон Ньютона позволяет осуществить переход от динамики *отдельной* материальной точки к динамике *системы* материальных точек. Это следует из того, что и для системы материальных точек взаимодействие сводится к силам парного взаимодействия между материальными точками.

## 1.2.3. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ГАЛИЛЕЯ

### 1.23 Преобразования координат Галилея

#### Исходные данные

Рассматривают две системы отсчета: инерциальную систему отсчета  $K$  (с координатами  $x, y, z$ ), условно считая ее неподвижной, и систему  $K'$  (с координатами  $x', y', z'$ ), движущуюся относительно  $K$  равномерно и прямолинейно со скоростью  $\vec{u}$  ( $\vec{u} = \text{const}$ ). Отсчет времени — с момента, когда начала координат обеих систем совпадают. На рисунке показано расположение систем в произвольный момент времени  $t$ . Скорость  $\vec{u}$  направлена вдоль  $OO'$ ;  $\vec{r}_0 = \vec{u}t$ .



#### Преобразования координат Галилея

$$r' = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{r} - \vec{u}t \quad \text{или} \quad \begin{cases} x' = x - u_x t, \\ y' = y - u_y t, \\ z' = z - u_z t \end{cases}$$

Задают связь между радиусами-векторами или координатами произвольной точки  $A$  в обеих системах.

#### Частный случай преобразований Галилея

$$\begin{cases} x' = x - vt, \\ y' = y, \\ z' = z \end{cases}$$

Система  $K'$  движется со скоростью  $\vec{v}$  вдоль положительного направления оси  $x$  системы  $K$  (в начальный момент времени оси координат совпадают). В классической механике считается, что ход времени не зависит от относительного движения систем отсчета, т. е. к преобразованиям Галилея добавляют уравнение  $t' = t$ .

## 1.24 Принцип относительности Галилея

### Формулировки принципа относительности Галилея

Законы динамики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

Все инерциальные системы отсчета по своим механическим свойствам эквивалентны друг другу.



## Правило сложения скоростей в классической механике

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$$

Продифференцировав  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t$  по времени и учитывая, что  $t' = t$  1.23, получим  $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$ .

[ $\vec{u}$  — скорость движения системы  $K'$  относительно системы  $K$  1.23;  $\vec{v}$  и  $\vec{v}'$  — соответственно скорости в системах  $K$  и  $K'$ ]

## Подтверждение принципа относительности Галилея (механического принципа относительности)

$$\vec{a}' = \vec{a}$$

В системе  $K'$  ускорение  $\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d(\vec{v} - \vec{u})}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$ . Следовательно, если на точку  $A$  другие тела не действуют ( $\vec{a} = 0$ ), то  $\vec{a}' = 0$ , т. е. система  $K'$  является инерциальной (точка движется относительно нее равномерно и прямолинейно или покоится).

Из равенства  $\vec{a}' = \vec{a}$  вытекает подтверждение принципа относительности Галилея (механического принципа относительности): уравнения динамики при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой не изменяются, т. е. являются *инвариантными* по отношению к преобразованиям координат.

Никакими механическими опытами, проводимыми внутри данной инерциальной системы отсчета, нельзя установить, покоится она или движется равномерно и прямолинейно. Во всех инерциальных системах отсчета одинаковы свойства пространства и времени, одинаковы и все законы механики.

## 1.2.4. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА. СИЛЫ ИНЕРЦИИ

### 1.25 Силы инерции и их проявление

#### Силы инерции

Силы, обусловленные ускоренным движением системы отсчета относительно измеряемой системы отсчета.

*Силы инерции вызываются не взаимодействием тел, а ускоренным движением системы отсчета.* Поэтому они не подчиняются третьему закону Ньютона, так как если на какое-либо тело действует сила инерции, то не существует противодействующей силы, приложенной к данному телу.

#### О втором законе Ньютона в неинерциальных системах отсчета

В *неинерциальных* системах отсчета 1.18 законы Ньютона, вообще говоря, несправедливы. Если же кроме сил, обусловленных взаимодействием тел друг на друга, рассмотреть и силы инерции, то второй закон Ньютона будет справедлив для любой системы отсчета.

#### Второй закон Ньютона для неинерциальных систем отсчета

$$m\vec{a}' = m\vec{a} + \vec{F}_{\text{ин}}$$

Произведение массы тела на ускорение в рассматриваемой системе отсчета равно сумме всех сил (включая и силы инерции), действующих на данное тело.

Силы инерции  $\vec{F}_{\text{ин}}$  должны быть такими, чтобы вместе с силами  $\vec{F}$ , обусловленными взаимодействием тел друг на друга, они сообщали телу ускорение  $\vec{a}'$ , каким оно обладает в неинерциальных системах отсчета ( $\vec{F} = m\vec{a}$  ( $\vec{a}$  — ускорение тела в инерциальной системе отсчета)).

## Три возможных проявления сил инерции

Силы инерции обусловлены *ускоренным движением системы отсчета относительно измеряемой системы*, поэтому в общем случае нужно учитывать следующие случаи проявления этих сил:

- ◆ Силы инерции при ускоренном поступательном движении системы отсчета.
- ◆ Силы инерции, действующие на тело, покоящееся во вращающейся системе отсчета.
- ◆ Силы инерции, действующие на тело, движущееся во вращающейся системе отсчета.

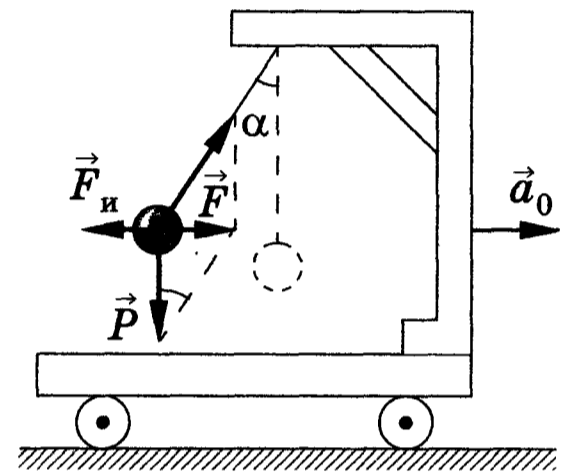
### 1.26 Силы инерции при ускоренном поступательном движении системы отсчета

**Тележка покоится или движется равномерно и прямолинейно (опыт)**

Нить, удерживающая шарик, вертикальна, и сила тяжести  $\vec{P}$  уравнивается силой реакции нити  $\vec{T}$  ( $\vec{P} = \vec{T}$ ).

**Тележка движется равномерно и прямолинейно (опыт)**

Нить начнет отклоняться от вертикали назад до такого угла  $\alpha$ , пока результирующая сила  $\vec{F} = \vec{P} + \vec{T}$  не обеспечит ускорение шарика, равное  $a_0$ .



**Инерциальная система отсчета (анализ опытных данных)**

В системе отсчета, связанной, например, с помещением, на шарик действует результирующая сила  $\vec{F}$ , направленная в сторону ускорения тележки  $\vec{a}_0$ , и для установившегося движения шарика (шарик теперь движется вместе с тележкой с ускорением  $\vec{a}_0$ ) равна  $F = mg \operatorname{tg} \alpha = ma_0$ , откуда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_0}{g} \quad (\alpha \text{ тем больше, чем больше ускорение тележки}).$$

**Неинерциальная система отсчета (анализ опытных данных)**

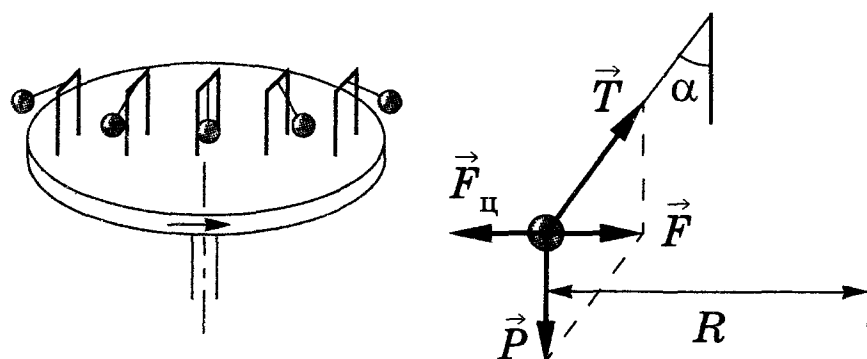
В системе отсчета, связанной с ускоренно движущейся тележкой, шарик покоится, что возможно, если сила  $\vec{F}$  уравнивается равной и противоположно направленной ей силой  $\vec{F}_i$ , которая является не чем иным, как *силой инерции*, так как на шарик никакие другие силы не действуют.  $\vec{F}_i = -m\vec{a}_0$ .

**Примеры проявления сил инерции.** Когда поезд набирает скорость, то пассажир, сидящий по ходу поезда, под действием силы инерции прижимается к спинке сиденья. Наоборот, при торможении поезда сила инерции направлена в противоположную сторону и пассажир удаляется от спинки сиденья. Особенно эти силы заметны при внезапном торможении поезда. Силы инерции проявляются в виде перегрузок, которые возникают при запуске и торможении космических кораблей.

## 1.27 Силы инерции, действующие на тело, покоящееся во вращающейся системе отсчета

Диск вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\omega = \text{const}$  (опыт)

На диске, на разных расстояниях от оси вращения установлены маятники (на нитях подвешены шарики массой  $m$ ). При вращении диска маятники отклоняются от вертикали на некоторый угол  $\alpha$ .



Инерциальная система отсчета (анализ данных)

В системе отсчета, связанной, например, с помещением, шарик равномерно вращается по окружности радиусом  $R$  (расстояние от центра вращающегося шарика до оси вращения). Следовательно, на него действует сила, равная  $F = m\omega^2 R$  и направленная перпендикулярно оси вращения диска. Она является равнодействующей силы тяжести  $\vec{P}$  и силы натяжения нити  $\vec{T}$ :  $\vec{F} = \vec{P} + \vec{T}$ . Для установившегося движения шарика  $F = mg \operatorname{tg} \alpha = m\omega^2 R$ , откуда  $\operatorname{tg} \alpha = \omega^2 R / g$  ( $\alpha$  тем больше, чем больше  $R$  и  $\omega$ ).

Неинерциальная система отсчета (анализ данных)

В системе отсчета, связанной с вращающимся диском, шарик покоится, что возможно, если сила  $\vec{F}$  уравновешивается равной и противоположно направленной ей силой  $\vec{F}_{\text{ц}}$ , которая является не чем иным, как силой инерции, так как на шарик никакие другие силы не действуют. Сила  $F_{\text{ц}}$ , называемая *центробежной силой инерции*, направлена по горизонтали от оси вращения диска,  $F_{\text{ц}} = -m\omega^2 R$ .

**Примеры проявления сил инерции.** Действию центробежных сил инерции подвергаются, например, пассажиры в движущемся транспорте на поворотах, летчики при выполнении фигур высшего пилотажа. При проектировании быстро вращающихся деталей машин (роторов, винтов самолетов и т. д.) принимаются специальные меры для уравновешивания центробежных сил инерции.

◆ Центробежная сила инерции ( $F_{\text{ц}} = -m\omega^2 R$ ) не зависит от скорости тел относительно вращающихся систем отсчета, т. е. действует на все тела, удаленные от оси вращения на конечное расстояние, независимо от того, покоятся ли они в этой системе или движутся относительно нее с какой-то скоростью.

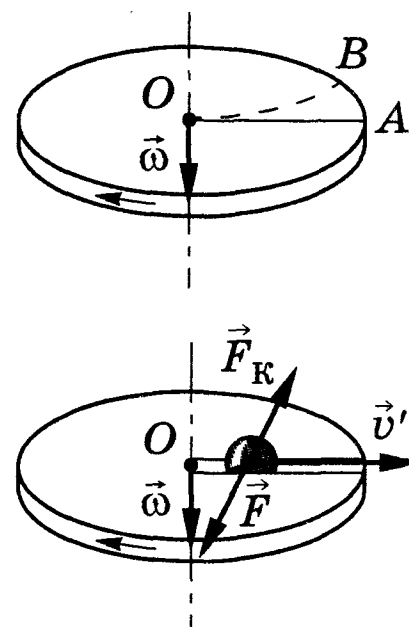
## 1.28 Силы инерции, действующие на тело, движущееся во вращающейся системе отсчета

Диск покоится (опыт)

Шарик массой  $m$ , направленный вдоль радиуса диска со скоростью  $v' = \text{const}$ , движется по радиальной прямой  $OA$ .

Диск вращается равномерно ( $\omega = \text{const}$ ) (опыт)

Шарик массой  $m$ , движущийся со скоростью  $v' = \text{const}$  ( $v' \perp \omega$ ), катится по кривой  $AB$ , причем его скорость  $v'$  относительно диска изменяет свое направление. Это возможно лишь тогда, если на шарик действует сила, перпендикулярная скорости  $v'$ .



Чтобы шарик катился по вращающемуся диску вдоль радиуса, используют жестко укрепленный вдоль радиуса диска стержень, на котором шарик движется без трения равномерно и прямолинейно со скоростью  $v'$ . При отклонении шарика стержень действует на него с некоторой силой  $\vec{F}$ . Относительно диска (вращающейся системы отсчета) шарик движется равномерно и прямолинейно, что можно объяснить тем, что сила  $\vec{F}$  уравновешивается приложенной к шарiku силой инерции  $\vec{F}_K$ , перпендикулярной скорости  $\vec{v}'$ . Эта сила называется *кориолисовой силой инерции*. Сила Кориолиса  $\vec{F}_K = 2m [\vec{v}', \vec{\omega}]$ .

**Примеры проявления сил инерции.** Если тело движется в северном полушарии на север, то действующая на него сила Кориолиса ( $\vec{F}_K = 2m [\vec{v}', \vec{\omega}]$ ) направлена вправо по отношению к направлению движения, т. е. тело несколько отклонится на восток. Поэтому в северном полушарии наблюдается более сильное подмывание правых берегов рек; правые рельсы железнодорожных путей по движению изнашиваются быстрее, чем левые, и т. д.

## 1.29 Основной закон динамики для неинерциальных систем отсчета

Запись основного закона динамики для неинерциальных систем отсчета

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_и + \vec{F}_ц + \vec{F}_K$$

Слагаемые в формуле основного закона

$F = ma$	Сила, обусловленная воздействием тел друг на друга	1.25
$F_и = -ma_0$	Сила инерции	1.26
$F_ц = -m\omega^2 R$	Центробежная сила инерции	1.27
$\vec{F}_K = 2m [\vec{v}', \vec{\omega}]$	Сила Кориолиса	1.28

### Особенности сил инерции

- ◆ Силы инерции обусловлены не взаимодействием тел, а *ускоренным движением системы отсчета*. Поэтому они не подчиняются третьему закону Ньютона.
- ◆ Силы инерции действуют только в неинерциальных системах отсчета.

## 1.2.5. СИЛЫ ТРЕНИЯ

### 1.30 Виды трения

#### Силы трения

Тангенциальные силы, возникающие при соприкосновении поверхностей тел и препятствующие их относительному перемещению.

Силы трения зависят от относительных скоростей тел; они могут быть разной природы, но в результате действия сил трения механическая энергия всегда превращается во внутреннюю энергию соприкасающихся тел.

#### Виды трения

##### внешнее (сухое) трение

Трение, возникающее в плоскости касания двух соприкасающихся тел при их относительном перемещении.

##### трение покоя

Трение при отсутствии относительного перемещения соприкасающихся тел.

## внутреннее трение

Трение между частями одного и того же тела, например, между различными слоями жидкости или газа, скорости которых меняются от слоя к слою. В отличие от внешнего трения здесь *отсутствует трение покоя*.

## Виды сухого трения

### трение скольжения

Возникает, если тело скользит по поверхности опоры.

### трение качения

Возникает, если тело катится по поверхности опоры.

## Направление сил трения

Силы трения направлены по касательной к трущимся поверхностям (или слоям), они противодействуют относительному смещению этих поверхностей (направлены всегда противоположно относительной скорости перемещения).

## 1.31 Силы трения покоя и скольжения

### Сила трения покоя

$$(F_{\text{тр}0})_{\text{max}} = \mu_0 N$$

Относительное движение тел возникает, если внешняя сила  $F > (F_{\text{тр}0})_{\text{max}}$ .

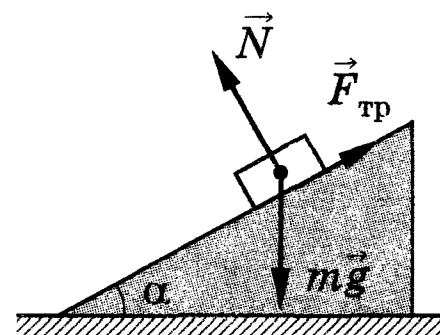
[ $(F_{\text{тр}0})_{\text{max}}$  — предельная сила трения покоя;  $\mu_0$  — коэффициент трения покоя;  $N$  — сила нормального давления]

### Сила трения скольжения

$$F_{\text{тр}} = \mu N$$

Сила трения скольжения  $F_{\text{тр}}$  пропорциональна силе  $N$  нормального давления, с которой одно тело действует на другое.

[ $\mu$  — коэффициент трения скольжения, зависящий от свойств соприкасающихся поверхностей;  $\mu, \mu_0$  — безразмерные коэффициенты]



### Приближенные значения коэффициентов трения покоя ( $\mu_0$ ) и трения скольжения ( $\mu$ )

Сталь/сталь		Дерево/дерево		Дерево/кожа		Автошина/бетон		Автошина/лед	
$\mu_0$	$\mu$	$\mu_0$	$\mu$	$\mu_0$	$\mu$	$\mu_0$	$\mu$	$\mu_0$	$\mu$
0,15	0,12	0,65	0,3	0,47	0,27	0,65	0,5	0,2	0,15

## 1.2.6. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА И ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС

### 1.32 Основные понятия

#### Механическая система

Совокупность материальных точек (тел), рассматриваемых как единое целое.

#### Внутренние силы

Силы взаимодействия между материальными точками механической системы.

#### Внешние силы

Силы, с которыми на материальные точки механической системы действуют внешние тела.

#### Замкнутая система

Механическая система тел, на которую не действуют внешние силы.

## 1.33 Закон сохранения импульса

### Исходные данные

Рассматривается механическая система из  $n$  тел, масса и скорость которых соответственно равны  $m_1, m_2, \dots, m_n$  и  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ .

### Второй закон Ньютона для каждого из $n$ тел механической системы

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1) = \vec{F}'_1 + \vec{F}_1,$$

$$\frac{d}{dt}(m_2\vec{v}_2) = \vec{F}'_2 + \vec{F}_2,$$

.....

$$\frac{d}{dt}(m_n\vec{v}_n) = \vec{F}'_n + \vec{F}_n$$

$[\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n$  — равнодействующие внутренних сил, действующих на каждое тело механической системы;  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  — равнодействующие внешних сил, действующих на каждое тело механической системы]

### После почленного сложения уравнений

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

Производная по времени от импульса механической системы равна геометрической сумме внешних сил, действующих на систему.

Учли, что  $\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i\vec{v}_i$  — импульс системы, а геометрическая сумма внутренних сил механической системы по третьему закону Ньютона равна нулю.

### В случае замкнутой системы

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i) = 0$$

Внешние силы отсутствуют (или геометрическая сумма всех внешних сил равна нулю).

### Закон сохранения импульса

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i\vec{v}_i = \text{const}$$

Импульс замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени.

Этот закон — *фундаментальный закон природы* (он универсален).

### Закон сохранения импульса — следствие однородности пространства

**Однородность пространства** заключается в том, что при параллельном переносе в пространстве замкнутой системы тел как целого ее физические свойства и законы движения не изменяются, иными словами, не зависят от выбора положения начала координат инерциальной системы отсчета.

◆ Импульс сохраняется и для *незамкнутой* системы, если геометрическая сумма внешних сил равна нулю.

## 1.34 Закон движения центра масс

### Центр масс системы материальных точек (тела)

Воображаемая точка  $C$ , положение которой характеризует распределение массы этой системы (тела).

Для определения положения центра масс достаточно поочередно подвесить тело за две различные точки на его поверхности и провести через точки подвеса вертикали, пересечение которых и даст положение центра масс (центр масс может располагаться вне тела).



## Радиус-вектор центра масс

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m}$$

[ $m_i$  и  $\vec{r}_i$  — соответственно масса и радиус-вектор  $i$ -й материальной точки;  $n$  — число материальных точек в системе;  $m = \sum_{i=1}^n m_i$  — масса системы]

## Скорость центра масс

$$\vec{v}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{m}$$

Учли, что  $\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{m}$ .

## Импульс системы материальных точек

$$\vec{p} = m\vec{v}_C$$

Равен произведению массы системы на скорость ее центра масс  
 $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ ;  $\vec{p} = \sum \vec{p}_i$ .

## Закон движения центра масс

$$m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

Центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и на которую действует сила, равная геометрической сумме всех внешних сил, приложенных к системе.

## 1.3. Работа и энергия

### 1.3.1. ЭНЕРГИЯ, РАБОТА, МОЩНОСТЬ

#### 1.35 Энергия. Работа силы

##### Энергия

Универсальная мера различных форм движения и взаимодействия.

С различными формами движения материи связывают различные виды энергии — механическую, тепловую, электромагнитную, ядерную и др.

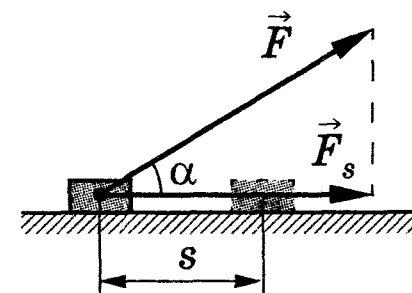
##### Работа силы

Количественная характеристика процесса обмена энергией между взаимодействующими телами.

Работа постоянной силы  $F$ , составляющей угол  $\alpha$  с направлением прямолинейного движения тела

$$A = F_s s = F s \cos \alpha$$

Работа этой силы равна произведению проекции силы  $F_s$  на направление перемещения ( $F_s = F \cos \alpha$ ), умноженной на перемещение точки приложения силы.

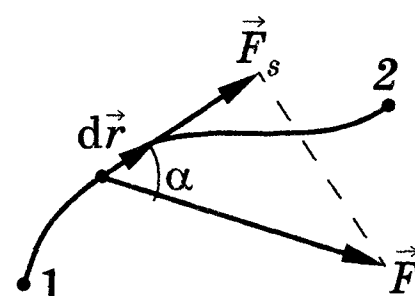


Элементарная работа силы  $\vec{F}$  на перемещении  $d\vec{r}$

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = F \cos \alpha ds = F_s ds$$

[ $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{F}$  и  $d\vec{r}$ ;  $ds = |d\vec{r}|$  — элементарный путь;  $F_s$  — проекция вектора  $\vec{F}$  на вектор  $d\vec{r}$ ]

◆ Работа — величина скалярная.



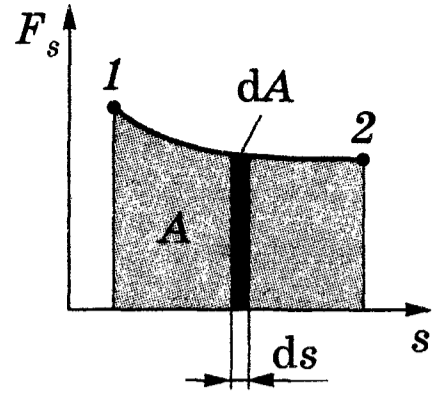


## Работа силы на участке траектории 1—2

$$A = \int_1^2 F ds \cos \alpha = \int_1^2 F_s ds$$

Для вычисления этого интеграла надо знать зависимость  $F_s$  от  $s$  вдоль траектории 1—2 (пример на рисунке).

*Геометрический смысл выражения для  $A$* : искомая работа определяется на графике площадью закрашенной фигуры.



### Единица работы

$$1 \text{ Дж}; \quad 1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

1 джоуль — работа, совершаемая силой, равной 1 Н на пути 1 м.

## 1.36 Мощность

### Мощность

$$N = \frac{dA}{dt}$$

Физическая величина, характеризующая скорость совершения работы.

### Мощность, развиваемая силой $\vec{F}$

$$N = \vec{F}\vec{v}$$

Равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения этой силы.

За время  $dt$  сила  $\vec{F}$  совершает работу  $\vec{F} d\vec{r}$ , и мощность, развиваемая этой силой, в данный момент времени равна  $N = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v}$ .

◆ Мощность — величина скалярная.

### Единица мощности

$$1 \text{ Вт}; \quad 1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}$$

1 ватт — мощность, при которой за время 1 с совершается работа 1 Дж.

## 1.3.2. КИНЕТИЧЕСКАЯ И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

### 1.37 Кинетическая энергия

#### Кинетическая энергия механической системы

Энергия механического движения этой системы.

#### Связь работы и кинетической энергии

$$dT = dA$$

Приращение кинетической энергии материальной точки (тела) на элементарном перемещении равно элементарной работе на том же перемещении.

Сила  $\vec{F}$ , действуя на покоящееся тело и вызывая его движение, совершает работу, а энергия движущегося тела возрастает на величину затраченной работы. Работа  $dA$  силы  $\vec{F}$  на пути, который тело прошло за время возрастания скорости от 0 до  $\vec{v}$ , идет на увеличение кинетической энергии  $dT$  тела. Можно записать:

$$\vec{F}d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m\vec{v} d\vec{v} = mv dv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dT.$$

**Кинетическая энергия тела массой  $m$ , движущегося со скоростью  $v$**

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

Определяется работой, которую надо совершить, чтобы сообщить телу данную скорость.

**Характерные свойства  $T$**

Кинетическая энергия *всегда положительна; неодинакова в разных инерциальных системах отсчета; является функцией состояния системы.*

**Работа сил при перемещении из точки 1 в точку 2**

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_{v_1}^{v_2} mv dv = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = T_2 - T_1.$$

**Теорема о кинетической энергии**

$$T_2 - T_1 = A_{12}$$

Приращение кинетической энергии материальной точки на некотором перемещении равно алгебраической сумме работ всех сил, действующих на материальную точку на том же перемещении.

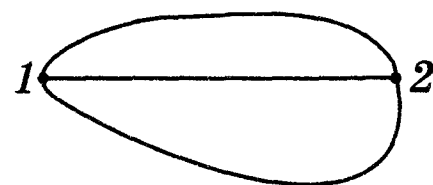
## 1.38 Консервативная и диссипативная силы

**Потенциальное поле**

Поле, в котором работа, совершаемая силами при перемещении тела из одного положения в другое, не зависит от того, по какой траектории это перемещение произошло, а зависит только от начального и конечного положений.

**Консервативные силы**

Сила, работа которой при перемещении тела из одного положения в другое не зависит от того, по какой траектории это перемещение произошло, а зависит только от начального и конечного положений тела (точки 1 и 2 на рисунке).



**Пример:** сила тяжести.

**Диссипативная сила**

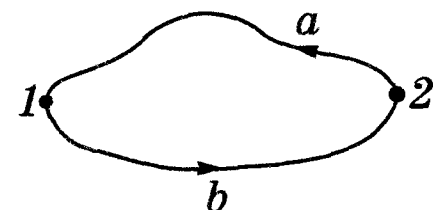
Сила, работа которой зависит от траектории перемещения тела из одной точки в другую.

**Пример:** силы трения и сопротивления.

**Работа консервативных сил по замкнутому пути**

$$A = 0$$

$A = A_{1b2} + A_{2a1} = 0$  (работы  $A_{1b2}$  и  $A_{2a1}$  не зависят от траектории перемещения; они равны и отличаются только знаками).



## 1.39 Потенциальная энергия и консервативные силы

**Потенциальная энергия**

Механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними.

**Связь работы консервативных сил и потенциальной энергии**

Работа консервативных сил не зависит от траектории и по любому замкнутому пути равна нулю 1.38. Изменение потенциальной энергии, равное

по величине работе, тоже не будет зависеть от траектории и по любому замкнутому пути будет равным нулю. Следовательно, запас потенциальной энергии, как возможной работы консервативных сил, определяется только начальной и конечной конфигурациями системы.

$$dA = -d\Pi$$

Работа консервативных сил при элементарном (бесконечно малом) изменении конфигурации системы равна приращению потенциальной энергии, взятому со знаком «минус», так как работа совершается за счет убыли потенциальной энергии.

### Характерные особенности потенциальной энергии

$$\Pi = -\int \vec{F} d\vec{r} + C$$

$dA = \vec{F} d\vec{r} = -d\Pi$ ;  $\Pi = -\int \vec{F} d\vec{r} + C$  ( $C$  — постоянная интегрирования).

Потенциальная энергия определяется с точностью до некоторой произвольной постоянной. Это, однако, не отражается на физических законах, так как в них входит или разность потенциальных энергий в двух положениях тела, или производная  $\Pi$  по координатам. Поэтому *потенциальную энергию тела в каком-то определенном положении считают равной нулю* (выбирают нулевой уровень отсчета), а *энергию тела в других положениях отсчитывают относительно нулевого уровня.*

### Связь между консервативной силой и потенциальной энергией

$$\vec{F} = -\text{grad } \Pi$$

Для консервативных сил  $F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}$ ,  $F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}$ ,  $F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$ , или в векторном виде  $\vec{F} = -\text{grad } \Pi$ .

[ $\text{grad } \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \vec{k}$  — *градиент скаляра  $\Pi$  ( $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — единичные векторы координатных осей)]*

## 1.40 Примеры вычислений потенциальной энергии. Полная энергия

Конкретный вид функции  $\Pi$  зависит от *характера силового поля.*

### Потенциальная энергия тела массой $m$ на высоте $h$

$$\Pi = mgh$$

Это выражение вытекает из того, что потенциальная энергия равна работе силы тяжести при падении тела с высоты  $h$  на поверхность Земли. Высота  $h$  отсчитывается от нулевого уровня, для которого  $\Pi_0 = 0$ ,  $g$  — ускорение свободного падения.

Поскольку начало отсчета выбирается произвольно **1.39**, то потенциальная энергия может иметь отрицательное значение (*кинетическая энергия всегда положительна!*). Если принять за нуль потенциальную энергию тела, лежащего на поверхности Земли, то потенциальная энергия тела, находящегося на дне шахты (глубина  $h'$ ),  $\Pi = -mgh'$ .

### Потенциальная энергия упруго деформированного тела (пружины)

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}$$

Это выражение получается из того, что работа силы при деформации пружины идет на увеличение потенциальной энергии пружины.

Элементарная работа  $dA$ , совершаемая силой  $F_x$  при бесконечно малой деформации  $dx$ ,  $dA = F_x dx = kx dx$  ( $F_x = -F_{x \text{ упр}} = -(-kx) = kx$ ).

Полная работа  $A = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2}$ .

[ $k$  — коэффициент упругости (для пружины — жесткость);  $F_{x \text{ упр}} = -kx$  — проекция силы упругости на ось  $x$ ;  $F_{x \text{ упр}}$  направлена в сторону, противоположную деформации  $x$ . По третьему закону Ньютона деформирующая сила равна по модулю силе упругости и противоположно ей направлена]

**Полная механическая энергия системы**

$E = T + \Pi$	Энергия механического движения и взаимодействия, т. е. равна сумме кинетической и потенциальной энергий.
---------------	--

**1.3.3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ**

**1.41 Закон сохранения механической энергии**

**Исходные данные**

Рассматривается система материальных точек массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , движущихся со скоростями  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ .

**Второй закон Ньютона для каждой из материальных точек**

$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}'_1 + \vec{F}_1 + \vec{f}_1,$	$[\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n$ — равнодействующие <i>внутренних консервативных</i> сил, действующих на каждую из этих точек; $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ — равнодействующие <i>внешних</i> сил, которые считаются <i>консервативными</i> ; $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n$ — равнодействующие <i>внешних неконсервативных</i> сил, действующие на каждую из материальных точек]
$m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}'_2 + \vec{F}_2 + \vec{f}_2,$	
.....	
$m_n \frac{d\vec{v}_n}{dt} = \vec{F}'_n + \vec{F}_n + \vec{f}_n$	

**Учет перемещений точек под действием сил**

$m_1(\vec{v}_1 d\vec{v}_1) - (\vec{F}'_1 + \vec{F}_1) d\vec{r}_1 = \vec{f}_1 d\vec{r}_1,$	Точки движутся под действием сил, поэтому за время $dt$ совершают перемещения $d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, \dots, d\vec{r}_n$ . Каждое уравнение второго закона Ньютона умножено скалярно на соответствующее перемещение, и учтено, что $d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt$ .
$m_2(\vec{v}_2 d\vec{v}_2) - (\vec{F}'_2 + \vec{F}_2) d\vec{r}_2 = \vec{f}_2 d\vec{r}_2,$	
.....	
$m_n(\vec{v}_n d\vec{v}_n) - (\vec{F}'_n + \vec{F}_n) d\vec{r}_n = \vec{f}_n d\vec{r}_n$	

**После сложения уравнений**

$\sum_{i=1}^n m_i(\vec{v}_i d\vec{v}_i) - \sum_{i=1}^n (\vec{F}'_i + \vec{F}_i) d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i d\vec{r}_i$ (*)	Правая часть равенства определяет работу внешних неконсервативных сил, действующих на систему.
---	--

**Элементарное приращение кинетической энергии**

$\sum_{i=1}^n m_i(\vec{v}_i d\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = dT$	Первый член равенства (*) равен элементарному приращению кинетической энергии $dT$ системы <b>1.37</b> .
--	--

**Элементарное приращение потенциальной энергии системы**

$\sum_{i=1}^n (\vec{F}'_i + \vec{F}_i) d\vec{r}_i = d\Pi$	Второй член равенства (*) равен элементарной работе внутренних и внешних консервативных сил, взятой со знаком «минус», т. е. равен элементарному приращению потенциальной энергии $d\Pi$ системы <b>1.39</b> .
---	--

**Изменение полной механической энергии системы**

$d(T + \Pi) = dA$	Равно работе внешних неконсервативных сил, действующих на систему.
-------------------	--

Правая часть равенства (\*) задает  $dA$ .

**В случае отсутствия внешних неконсервативных сил**

$d(T + \Pi) = 0$	Из записанного равенства следует, что $T + \Pi = E = \text{const.}$
------------------	---

## Закон сохранения механической энергии

$$T + \Pi = E = \text{const}$$

В системе тел, между которыми действуют только *консервативные силы*, полная механическая энергия сохраняется, т. е. не изменяется со временем.

## Закон сохранения энергии — следствие однородности времени

*Однородность времени* проявляется в том, что физические законы инвариантны относительно выбора начала отсчета времени. Например, при свободном падении тела в поле сил тяжести его скорость и пройденный путь зависят лишь от начальной скорости и продолжительности свободного падения тела и не зависят от того, когда тело начало падать.

## 1.42 Консервативные системы и закон сохранения энергии

### Консервативные системы

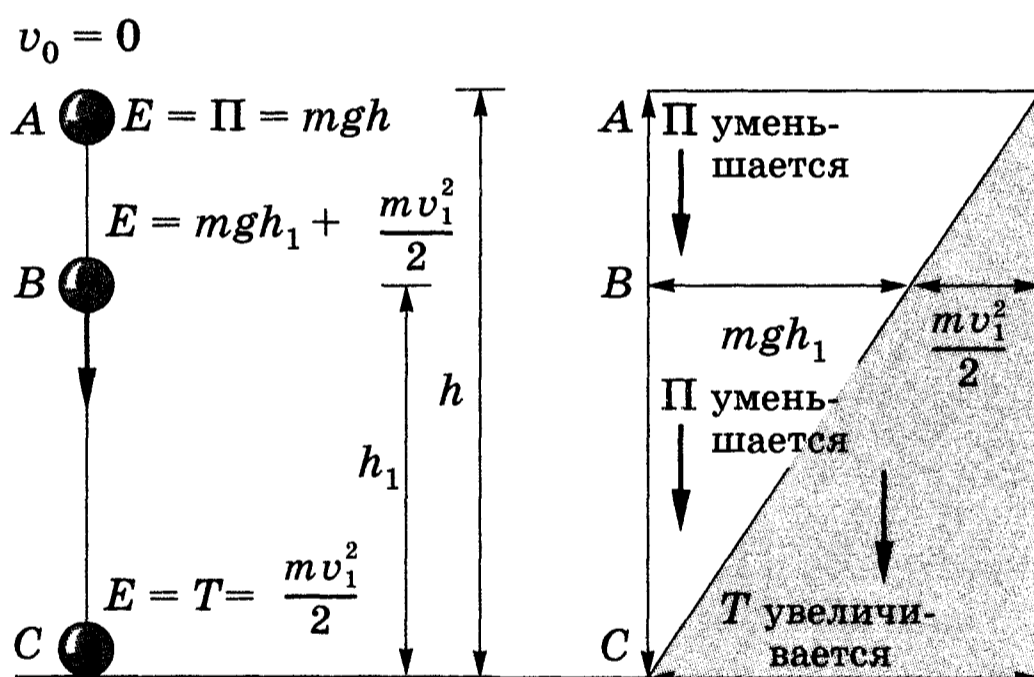
Механические системы, на тела которых действуют только консервативные силы (внутренние и внешние).

### Еще формулировка закона сохранения энергии

В консервативных системах полная механическая энергия сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени.

### Превращение энергии на примере свободного падения тела (сопротивление не учитывается)

В консервативных системах полная механическая энергия сохраняется, т. е.  $E = \text{const}$ . Могут происходить лишь превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно в эквивалентных количествах так, что полная энергия остается неизменной (что и продемонстрировано на рисунке).



## 1.43 Закон сохранения и превращения энергии

### Диссипативная система

Система, в которой механическая энергия постепенно уменьшается за счет преобразования в другие (немеханические) формы энергии. Этот процесс получил название *диссипации* (или *рассеяния*) энергии.

### Об энергии в случае неконсервативных систем

Все системы в природе, строго говоря, являются диссипативными. В системе, в которой действуют также неконсервативные силы, например силы трения, полная механическая энергия системы не сохраняется. Следовательно, в этих случаях закон сохранения механической энергии несправедлив. Однако при «исчезновении» механической энергии всегда возникает эквивалентное количество энергии другого вида.

## Закон сохранения и превращения энергии

Энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой.

В этом и заключается *физическая сущность* закона сохранения и превращения энергии — сущность неуничтожимости материи и ее движения.

Этот закон — *фундаментальный закон природы*, он справедлив как для систем макроскопических тел, так и для систем микротел.

### 1.3.4. ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ

#### 1.44 Потенциальные кривые и их анализ на некоторых примерах

##### Исходные данные

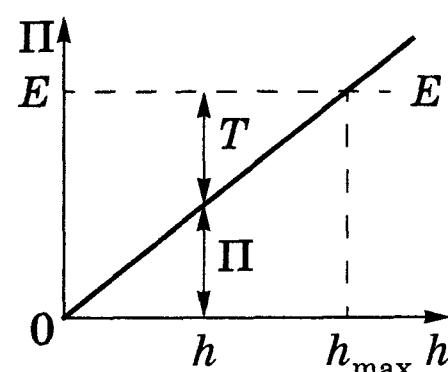
- ◆ Рассматривается *одномерное* движение тела (потенциальная энергия — функция лишь одной переменной).
- ◆ Рассматриваются только *консервативные* системы (в них механическая энергия превращается только в механическую).

##### Потенциальная кривая

График зависимости потенциальной энергии от некоторого аргумента.

##### Анализ потенциальной кривой для тела в однородном поле тяжести

Потенциальная кривая  $\Pi(h) = \Pi = mgh$  — прямая линия, проходящая через начало координат, угол наклона которой к оси  $h$  тем больше, чем больше масса  $m$  тела ( $\operatorname{tg} \alpha = mg$ ). График заданной полной энергии тела  $E$  — прямая  $EE$ , параллельная оси  $h$ .



- ◆ Потенциальная энергия  $\Pi$  тела на высоте  $h$  определяется отрезком вертикали, заключенным между точкой  $h$  на оси абсцисс и потенциальной кривой.

- ◆ Кинетическая энергия  $T$  тела на высоте  $h$  задается ординатой между потенциальной кривой и горизонтальной прямой  $EE$ .

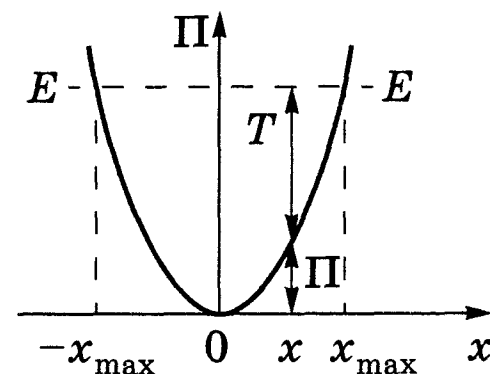
- ◆ Если  $h = h_{\max}$ , то  $T = 0$  и  $\Pi = E = mgh_{\max}$ , т. е. потенциальная энергия становится максимальной и равной полной энергии.

- ◆ Скорость тела на высоте  $h$ :

$$v = \sqrt{2g(h_{\max} - h)} \quad (T = E - \Pi, \text{ т. е. } \frac{mv^2}{2} = mgh_{\max} - mgh).$$

##### Анализ потенциальной кривой для упругодеформированного тела

Зависимость потенциальной энергии упругой деформации  $\Pi = \frac{kx^2}{2}$  от деформации  $x$  — *потенциальная кривая* — имеет вид параболы. График заданной полной энергии тела  $E$  — прямая  $EE$ , параллельная оси  $x$ .



- ◆ Потенциальная энергия  $\Pi$  при деформации  $x$  определяется отрезком вертикали, заключенным между точкой  $x$  на оси абсцисс и потенциальной кривой.

- ◆ Кинетическая энергия  $T$  при деформации  $x$  задается ординатой между потенциальной кривой и горизонтальной прямой  $EE$ .

- ◆ С возрастанием деформации  $x$  потенциальная энергия тела возрастает, а кинетическая — уменьшается.



- ◆ Абсцисса  $x_{\max}$  определяет максимально возможную деформацию растяжения тела, а  $-x_{\max}$  — максимально возможную деформацию сжатия тела.
- ◆ Если  $x = \pm x_{\max}$ , то  $T = 0$  и  $\Pi = E = \frac{kx_{\max}^2}{2}$ , т. е. потенциальная энергия становится максимальной и равной полной энергии.
- ◆ При полной энергии тела, равной  $E$ , тело не может сместиться правее  $x_{\max}$  и левее  $-x_{\max}$ , так как кинетическая энергия не может быть отрицательной и, следовательно, потенциальная энергия не может быть больше полной энергии. В таком случае говорят, что тело находится в *потенциальной яме* с координатами  $-x_{\max} \leq x \leq x_{\max}$ .

## 1.45 Анализ потенциальной кривой (общий случай)

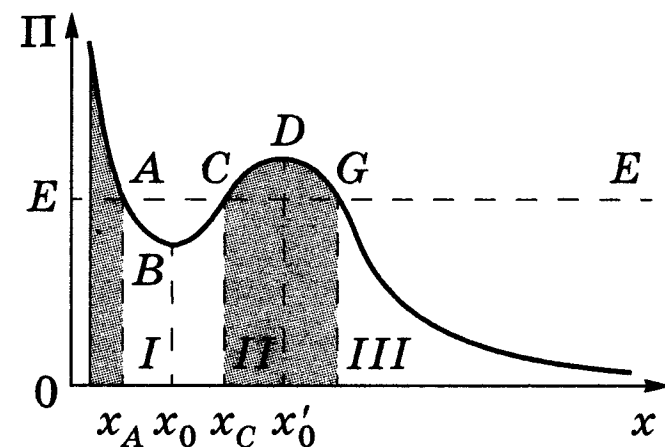
### Исходные данные

- ◆ Рассматривается *одномерное* движение тела (потенциальная энергия — функция лишь одной переменной (например, координаты  $x$ )).
- ◆ Рассматриваются только *консервативные* системы (в них механическая энергия превращается только в механическую).

### Анализ потенциальной кривой произвольной формы

В общем случае потенциальная кривая может иметь достаточно сложный вид, например с несколькими чередующимися максимумами и минимумами (см. рисунок).

График заданной полной энергии частицы — прямая  $EE$ , параллельная оси  $x$ .



- ◆ Частица может находиться только там, где  $\Pi(x) \leq E$ , т. е. в областях  $I$  и  $III$ .

- ◆ Переходить из области  $I$  в  $III$  и обратно частица не может, так как ей препятствует *потенциальный барьер*  $CDG$ , ширина которого равна интервалу значений  $x$ , при которых  $E < \Pi$ , а его высота определяется разностью  $\Pi_{\max} - E$ . Для того чтобы частица смогла преодолеть потенциальный барьер, ей необходимо сообщить дополнительную энергию, равную высоте барьера или превышающую ее.

- ◆ В области  $I$  частица с полной энергией  $E$  оказывается «запертой» в потенциальной яме  $ABC$  и совершает колебания между точками с координатами  $x_A$  и  $x_C$ .

При смещении частицы из положения  $x_0$  (и влево, и вправо) она испытывает действие возвращающей силы, поэтому положение  $x_0$  является *положением устойчивого равновесия*. Указанные условия выполняются и для точки  $x'_0$  (для  $\Pi_{\max}$ ). Однако эта точка соответствует *положению неустойчивого равновесия*, так как при смещении частицы из положения  $x'_0$  появляется сила, стремящаяся удалить ее от этого положения.

## 1.3.5. УДАР АБСОЛЮТНО УПРУГИХ И НЕУПРУГИХ ТЕЛ

### 1.46 Общие понятия

#### Удар (соударение)

Столкновение двух или более тел, при котором взаимодействие длится очень короткое время.

**Примеры:** столкновение бильярдных шаров, удар человека о землю при прыжке с поезда и т. д.



Силы взаимодействия между сталкивающимися телами (*ударные* или *мгновенные силы*) столь велики, что внешними силами, действующими на них, можно пренебречь. Это позволяет систему тел в процессе их соударения *приблизительно* рассматривать как *замкнутую систему* и применять к ней законы сохранения.

### Сущность удара

Кинетическая энергия относительного движения соударяющихся тел на короткое время преобразуется в энергию упругой деформации. Во время удара имеет место перераспределение энергии между соударяющимися телами. Наблюдения показывают, что относительная скорость тел после удара не достигает своего прежнего значения. Это объясняется тем, что нет идеально упругих тел и идеально гладких поверхностей.

### Коэффициент восстановления

$$\varepsilon = \frac{v_n'}{v_n}$$

Отношение *нормальных* составляющих относительной скорости тел после ( $v_n'$ ) и до ( $v_n$ ) удара.

$$\varepsilon = 0$$

Такие тела — *абсолютно неупругие* (см. также **1.3**).

$$\varepsilon = 1$$

Такие тела — *абсолютно упругие* (см. также **1.3**).

**Примеры:** для стальных шаров  $\varepsilon \approx 0,56$ ; для слоновой кости  $\varepsilon \approx 0,89$ ; для свинца  $\varepsilon \approx 0$ .

### Линия удара

Прямая, проходящая через точку соприкосновения тел и нормальная к поверхности их соприкосновения.

### Центральный удар

Удар, при котором тела до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры масс.

## 1.47 Центральный абсолютно упругий удар

### Абсолютно упругий удар

Столкновение двух тел, в результате которого в обоих взаимодействующих телах не остается никаких деформаций и вся кинетическая энергия, которой обладали тела до удара, после удара снова превращается в кинетическую энергию.

Следует отметить, что это *идеализация*.

### Исходные данные

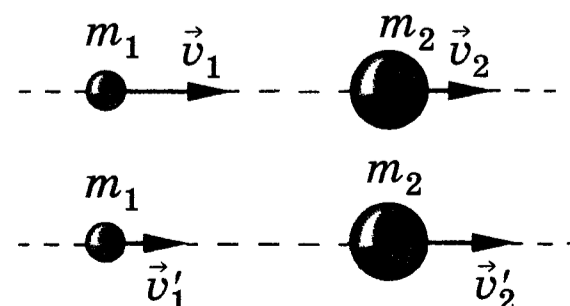
Сталкиваются шары массами  $m_1$  и  $m_2$ ; скорости шаров до удара —  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ , после удара —  $\vec{v}'_1$  и  $\vec{v}'_2$ . В случае прямого центрального удара векторы скоростей шаров до и после удара лежат на прямой линии, соединяющей их центры. Проекция векторов скорости на эту линию равны модулям скоростей. Их направления учитываются знаками: положительное значение приписывается движению вправо, отрицательное — движению влево. Выполняются законы сохранения импульса и энергии.

### Законы сохранения импульса и механической энергии

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2,$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v'^2_1}{2} + \frac{m_2 v'^2_2}{2}$$

Эти законы записаны при сделанных выше допущениях.



## Скорости тел после абсолютно упругого удара

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2},$$

$$v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

После преобразования законов сохранения

$$m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2); \quad (*)$$

$$v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2; \quad (**)$$

$$m_1(v_1^2 - v'^2_1) = m_2(v'^2_2 - v^2_2).$$

Решая (\*) и (\*\*), получим записанные выражения.

### Частные случаи

#### Шары с одинаковыми массами

$$m_1 = m_2$$

$$v'_1 = v_2; \quad v'_2 = v_1.$$

Шары равной массы «обмениваются» энергией.

#### Второй шар покоится

$$v_2 = 0,$$

$$m_1 \neq m_2$$

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

$$v_2 = 0$$

$$m_1 = m_2$$

Если второй шар до удара висел неподвижно ( $v_2 = 0$ ), то после удара остановится первый шар ( $v'_1 = 0$ ), а второй будет двигаться с той же скоростью и в том же направлении, в котором двигался первый шар до удара ( $v'_2 = v_1$ ).

$$v_2 = 0,$$

$$m_1 > m_2$$

Первый шар продолжает двигаться в том же направлении, как и до удара, но с меньшей скоростью ( $v'_1 < v_1$ ). Скорость второго шара после удара больше, чем скорость первого после удара ( $v'_2 > v'_1$ ).

$$v_2 = 0,$$

$$m_1 < m_2$$

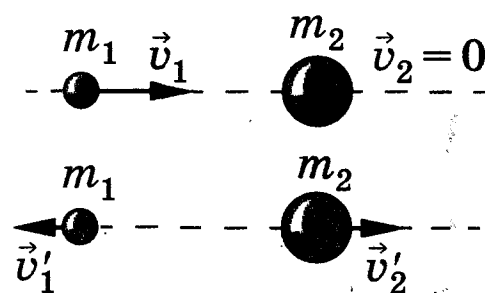
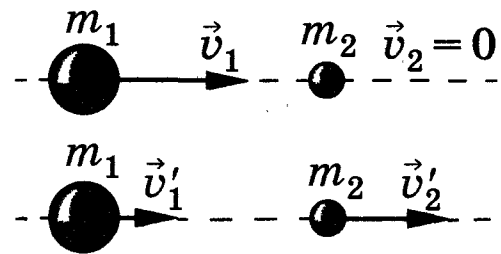
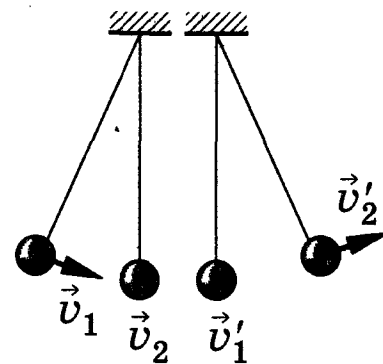
Направление движения первого шара при ударе изменяется — шар отскакивает обратно. Второй шар движется в ту же сторону, в которую двигался первый шар до удара, но с меньшей скоростью, т. е.  $v'_2 < v_1$ .

$$v_2 = 0,$$

$$m_2 \gg m_1$$

**Пример:** столкновение шара со стеной:

$$v'_1 = -v_1, \quad v'_2 \approx \frac{2m_1v_1}{m_2} \approx 0.$$



## 1.48 Центральный абсолютно неупругий удар

### Абсолютно неупругий удар

Столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются, двигаясь дальше как *единое целое*.

**Пример:** шары из пластилина, движущиеся навстречу друг другу.

#### Исходные данные

Сталкиваются шары массами  $m_1$  и  $m_2$ ; скорости шаров до удара —  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ ;  $\vec{v}$  — общая скорость шаров после удара.

#### Общая скорость шаров после удара

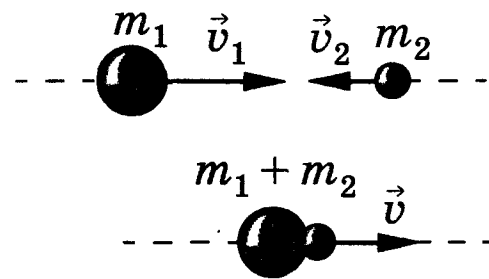
$$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Вычисляется, согласно закону сохранения импульса:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}.$$

## Движение шаров навстречу друг другу

Шары будут продолжать двигаться вместе в ту сторону, в которую двигался шар, обладающий бóльшим импульсом.



## О законе сохранения механической энергии

В процессе центрального абсолютно неупругого удара шаров между ними действуют силы, зависящие не от самих деформаций, а от их скоростей, поэтому эти силы подобны силам трения и закон сохранения механической энергии не соблюдается. Вследствие деформации происходит «потеря» кинетической энергии, перешедшей в тепловую или другие формы энергии.

## Разность кинетических энергий тел до и после абсолютно неупругого удара

$$\Delta T = \left( \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right) - \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2}$$

или

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2$$

Учли выражение для  $v$ .

## Случай $v_2 = 0$ (ударяемое тело первоначально неподвижно)

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2},$$

$$\Delta T = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{m_1 v_1^2}{2}$$

Если  $m_2 \gg m_1$  (масса неподвижного тела очень большая), то  $v \ll v_1$  и почти вся кинетическая энергия при ударе переходит в другие виды энергии. Поэтому для получения значительной деформации наковальня должна быть массивнее молота.

## 1.4. Механика твердого тела

### 1.4.1. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ВРАЩЕНИЯ

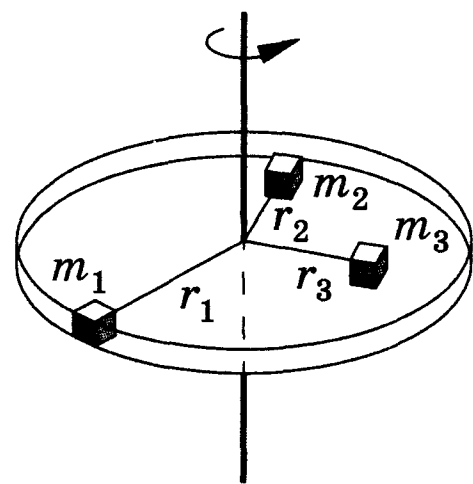
#### 1.49 Определение момента инерции

## Момент инерции тела относительно неподвижной оси

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

Физическая величина, равная сумме произведений элементарных масс на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси. Суммирование производится по всем элементарным массам  $m_i$ , на которые можно разбить тело.

Момент инерции — величина *аддитивная*: момент инерции тела равен сумме моментов инерции его частей.



## Момент инерции тела в случае непрерывного распределения масс

$$J = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV$$

Интегралы берутся по всему объему тела, причем величины  $\rho$  и  $r$  являются функциями точки (например, декартовых координат  $x$ ,  $y$  и  $z$ ).

[ $\rho$  — плотность тела в данной точке;  $dm = \rho dV$  — масса малого элемента тела объемом  $dV$ , отстоящего относительно оси вращения на расстоянии  $r$ ]

## 1.50 Момент инерции сплошного цилиндра. Теорема Штейнера

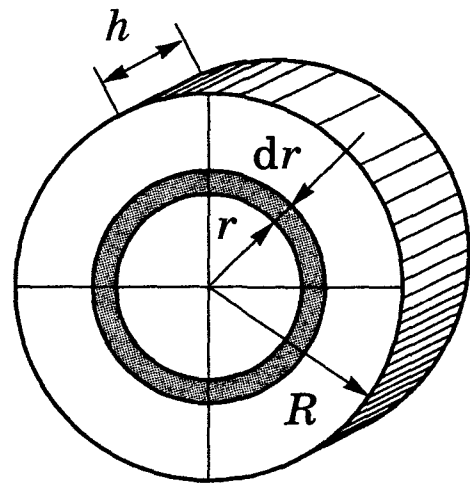
Момент инерции однородного сплошного цилиндра радиуса  $R$  относительно его геометрической оси

$$J = \frac{1}{2} mR^2$$

Разобьем цилиндр на отдельные полые concentric цилиндры бесконечно малой толщины  $dr$  с внутренним радиусом  $r$  и внешним  $r + dr$ . Момент инерции каждого полого цилиндра  $dJ = r^2 dm$  ( $dr \ll r$ ), объем элементарного цилиндра  $2\pi r h dr$ , его масса  $dm = 2\pi r h \rho dr$  и  $dJ = 2\pi h \rho r^3 dr$  ( $\rho$  — плотность материала). Момент инерции сплош-

ного цилиндра  $J = \int dJ = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} \pi h R^4 \rho$ .

Поскольку  $\pi R^2 h$  — объем цилиндра, его масса  $m = \pi R^2 h \rho$ , а  $J = \frac{1}{2} mR^2$ .



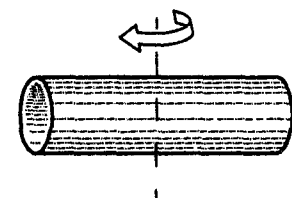
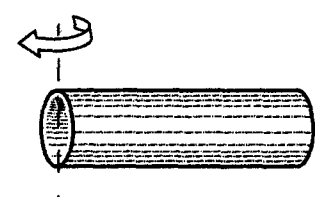
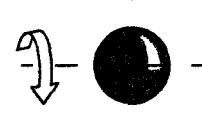


### Теорема Штейнера

$$J = J_C + ma^2$$

Момент инерции тела  $J$  относительно любой оси вращения равен моменту его инерции  $J_C$  относительно параллельной оси, проходящей через центр масс  $C$  тела, сложенному с произведением массы  $m$  тела на квадрат расстояния  $a$  между осями.

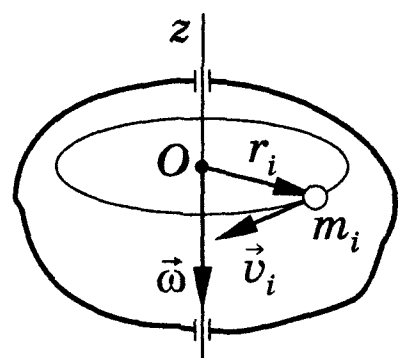
## 1.51 Моменты инерции однородных тел

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр радиуса $R$	Оси симметрии 	$J = mR^2$
Сплошной цилиндр или диск радиуса $R$	Ось симметрии 	$J = \frac{1}{2} mR^2$
Прямой тонкий стержень длиной $l$	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину 	$J = \frac{1}{12} ml^2$
Прямой тонкий стержень длиной $l$	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец 	$J = \frac{1}{3} ml^2$
Шар радиуса $R$	Ось проходит через центр шара 	$J = \frac{2}{5} mR^2$

## 1.52 Кинетическая энергия вращающегося твердого тела

### Исходные данные

Тело вращается вокруг неподвижной оси  $z$ . Мысленно разбиваем это тело на элементарные массы  $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots$ , находящиеся от оси на расстояниях  $r_1, r_2, \dots, r_i, \dots$ . При вращении твердого тела элементарные объемы массами  $m_i$  опишут окружности различных радиусов  $r_i$ .



## Кинетическая энергия $i$ -й элементарной массы

$$T_i = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2}$$

Линейная скорость элементарной массы  $m_i$  равна  $v_i = \omega r_i$  (угловая скорость вращения всех элементарных объемов одинакова).

## Кинетическая энергия вращающегося твердого тела

$$T_{\text{вр}} = \frac{J_z \omega^2}{2}$$

$$T_{\text{вр}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \omega^2}{2} r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \frac{J_z \omega^2}{2}$$

(учли, что  $\omega = \frac{v_i}{r_i} = \text{const}$ );  $J_z$  — момент инерции тела относительно оси  $z$ .

Из сравнения формул  $T = \frac{mv^2}{2}$  и  $T_{\text{вр}} = \frac{J_z \omega^2}{2}$  следует, что *момент инерции — мера инертности тела при вращательном движении.*

## Кинетическая энергия тела при плоском движении

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2}$$

Складывается из энергии поступательного движения со скоростью, равной скорости центра масс, и энергии вращения вокруг оси, проходящей через центр масс тела.

[ $m$  — масса тела;  $v_c$  — скорость центра масс тела;  $J_c$  — момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс;  $\omega$  — угловая скорость тела]

## 1.4.2. МОМЕНТ СИЛЫ. УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

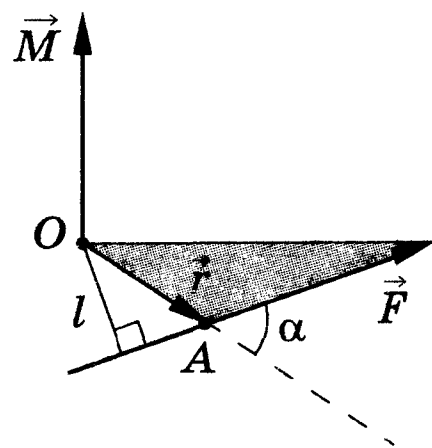
### 1.53 Момент силы

#### Момент силы относительно неподвижной точки $O$

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$$

Физическая величина, определяемая векторным произведением радиуса-вектора  $\vec{r}$ , проведенного из точки  $O$  в точку  $A$  приложения силы, на силу  $\vec{F}$ .

$\vec{M}$  — *псевдовектор*, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от  $\vec{r}$  к  $\vec{F}$ .



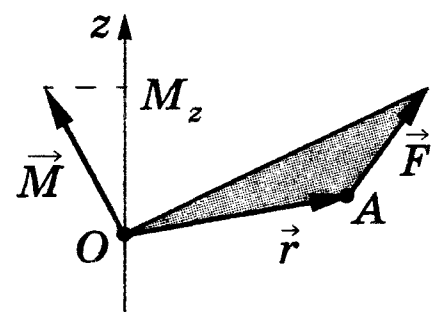
#### Модуль вектора момента силы

$$M_z = Fr \sin \alpha = Fl$$

[ $\alpha$  — угол между  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ ;  $r \sin \alpha = l$  — кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой  $O$  — *плечо силы*]

#### Момент силы относительно неподвижной оси $z$

Скалярная величина  $M_z$ , равная проекции на эту ось вектора  $M$  момента силы, определенного относительно произвольной точки  $O$  данной оси  $z$ . Значение момента  $M_z$  не зависит от выбора положения точки  $O$  на оси  $z$ .



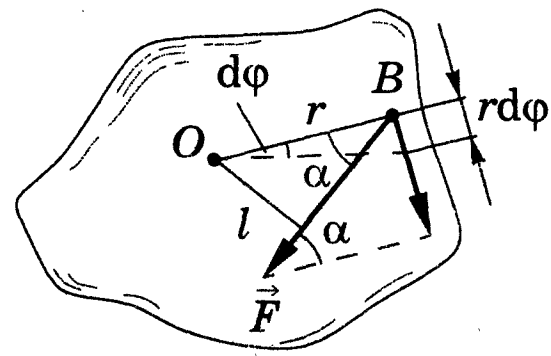
$$\vec{M}_z = [\vec{r}\vec{F}]_z$$

Если ось  $z$  совпадает с направлением вектора  $\vec{M}$ , то момент силы представляется в виде вектора, совпадающего с осью.

## 1.54 Уравнение динамики вращательного движения твердого тела

### Исходные данные для вычисления работы при вращении тела

Сила  $\vec{F}$  приложена к точке  $B$ , находящейся от оси на расстоянии  $r$ ,  $\alpha$  — угол между направлением силы и радиусом-вектором  $\vec{r}$ . Так как тело абсолютно твердое, то работа этой силы равна работе, затраченной на поворот всего тела.



### Работа при вращении тела

$$dA = M_z d\varphi$$

При повороте тела на бесконечно малый угол  $d\varphi$  точка  $B$  силы проходит путь  $r d\varphi$  и работа равна произведению проекции силы на направление смещения на величину смещения:  $dA = F \sin \alpha r d\varphi$ . Учитывая, что  $M_z = Fr \sin \alpha = Fl$  (1.53), получаем  $dA = M_z d\varphi$ .

### Уравнение динамики вращательного движения твердого тела

$$M_z = J_z \varepsilon$$

Момент сил твердого тела относительно оси равен произведению момента инерции относительно той же оси на угловое ускорение.

Работа вращения тела идет на увеличение его кинетической энергии:

$$dA = dT, dA = M_z d\varphi, dT = d\left(\frac{J_z \omega^2}{2}\right) = J_z \omega d\omega. \text{ Тогда } M_z d\varphi = J_z \omega d\omega, \text{ или } M_z \frac{d\varphi}{dt} = J_z \omega \frac{d\omega}{dt}. \text{ Так как } \omega = \frac{d\varphi}{dt}, \text{ то } M_z = J_z \varepsilon.$$

[ $J_z$  — момент инерции тела относительно оси  $z$ ;  $\varepsilon$  — угловое ускорение]

## 1.4.3. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА И ЗАКОН ЕГО СОХРАНЕНИЯ

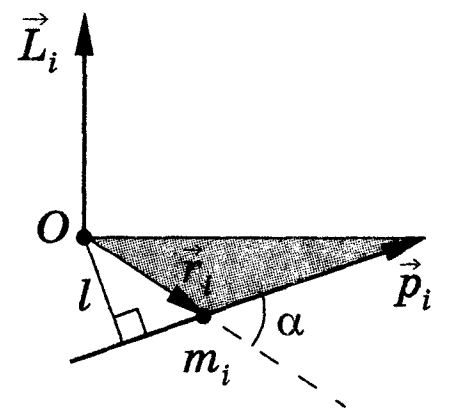
### 1.55 Момент импульса

#### Момент импульса материальной точки относительно неподвижной точки $O$

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i \vec{p}_i] = [\vec{r}_i m_i \vec{v}_i]$$

Физическая величина, определяемая векторным произведением радиуса-вектора  $\vec{r}_i$  материальной точки, проведенного из точки  $O$ , на импульс  $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$  этой материальной точки.

$\vec{L}_i$  — псевдовектор, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от  $\vec{r}_i$  к  $\vec{p}_i$ .



#### Модуль вектора момента импульса

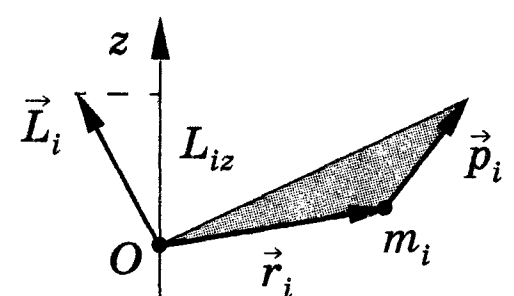
$$L_i = r_i p_i \sin \alpha = m_i v_i r_i \sin \alpha = p_i l$$

[ $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{r}_i$  и  $\vec{p}_i$ ;  $l = r_i \sin \alpha$  — плечо импульса. Перпендикуляр опущен из точки  $O$  на прямую, вдоль которой направлен импульс частицы]

#### Момент импульса материальной точки относительно неподвижной оси $z$

Скалярная величина  $L_{iz}$ , равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определенного относительно произвольной точки  $O$  данной оси  $z$ .

Значение момента импульса  $L_{iz}$  не зависит от положения точки  $O$  на оси  $z$ .





## Момент импульса отдельной точки вращающегося абсолютно твердого тела

$$L_{iz} = m_i v_i r_i$$

При вращении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси  $z$  каждая отдельная точка тела движется по окружности постоянного радиуса  $r_i$  с некоторой скоростью  $\vec{v}_i$ . Скорость  $\vec{v}_i$  и импульс  $m_i \vec{v}_i$  перпендикулярны этому радиусу, т. е. радиус — плечо вектора  $m_i \vec{v}_i$ . Тогда момент импульса отдельной частицы  $L_{iz} = m_i v_i r_i$  и направлен по оси в сторону, определяемую правилом правого винта.

## Момент импульса абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси $z$

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i v_i r_i$$

Сумма моментов импульса отдельных его частиц относительно той же оси.

$$L_z = J_z \omega$$

Равен произведению момента инерции тела относительно той же оси на угловую скорость.

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i v_i r_i = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = J_z \omega \text{ (учли, что } v_i = \omega r_i \text{).}$$

[ $J_z$  — момент инерции тела относительно оси  $z$ ;  $\omega$  — угловая скорость]

## 1.56 Закон сохранения момента импульса

### Еще одна форма записи

### уравнения динамики вращательного движения твердого тела

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z$$

Производная момента импульса твердого тела относительно оси равна моменту силы относительно той же оси.

Продифференцировав  $L_z = J_z \omega$  по времени, получим записанное выражение:  $\frac{dL_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon = M_z$ .

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Производная вектора момента импульса твердого тела равна моменту (сумме моментов) внешних сил.

### Закон сохранения момента импульса

$$\vec{L} = \text{const}$$

Момент импульса замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени.

В замкнутой системе момент внешних сил  $\vec{M} = 0$  и  $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ , откуда  $\vec{L} = \text{const}$ .

◆ Закон сохранения момента импульса — фундаментальный закон природы.

### Закон сохранения момента импульса — следствие изотропности пространства

**Изотропность пространства** — инвариантность физических законов относительно выбора направления осей координат системы отсчета (относительно поворота замкнутой системы в пространстве на любой угол).

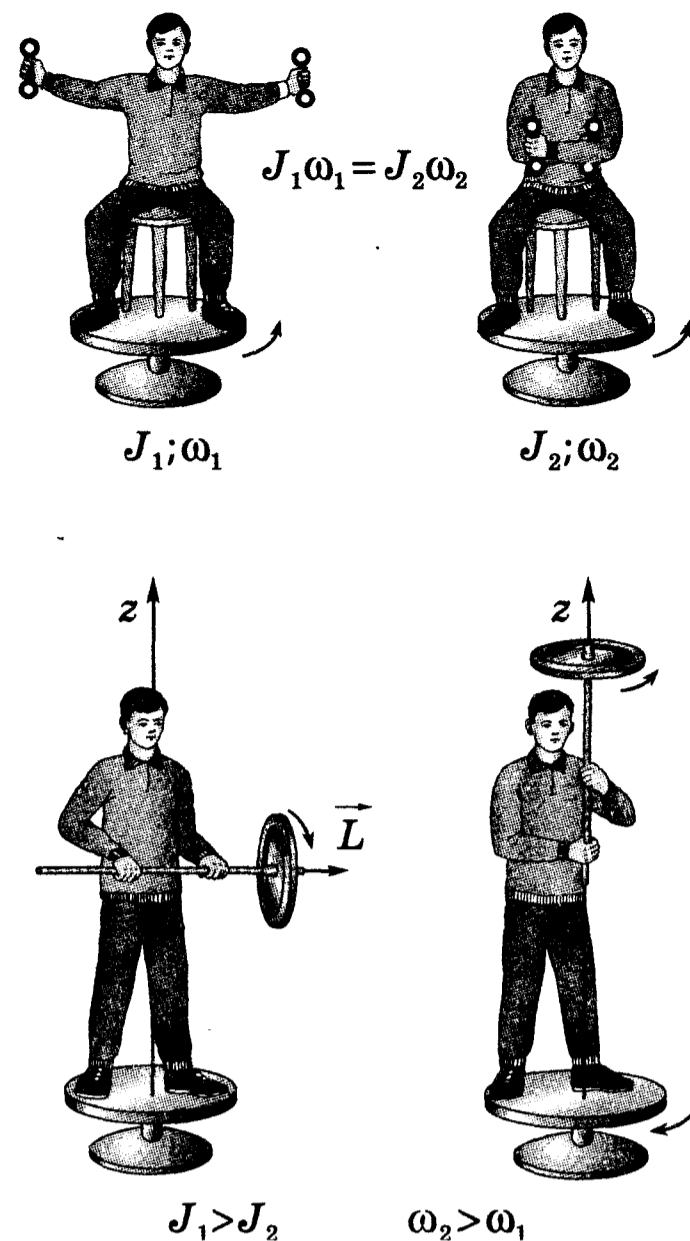
### Некоторые демонстрации закона сохранения момента импульса

Человек, сидящий на скамье Жуковского (она с малым трением вращается вокруг вертикальной оси) и держащий в вытянутых руках гантели, приведен во вращение с угловой скоростью  $\omega_1$ . Если человек прижмет гантели к себе, то момент инерции системы уменьшится. Поскольку момент

внешних сил равен нулю, момент импульса системы сохраняется ( $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$ ) и угловая скорость вращения  $\omega_2$  возрастает.

Человек, стоящий на скамье Жуковского (она с малым трением вращается вокруг вертикальной оси), держит в руках колесо, вращающееся вокруг горизонтальной оси. Начальный момент импульса  $L_z = 0$ . Если поднять вращающееся колесо (правый рисунок), то  $L_z$  остается равным нулю (поворот колеса осуществляется за счет внутренних сил) и скамья начнет вращаться в направлении, противоположном направлению вращения колеса с угловой скоростью  $\omega_2$ , удовлетворяющей равенству  $L_z = J_1\omega_1 - J_2\omega_2 = 0$  ( $J_1$  — момент инерции колеса;  $\omega_1$  — угловая скорость колеса;  $J_2$  — момент инерции системы «человек + скамья»).

Гимнаст во время прыжка через голову поджимает к туловищу руки и ноги, чтобы уменьшить свой момент инерции и увеличить тем самым угловую скорость вращения.



### 1.57 Аналогия в описании поступательного и вращательного движений

Поступательное движение		Вращательное движение	
Масса	$m$	Момент инерции	$J$
Скорость	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	Угловая скорость	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}$
Ускорение	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	Угловое ускорение	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
Сила	$\vec{F}$	Момент силы	$M_z$ или $\vec{M}$
Импульс	$\vec{p} = m\vec{v}$	Момент импульса	$L_z = J_z\omega$
Основное уравнение динамики	$\vec{F} = m\vec{a}$ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	Основное уравнение динамики	$M_z = J_z\varepsilon$ $\vec{M} = \frac{dL}{dt}$
Работа	$dA = F_s ds$	Работа	$dA = M_z d\phi$
Кинетическая энергия	$\frac{mv^2}{2}$	Кинетическая энергия	$\frac{J_z\omega^2}{2}$

### 1.4.4. ДЕФОРМАЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

#### 1.58 Виды деформаций

##### Деформация

Изменение формы и размеров твердых тел под действием внешних сил.

##### Упругая деформация

Деформация, исчезающая с прекращением действия внешних сил.

## Пластическая (остаточная) деформация

Деформации, сохраняющиеся в теле после прекращения действия внешних сил.

Деформации реального тела всегда пластические, так как они после прекращения действия внешних сил никогда полностью не исчезают. Однако если остаточные деформации малы, то ими можно пренебречь.

## Относительная деформация

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x}$$

Количественная мера, характеризующая степень деформации и определяемая отношением абсолютной деформации  $\Delta x$  к величине  $x$  (характеризует первоначальные размеры и форму тела).

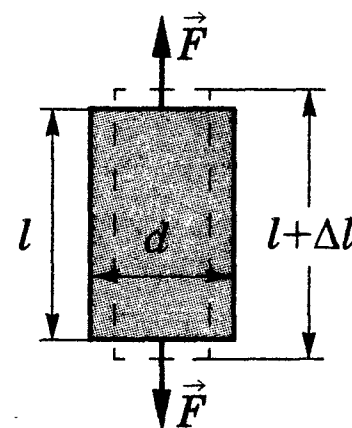
## Относительная продольная деформация

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Относительное изменение длины стержня.

К концам стержня длиной  $l$  приложены направленные вдоль его оси равные силы  $F$ , в результате чего длина стержня изменяется на величину  $\Delta l$ .

При растяжении  $\Delta l$  положительно, а при сжатии отрицательно.



## Относительное поперечное растяжение (сжатие)

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d}$$

Относительное изменение диаметра стержня.

$\varepsilon$  и  $\varepsilon'$  всегда имеют разные знаки (при растяжении  $\Delta l$  положительно, а  $\Delta d$  отрицательно, при сжатии  $\Delta l$  отрицательно, а  $\Delta d$  положительно).

## 1.59 Закон Гука.

### Потенциальная энергия упруго растянутого стержня

## Напряжение

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

Сила, действующая на единицу площади поперечного сечения тела.

Если сила направлена по нормали к поверхности, то напряжение называется *нормальным* если же по касательной к поверхности; — *тангенциальным*.

## Опытный факт, установленный Гуком

$$\sigma = E \varepsilon$$

Для малых деформаций относительное удлинение  $\varepsilon$  и напряжение  $\sigma$  прямо пропорциональны друг другу.

## Модуль Юнга

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Определяется напряжением, вызывающим относительное удлинение, равное единице.

## Закон Гука

$$F = k \Delta l$$

Абсолютное удлинение ( $\Delta l$ ) тела при упругой деформации пропорционально действующей на тело силе.

Записав  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{ES}$ , получим  $F = \frac{ES}{l} \Delta l = k \Delta l$  ( $k$  — коэффициент пропорциональности).

◆ Закон Гука выполняется только для *упругих деформаций*.

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{ES}{l} (\Delta l)^2$$

Равна работе, совершаемой внешними силами при деформации;

$$\Pi = A = \int_0^{\Delta l} F dx.$$

Если  $x$  — абсолютное удлинение стержня, изменяющееся в процессе деформации от 0 до  $\Delta l$ , то, согласно закону Гука,  $F = kx = \frac{ESx}{l}$ . Тогда

$$\Pi = \int_0^{\Delta l} \frac{ES}{l} x dx = \frac{1}{2} \frac{ES}{l} (\Delta l)^2 \text{ пропорциональна квадрату деформации } (\Delta l)^2.$$

◆ В теории упругости доказывается, что все виды деформаций (растяжение или сжатие, сдвиг, изгиб, кручение) могут быть сведены к одновременно происходящим деформациям растяжения или сжатия и сдвига.

## 1.60 Упругие свойства реальных тел

### Деформации и реальные тела

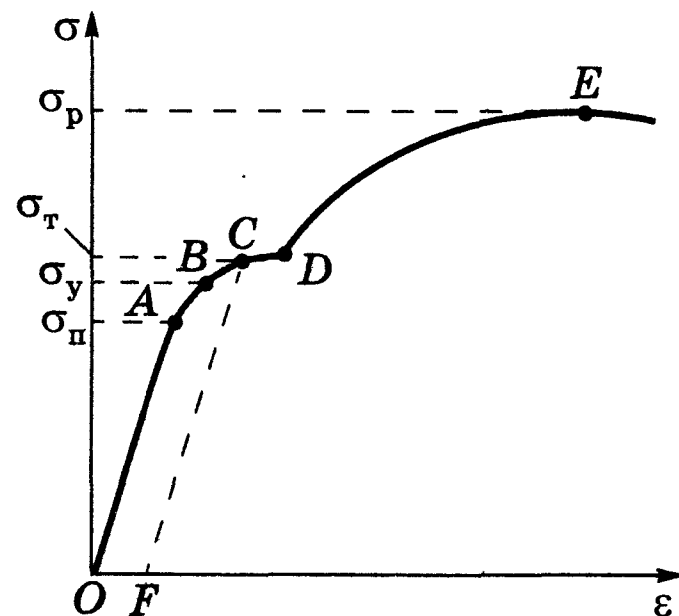
Реальные тела можно считать упругими лишь при очень малых деформациях. Если же деформации превышают некоторую предельную величину (она для разных тел разная), то свойства тел оказываются очень отличными от свойств упругих тел.

### Диаграмма напряжений

График зависимости напряжения  $\sigma$  от относительной деформации  $\varepsilon$ .

#### Анализ диаграммы напряжений (качественная зависимость для металлического образца)

Линейная зависимость  $\sigma(\varepsilon)$ , установленная Гуком, выполняется лишь в очень узких пределах до **предела пропорциональности** ( $\sigma_{\Pi}$ ). При дальнейшем увеличении напряжения деформация еще упругая (хотя зависимость  $\sigma(\varepsilon)$  — уже нелинейна) и до **предела упругости** ( $\sigma_y$ ) остаточные деформации не возникают. За пределом упругости в теле возникают остаточные деформации и график, описывающий возвращение тела в первоначальное состояние после прекращения действия силы, изобразится на кривой  $BO$ , а параллельной ей —  $CF$ . Напряжение, при котором проявляется заметная остаточная деформация ( $\approx 0,2\%$ ), называется **пределом текучести** ( $\sigma_T$ ) — точка  $C$  на кривой. В области  $CD$  деформация возрастает без увеличения напряжения, т. е. тело как бы «течет». Эта область называется **областью текучести** (или **областью пластических деформаций**). Материалы, для которых область текучести значительна, называются **вязкими**; для которых же она практически отсутствует, — **хрупкими**. При дальнейшем растяжении (за точку  $D$ ) происходит разрушение тела. Максимальное напряжение, возникающее в теле до разрушения, называется **пределом прочности** ( $\sigma_p$ ).



◆ Диаграмма напряжений для реальных твердых тел зависит от различных факторов. Одно и то же твердое тело может при кратковременном действии сил проявлять себя как хрупкое, а при длительных, но слабых силах является текучим.

## 1.5. Тяготение. Элементы теории поля

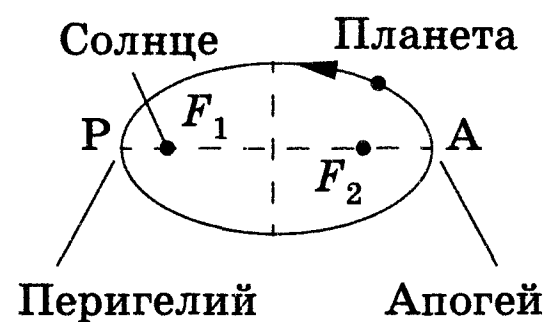
### 1.5.1. ЗАКОНЫ КЕПЛЕРА. ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

#### 1.61 Три закона Кеплера

##### Первый закон Кеплера

Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

Отметим тщательный анализ показал, что в одном из фокусов находится не центр Солнца, а центр масс системы Солнце — планета.



##### Перигелий

Ближайшая к Солнцу точка орбиты небесного тела, вращающегося вокруг него.

Расстояние в перигелии между центрами Земли и Солнца составляет  $1,47 \cdot 10^8$  км.

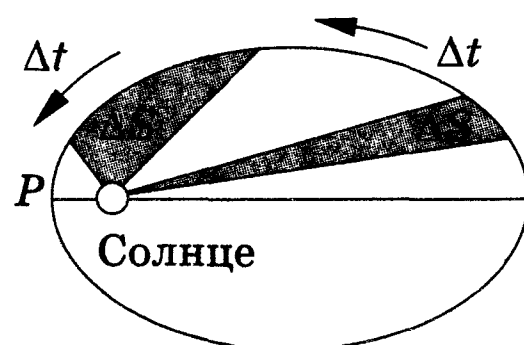
##### Афелий

Наиболее удаленная от Солнца точка орбиты небесного тела, вращающегося вокруг него.

##### Второй закон Кеплера

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \text{const}$$

Если начало координат расположено в центре масс Солнца, то радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает одинаковые площади.

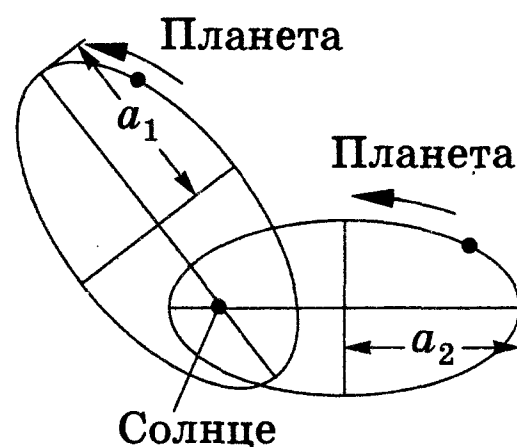


##### Третий закон Кеплера

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит.

Третий закон Кеплера в применении к планетам и спутникам позволяет, в частности, подсчитать массы планет.



#### 1.62 Закон всемирного тяготения

##### Формулировка закона всемирного тяготения

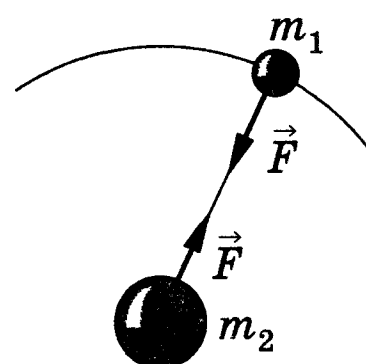
$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Между любыми двумя телами (материальными точками) действует сила взаимного притяжения, прямо пропорциональная произведению масс этих тел ( $m_1$  и  $m_2$ ) и обратно пропорциональная квадрату расстояния ( $r$ ) между ними.

[ $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  Н · м<sup>2</sup>/кг<sup>2</sup> — гравитационная постоянная;  $F$  — сила тяготения]

◆ Силы тяготения всегда являются силами притяжения и направлены вдоль прямой, проходящей через центры масс взаимодействующих тел.

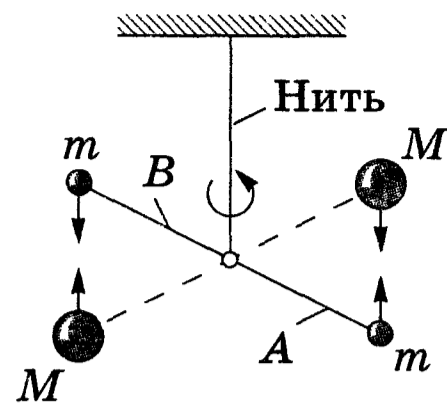
Закон всемирного тяготения открыт Ньютоном при изучении движения небесных тел на основе законов Кеплера и основных законов динамики.



## 1.63 Определение гравитационной постоянной

### Принципиальная схема опыта Кавендиша с применением крутильных весов

Легкое коромысло  $A$  с двумя одинаковыми шариками массой  $m = 729$  г подвешено на упругой нити. На коромысле  $B$  укреплены на той же высоте массивные шары массой  $M = 158$  кг. Поворачивая коромысло  $B$  вокруг вертикальной оси, можно изменять расстояние между шарами с массами  $m$  и  $M$ . Под действием пары сил, приложенных к шарам  $m$  со стороны шаров  $M$ , коромысло  $A$  поворачивается в горизонтальной плоскости, закручивая нить до тех пор, пока момент сил упругости не уравновесит момент сил тяготения. Зная упругие свойства нити, по измеренному углу поворота можно найти возникающие силы притяжения, а так как массы шаров известны, то и вычислить значение  $G$ .



◆ Согласно закону всемирного тяготения 1.62 и вычисленному значению  $G$  ( $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$ ), два точечных тела массой по 1 кг каждое, находящиеся на расстоянии 1 м друг от друга, притягиваются с силой  $6,67 \cdot 10^{-11}$  Н. Это означает, что сила гравитационного взаимодействия значительна только в случае больших масс.

## 1.5.2. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ. СИЛА ТЯЖЕСТИ И ВЕС

### 1.64 Поле тяготения. Ускорение свободного падения

#### Гравитационное поле (поле тяготения)

Поле, посредством которого осуществляется гравитационное взаимодействие между телами. Это поле порождается телами и является формой существования материи.

Тяготение принадлежит к особой группе взаимодействий. Силы тяготения, например, не зависят от того, в какой среде взаимодействующие тела находятся. Тяготение существует и в вакууме.

#### Обобщенный закон Галилея

Все тела в одном и том же поле тяготения падают с одинаковым ускорением (ускорением свободного падения).

#### Ускорение свободного падения

Согласно обобщенному закону Галилея, в данном месте Земли ускорение свободного падения одинаково для всех тел. Оно изменяется вблизи поверхности Земли с широтой в пределах от  $9,780 \text{ м/с}^2$  на экваторе до  $9,832 \text{ м/с}^2$  на полюсах. Это обусловлено суточным вращением Земли вокруг своей оси, с одной стороны, и сплюснутостью Земли — с другой (экваториальный и полярный радиусы Земли равны соответственно  $6378 \text{ км}$  и  $6357 \text{ км}$ ). При решении практических задач принимается, что  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ .

### 1.65 Сила тяжести и вес. Невесомость

#### Сила тяжести

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

Сила, действующая на любое тело, находящееся вблизи земной поверхности, и направленная вертикально вниз.

[ $m$  — масса тела;  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$  — ускорение свободного падения]



## Связь между силой тяжести и силой тяготения

$$mg = \frac{GmM}{R^2}$$

Эта формула справедлива при пренебрежении *суточным вращением Земли* и высотой расположения тела над Землей ( $h \ll R$ ).

[ $m$  — масса тела;  $M$  — масса Земли;  $R$  — радиус Земли;  $G$  — гравитационная постоянная]

### Вес тела

Сила, с которой тело вследствие тяготения к Земле действует на опору (или подвес), удерживающую тело от свободного падения.

### О проявлении силы тяжести и веса тела

Сила тяжести действует всегда, а вес проявляется только в том случае, когда на тело кроме силы тяжести действуют еще другие силы, вследствие чего тело движется с ускорением  $\vec{a}$ , отличным от  $\vec{g}$ .

Если тело движется в поле тяготения Земли с ускорением  $\vec{a} \neq \vec{g}$ , то к этому телу приложена дополнительная сила  $\vec{N}$ , удовлетворяющая условию  $\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$ . Тогда вес тела  $\vec{P}' = -\vec{N} = m\vec{g} - m\vec{a} = m(\vec{g} - \vec{a})$ , т. е. если тело покоится или вертикальная составляющая скорости  $\vec{v}_y = \text{const}$ , то  $\vec{a} = 0$  и  $\vec{P} = m\vec{g}$ .

### Невесомость

Состояние тела, при котором оно движется только под действием силы тяжести.

Если тело свободно движется в поле тяготения по любой траектории и в любом направлении, то  $\vec{a} = \vec{g}$  и вес равен нулю, т. е. тело будет невесомым.

**Пример:** невесомыми являются тела в космических кораблях, свободно движущихся в космосе.

## 1.5.3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ. КОСМИЧЕСКИЕ СКОРОСТИ

### 1.66 Напряженность гравитационного поля

#### Напряженность гравитационного поля

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Физическая величина, определяемая силой, действующей со стороны поля на материальную точку единичной массы, совпадает по направлению с действующей силой.

Напряженность гравитационного поля — силовая векторная характеристика.

#### Единица напряженности гравитационного поля

$$1 \text{ Н/кг} = 1 \text{ м/с}^2$$

1 ньютон на килограмм (Н/кг) — напряженность такого гравитационного поля, которое на тело массой 1 кг действует с силой 1 Н.

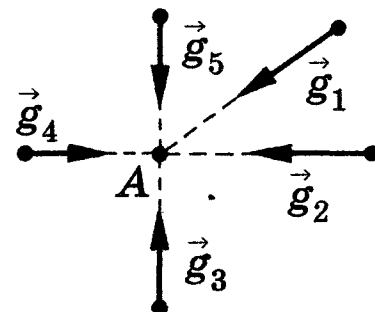
Размерность  $\vec{g}$  совпадает с размерностью ускорения.

#### Однородное поле тяготения

Поле, для которого вектор напряженности во всех точках поля одинаков (по модулю и направлению).

#### Центральное поле тяготения

Поле, во всех точках которого векторы напряженности направлены вдоль прямых, которые пересекаются в одной точке (А), неподвижной по отношению к какой-либо инерциальной системе отсчета (см. рисунок).



## Линии напряженности поля тяготения (силовые линии)

Линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора напряженности  $\vec{g}$ .

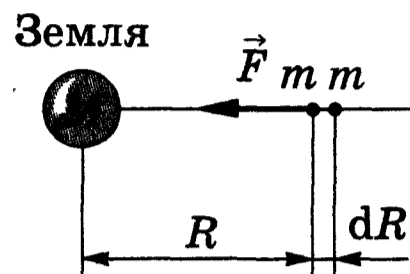
Линиям напряженности приписывается направление, совпадающее с направлением вектора напряженности.

### 1.67 Работа в гравитационном поле

Работа по перемещению тела массой  $m$  в поле тяготения на расстояние  $dR$

$$dA = -G \frac{mM}{R^2} dR$$

Знак минус появляется потому, что сила ( $F = G \frac{mM}{R^2}$ ) и перемещение противоположны по направлению.



Работа при перемещении с расстояния  $R_1$  до  $R_2$

$$A = m \left( \frac{GM}{R_2} - \frac{GM}{R_1} \right)$$

$$A = \int_{R_1}^{R_2} dA = - \int_{R_1}^{R_2} G \frac{mM}{R^2} dR = m \left( \frac{GM}{R_2} - \frac{GM}{R_1} \right).$$

[ $M$  — масса Земли]

**Вывод.** Затраченная работа в гравитационном поле не зависит от траектории перемещения, а определяется лишь начальным и конечным положениями тела, т. е. силы тяготения консервативны, а поле тяготения является потенциальным 1.38.

### 1.68 Потенциал гравитационного поля

Потенциальная энергия тела массой  $m$  в гравитационном поле

$$\Pi = -G \frac{mM}{R}$$

Работа, совершаемая консервативными силами, равна изменению потенциальной энергии системы, взятому со знаком минус 1.39:  $A = -\Delta\Pi = -(\Pi_2 - \Pi_1) = \Pi_1 - \Pi_2$ . Тогда, учитывая выражение для  $A$  1.37, имеем  $\Pi_1 - \Pi_2 = -m(GM/R_1 - GM/R_2)$ . При  $R_2 \rightarrow \infty$  потенциальная энергия  $\Pi_2 \rightarrow 0$ . Первая точка выбрана произвольно, получаем записанное выражение.

[ $G$  — гравитационная постоянная;  $M$  — масса Земли;  $R$  — радиус Земли]

Потенциал гравитационного поля

$$\varphi = \frac{\Pi}{m}$$

Физическая величина, определяемая потенциальной энергией тела единичной массы в данной точке поля или работой по перемещению единичной массы из данной точки поля в бесконечность.

*Потенциал гравитационного поля — энергетическая скалярная характеристика.*

Единица потенциала гравитационного поля

$$1 \text{ Дж/кг}$$

1 джоуль на килограмм (Дж/кг) — потенциал такой точки гравитационного поля, в которой тело массой 1 кг обладает потенциальной энергией 1 Дж.

Потенциал поля тяготения, создаваемого телом массой  $M$

$$\varphi = -\frac{GM}{R}$$

[ $G$  — гравитационная постоянная;  $R$  — расстояние от этого тела до рассматриваемой точки]

## Потенциальная энергия тела на высоте $h$ относительно Земли

$$\Pi = mgh$$

Исходя из представлений теории тяготения,

$$\Pi = -\frac{GmM}{R_0 + h} - \left(-\frac{GmM}{R_0}\right) = \frac{GmMh}{R_0(R_0 + h)},$$

так как  $P = \frac{GmM}{R_0^2}$  и  $g = \frac{P}{m} = \frac{GM}{R_0^2}$ , то, учитывая условие  $h \ll R_0$ , получаем

$$\Pi = mGMh/R_0^2 = mgh \quad 1.40.$$

[ $R_0$  — радиус Земли]

## 1.69 Напряженность как градиент потенциала

### Связь между напряженностью и потенциалом гравитационного поля

$$\vec{g} = -\text{grad } \varphi$$

При перемещении тела массой  $m$  в поле тяготения Земли на расстояние  $dR$  совершается работа

$$dA = -G\frac{mM}{R^2} dR \quad \text{и} \quad \varphi = -\frac{GM}{R} \quad 1.68. \quad \text{Тогда} \quad dA = -m d\varphi. \quad \text{Учитывая, что} \quad dA = \\ = F dl = mg dl, \quad \text{получаем} \quad mg dl = -m d\varphi \quad \text{или} \quad g = -\frac{d\varphi}{dl}. \quad \text{Величина} \quad \frac{d\varphi}{dl}$$

характеризует изменение потенциала на единицу длины в направлении перемещения в поле тяготения.

$$\vec{g} = -\text{grad } \varphi.$$

Знак минус указывает, что вектор напряженности  $\vec{g}$  направлен в сторону убывания потенциала

$$[\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \quad \text{— градиент скаляра } \varphi]$$

### Эквипотенциальные поверхности

Поверхности, во всех точках которых потенциал  $\varphi$  гравитационного поля имеет одно и то же значение.

**Предназначение:** для графического изображения распределения потенциала.

## 1.70 Космические скорости

### Космические скорости

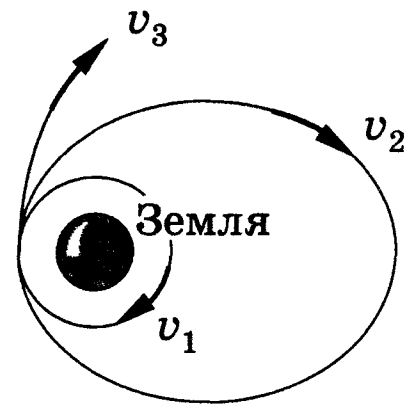
Скорости для достижения определенных космических орбит.

#### Первая космическая скорость

$$v_1 = \sqrt{gR_0} \\ (v_1 = 7,9 \text{ км/с})$$

Минимальная скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло двигаться вокруг Земли по круговой орбите, т. е. превратиться в искусственный спутник Земли.

На спутник, движущийся по круговой орбите радиусом  $r$ , действует сила тяготения Земли, сообщаящая ему нормальное ускорение  $v_1^2/r$ . По второму закону Ньютона  $GmM/r^2 = mv_1^2/r$ . Если спутник движется вблизи поверхности Земли, в этом случае  $r \approx R_0$  (радиус Земли) и  $g = GM/R_0^2$  1.68, то у поверхности Земли  $v_1 = \sqrt{gR_0} = 7,9 \text{ км/с}$ .



#### Вторая космическая скорость

$$v_2 = \sqrt{2gR_0} \\ (v_2 = 11,2 \text{ км/с})$$

Наименьшая скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло преодолеть притяжение Земли и превратиться в спутник Солнца, т. е. чтобы его орбита в поле тяготения Земли стала параболической.

Чтобы тело (при отсутствии сопротивления среды) могло преодолеть земное притяжение и уйти в космическое пространство, его кинетическая энергия должна быть равна работе, совершаемой против сил тяготения:

$$\frac{mv_2^2}{2} = \int_{R_0}^{\infty} G \frac{mM}{r^2} dr = \frac{GmM}{R_0},$$

откуда  $v_2 = \sqrt{2gR_0} = 11,2$  км/с.

### Третья космическая скорость

$$v_3 = 16,7 \text{ км/с}$$

Скорость, которую необходимо сообщить телу на Земле, чтобы оно покинуло пределы Солнечной системы, преодолев притяжение Солнца.

[ $g$  — ускорение свободного падения;  $R_0$  — радиус Земли;  $G$  — гравитационная постоянная;  $m$  — масса тела;  $M$  — масса Земли]

## 1.6. Элементы механики жидкостей

### 1.6.1. ДАВЛЕНИЕ В ЖИДКОСТИ И ГАЗЕ. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

#### 1.71 Описание жидкостей и газов

##### Отличительные особенности жидкостей и газов

Молекулы газа, совершая беспорядочное, хаотическое движение, не связаны или весьма слабо связаны силами взаимодействия, поэтому они движутся свободно и в результате соударений стремятся разлететься во все стороны, заполняя весь предоставленный им объем, т. е. объем газа определяется объемом того сосуда, который газ занимает.

Жидкость же, имея определенный объем, принимает форму того сосуда, в который она заключена. Но в жидкостях в отличие от газов среднее расстояние между молекулами остается практически постоянным, поэтому жидкость обладает практически неизменным объемом.

##### Единый подход к изучению жидкостей и газов

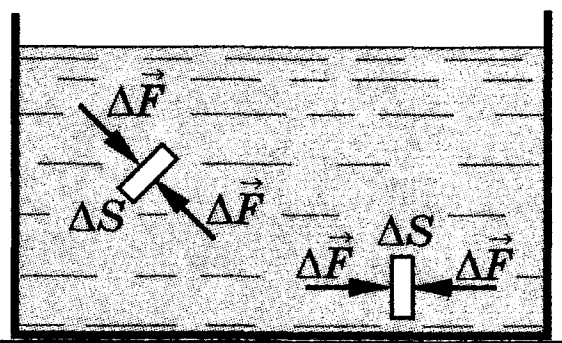
В ряде механических явлений поведение жидкостей и газов *определяется одинаковыми параметрами и идентичными уравнениями*. Поэтому пользуются единым термином «жидкость».

##### Несжимаемая жидкость

Жидкость или газ, зависимость плотностей которых от давления в данной задаче можно пренебречь.

##### Давление в жидкости

Если в покоящуюся жидкость поместить тонкую пластинку, то части жидкости, находящиеся по разные стороны от нее, будут действовать на каждый ее элемент  $\Delta S$  с силами  $\Delta \vec{F}$ , которые независимо от того, как пластинка ориентирована, будут равны по модулю и направлены перпендикулярно площадке  $\Delta S$ , так как наличие касательных сил привело бы частицы жидкости в движение.



$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S}$$

Физическая величина, определяемая силой, действующей со стороны жидкости на единицу площади поверхности в перпендикулярном к поверхности направлении.

##### Единица давления

$$1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$$

1 паскаль равен давлению, создаваемому силой 1 Н, равномерно распределенной по нормальной к ней поверхности площадью 1 м<sup>2</sup>.

## 1.72 Законы Паскаля и Архимеда. Гидростатическое давление

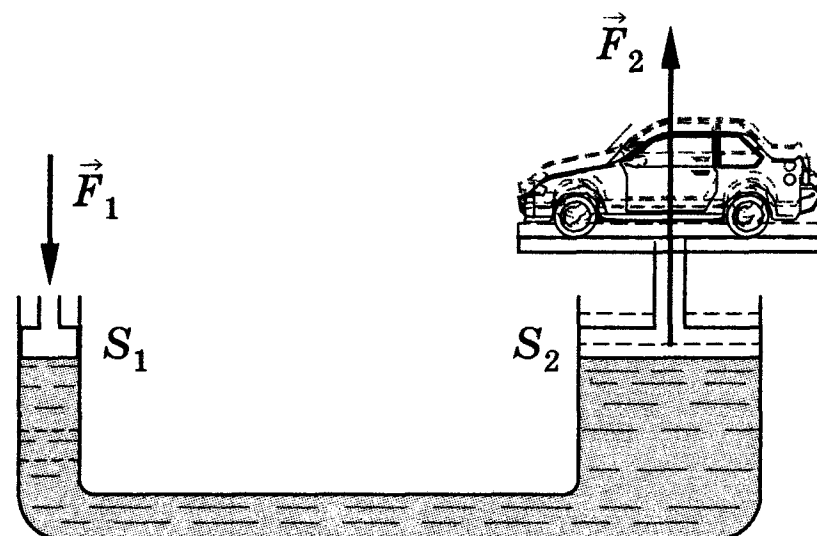
### Закон Паскаля

Давление в любом месте покоящейся жидкости одинаково по всем направлениям, причем давление одинаково передается по всему объему, занятому покоящейся жидкостью.

#### Применение закона Паскаля (гидравлический подъемник)

**Пример:** в данном случае небольшая сила  $\vec{F}_1$  преобразуется в значительную силу  $\vec{F}_2$  благодаря тому, что площадь второго поршня  $S_2$  больше площади первого поршня  $S_1$ .  $p_1 = p_2$ , т. е.  $\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$ , откуда

$$F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1.$$



### Закон Архимеда

$$F_A = \rho g V$$

На тело, погруженное в жидкость (газ), действует со стороны этой жидкости направленная вверх выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости (газа).

[ $\rho$  — плотность жидкости;  $V$  — объем погруженной в жидкость части тела]

### Гидростатическое давление

$$p = \rho g h$$

При равновесии жидкости давление по горизонтали всегда одинаково, иначе не было бы равновесия. Поэтому свободная поверхность покоящейся жидкости всегда горизонтальна вдали от стенок сосуда. Если жидкость несжимаема, то ее плотность не зависит от давления. Тогда при поперечном сечении  $S$  столба жидкости, его высоте  $h$  и плотности  $\rho$  вес  $P = \rho g S h$ , а давление на нижнее основание  $p = \frac{P}{S} = \frac{\rho g S h}{S} = \rho g h$ , т. е. давление изменяется линейно с высотой.

## 1.73 Уравнение неразрывности

**Течение**

Движение жидкости.

**Поток**

Совокупность частиц в движущейся жидкости.

**Линии тока**

Линия, в каждой точке которой касательная к ней совпадает по направлению с вектором скорости в данный момент времени.

**Предназначение:** для графического изображения движения жидкости.

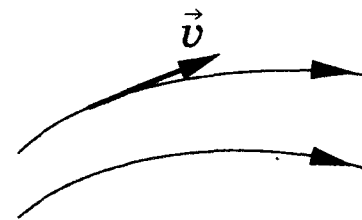
Линии тока проводятся так, чтобы густота их, характеризуемая отношением числа линий к площади перпендикулярной им площадки, через которую они проходят, была больше там, где больше скорость течения жидкости, и меньше там, где жидкость течет медленнее. По картине линий тока можно судить о направлении и модуле скорости в разных точках пространства, т. е. можно определить состояние движения жидкости.

**Трубка тока**

Часть жидкости, ограниченная линиями тока.

**Установившееся стационарное течение**

Течение жидкости, при котором форма и расположение линий тока, а также значения скоростей в каждой ее точке со временем не изменяются.



## Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

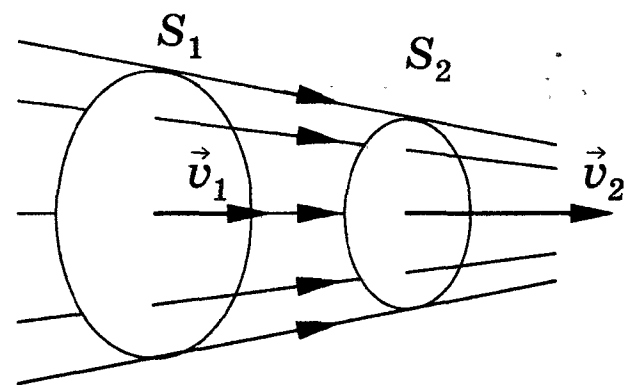
$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

или

$$Sv = \text{const}$$

Произведение скорости течения несжимаемой жидкости на поперечное сечение трубки тока есть величина постоянная для данной трубки тока.

**Доказательство.** Рассмотрим трубку тока, выбрав два сечения  $S_1$  и  $S_2$ , перпендикулярные направлению скорости. За время  $\Delta t$  через сечение  $S$  проходит объем жидкости  $Sv\Delta t$ ; следовательно, за 1 с через  $S_1$  пройдет объем жидкости  $S_1 v_1$ , через  $S_2$  — объем жидкости  $S_2 v_2$  ( $v_1$  и  $v_2$  — соответственно скорости течения жидкости в местах сечений  $S_1$  и  $S_2$ ).



Если жидкость несжимаема ( $\rho = \text{const}$ ), то через сечение  $S_2$  пройдет такой же объем жидкости, как и через сечение  $S_1$ , т. е.  $S_1 v_1 = S_2 v_2 = \text{const}$ .

## 1.6.2. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

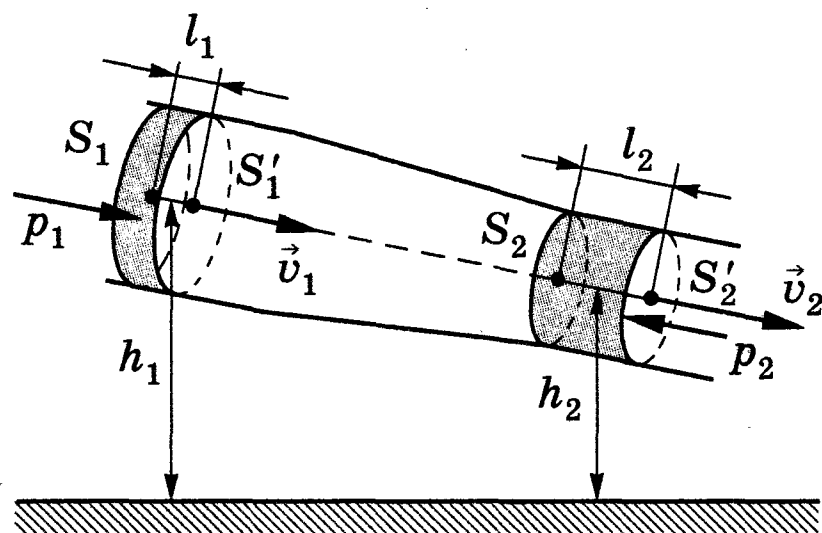
### 1.74 Вывод уравнения Бернулли

#### Идеальная жидкость

Воображаемая жидкость, в которой отсутствуют силы внутреннего трения (физическая абстракция).

#### Исходные данные

В стационарно текущей идеальной жидкости выбираем трубку тока, ограниченную сечениями  $S_1$  и  $S_2$ . В месте сечения  $S_1$  скорость течения  $v_1$ , давление  $p_1$  и высота, на которой это сечение расположено,  $h_1$ . В месте сечения  $S_2$  скорость течения  $v_2$ , давление  $p_2$  и высота сечения  $h_2$ . За малый промежуток времени  $\Delta t$  жидкость перемещается от сечения  $S_1$  к сечению  $S'_1$ , от  $S_2$  к  $S'_2$ .



#### Полные энергии жидкости в местах сечений $S_1$ и $S_2$

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1,$$

$$E_2 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2$$

Полные энергии складываются из кинетической энергии и потенциальной энергии в поле сил земного тяготения.

[ $m$  — масса жидкости]

#### Согласно закону сохранения энергии

$$E_2 - E_1 = A$$

Изменение полной энергии  $E_2 - E_1$  идеальной несжимаемой жидкости равно работе  $A$  внешних сил по перемещению массы  $m$  жидкости между сечениями  $S_1$  и  $S_2$ .

#### Работа внешних сил по перемещению жидкости массой $m$ между сечениями $S_1$ и $S_2$

$$A = F_1 l_1 + F_2 l_2$$

$F_1 = p_1 S_1$  и  $F_2 = -p_2 S_2$  (отрицательна, так как направлена в сторону, противоположную течению жидкости). Для перенесения массы  $m$  от  $S_1$  до  $S'_1$  жидкость должна переместиться на расстояние  $l_1 = v_1 \Delta t$  и от  $S_2$  до  $S'_2$  — на расстояние  $l_2 = v_2 \Delta t$  ( $l_1$  и  $l_2$  очень малы, поэтому всем точкам объемов, закрашенных на рисунке, приписывают одинаковые значения скорости, давления и высоты).



## Объем, занимаемый жидкостью

$$\Delta V = S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t$$

Согласно уравнению неразрывности для несжимаемой жидкости  $Sv = \text{const}$ , объем, занимаемый жидкостью, остается постоянным.

## Уравнение Бернулли

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const}$$

Подставив все записанные формулы в выражение  $E_2 - E_1 = A$ , получим

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 + p_1 S_1 v_1 \Delta t = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 + p_2 S_2 v_2 \Delta t.$$

Разделив на  $\Delta V$ , найдем

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh_2 + p_2.$$

[ $\rho$  — плотность жидкости; сечения 1 и 2 выбраны произвольно,  $p$  — статическое давление;  $\rho gh$  — гидростатическое давление;  $\frac{\rho v^2}{2}$  — динамическое давление]

◆ Уравнение Бернулли — выражение закона сохранения энергии применительно к установившемуся течению идеальной жидкости. Оно хорошо выполняется и для реальных жидкостей, внутреннее трение которых не очень велико.

## Уравнение Бернулли для горизонтальной трубки тока

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const}$$

В случае горизонтальной трубки тока  $h_1 = h_2$ .

[ $\frac{\rho v^2}{2}$  — динамическое давление;  $p$  — статическое давление;  $p + \frac{\rho v^2}{2}$  — полное давление]

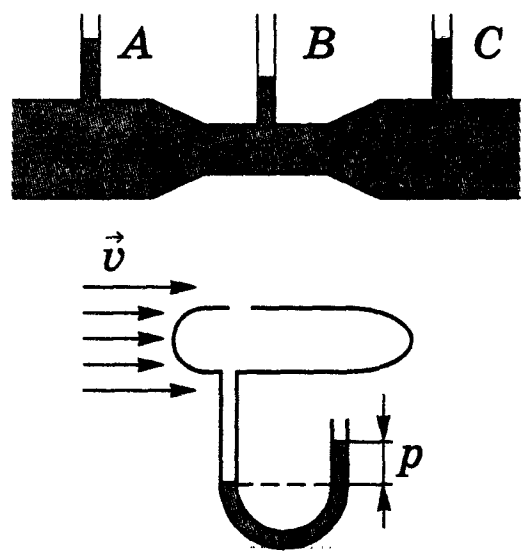
## 1.75 Измерение давлений

### Манометры

**Предназначение:** измерение статического давления.

Из уравнения Бернулли для горизонтальной трубки тока  $\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const}$  и уравнения неразрывности  $Sv = \text{const}$  следует, что при течении

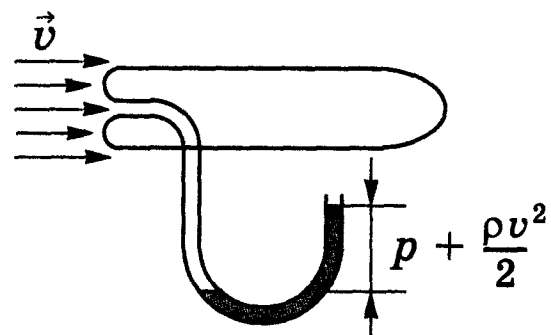
жидкости (газа) по горизонтальной трубе, имеющей различные сечения, скорость жидкости (газа) больше в местах сужения, а статическое давление больше в более широких местах, т. е. там, где скорость меньше. Так, в манометрической трубке В, прикрепленной к узкой части трубы, уровень жидкости ниже, чем в манометрических трубках А и С, прикрепленных к широкой части трубы.



### Трубка Пито

**Предназначение:** измерение полного давления.

Манометр устанавливается параллельно направлению потока.

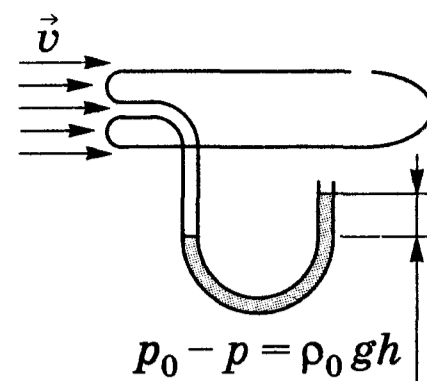


## Трубка Прандтля

**Предназначение:** измерение разности полного и статического давлений, а также для скорости измерения потока жидкости.

Одна из изогнутых трубок измеряет полное давление ( $p_0$ ), другая — статическое ( $p$ ). Манометром измеряется разность давлений  $p_0 - p = \rho_0 gh$  ( $\rho_0$  — плотность жидкости в манометре).

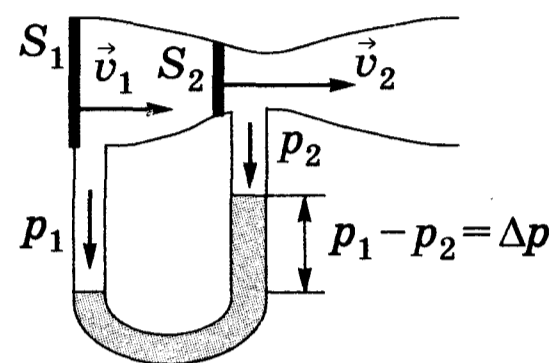
Согласно уравнению Бернулли 1.74, разность полного и статического давлений равна динамическому давлению:  $p_0 - p = \frac{\rho v^2}{2}$ . Тогда скорость потока  $v = \sqrt{2\rho_0 gh / \rho}$  (учти, что  $p_0 - p = \rho gh$ ).



## Трубка Вентури

**Предназначение:** измерение разности статических давлений в различных сечениях потока.

По измеренной разности давлений, применяя уравнение неразрывности 1.73, можно определить скорость потока.

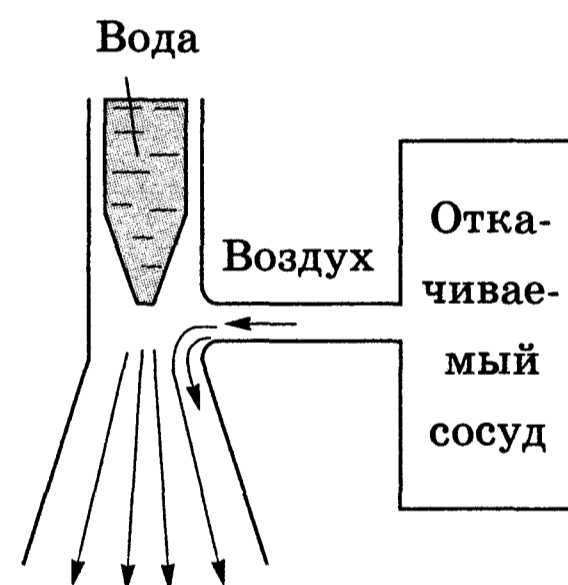


## 1.76 Примеры применения уравнения Бернулли

### Водоструйный насос

**Принцип работы:** уменьшение статического давления в точках, где скорость потока больше.

Струя воды подается в трубку, открытую в атмосферу, так что давление на выходе из трубки равно атмосферному. В трубке имеется сужение, по которому вода течет с большей скоростью. В этом месте давление меньше атмосферного. Это давление устанавливается и в откачанном сосуде, который связан с трубкой через разрыв, который имеется в ее конце. Таким образом можно откачивать воздух из сосуда до давления 100 мм рт. ст. (1 мм рт. ст. = 133,3 Па).



### Скорость истечения жидкости через малое отверстие в стенке сосуда

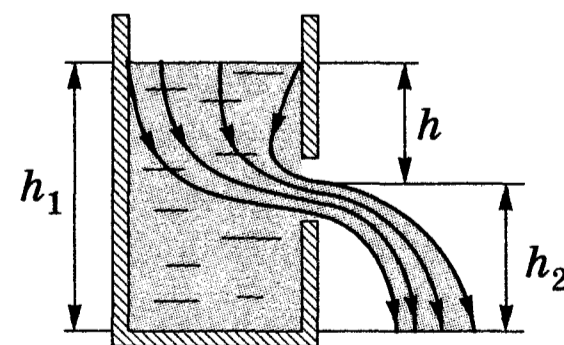
Уравнение Бернулли для двух сечений (на уровне  $h_1$  свободной поверхности жидкости в сосуде и на уровне  $h_2$  выхода ее из отверстия):

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh_2 + p_2,$$

где  $p_1 = p_2$  (атмосферное давление). Тогда

$$\frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{v_2^2}{2} + gh_2.$$

Согласно уравнению неразрывности,  $S_1 v_1 = S_2 v_2$  1.73. Если  $S_1 \gg S_2$ , то членом  $v_1^2$  можно пренебречь и  $v_2^2 = 2g(h_1 - h_2) = 2gh$ , откуда и получается формула Торричелли.



### Формула Торричелли

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

Скорость течения жидкости из отверстия на глубине  $h$  такая же, как скорость, приобретаемая любым телом, которое падает с высоты  $h$  (без учета сопротивления воздуха).

### 1.6.3. ВЯЗКОСТЬ (ВНУТРЕННЕЕ ТРЕНИЕ). РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ

#### 1.77 Сила внутреннего трения

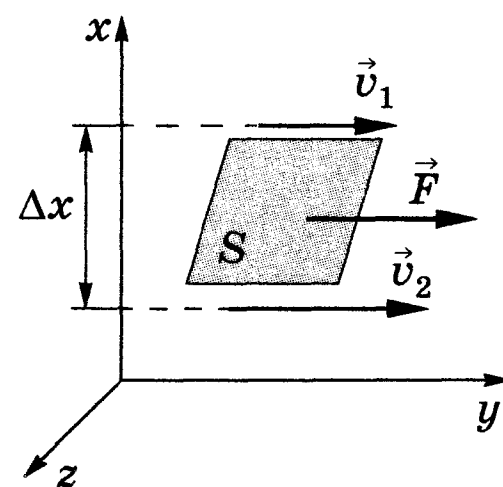
##### Вязкость (внутреннее трение)

Свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной части жидкости относительно другой.

При перемещении одних слоев реальной жидкости относительно других возникают силы внутреннего трения, направленные по касательной к поверхности слоев. Действие этих сил проявляется в том, что со стороны слоя, движущегося быстрее, на слой, движущийся медленнее, действует ускоряющая сила. Со стороны же слоя, движущегося медленнее, на слой, движущийся быстрее, действует тормозящая сила.

##### Исходные данные

Рассматриваем два слоя, отстоящие друг от друга на расстояние  $\Delta x$  и движущиеся со скоростями  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  ( $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \Delta \vec{v}$ ). Направление, в котором отсчитывается расстояние между слоями, перпендикулярно скорости течения слоев.



##### Градиент скорости

$$\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Величина, показывающая, как быстро меняется скорость при переходе от слоя к слою в направлении  $x$ , перпендикулярном направлению движения слоев.

##### Сила внутреннего трения

$$F = \eta \left| \frac{\Delta v}{\Delta x} \right| S$$

Сила внутреннего трения тем больше, чем больше рассматриваемая площадь поверхности слоя  $S$  (см. рисунок), и зависит от того, насколько быстро меняется скорость течения жидкости при переходе от слоя к слою.

##### Динамическая вязкость

$$\eta = \frac{F}{\left| \frac{\Delta v}{\Delta x} \right| S}$$

Определяется силой внутреннего трения, действующей на единицу поверхности слоя жидкости при наличии градиента скорости, равного единице.

##### Единица динамической вязкости

$$1 \text{ Па} \cdot \text{с} = 1 \text{ Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2$$

1 паскаль-секунда равен динамической вязкости среды, в которой при ламинарном течении **1.78** и градиенте скорости с модулем, равным 1 м/с на 1 м, возникает сила внутреннего трения 1 Н на 1 м<sup>2</sup> поверхности касания слоев.

##### Зависимость вязкости от температуры

Характер зависимости вязкости от температуры различен (для жидкостей  $\eta$  с увеличением температуры уменьшается, у газов, наоборот, увеличивается), что указывает на различие в них механизмов внутреннего трения.

Сильно от температуры зависит вязкость масел (вязкость касторового масла в интервале 18—40 °С уменьшается в 4 раза). Например, жидкий гелий при  $T = 2,17 \text{ К}$  переходит в сверхтекучее состояние, в котором его вязкость равна нулю (открытие П. Л. Капицы).

Примеры коэффициентов вязкости  $\eta$ :

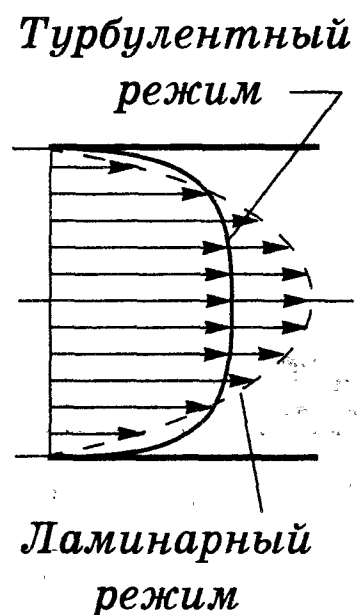
	Воздух	Кислород	Метан	Вода	Глицерин	Ртуть	Смазочное масло.
$\eta$ , МПа·с (20 °С)	0,0182	0,0202	0,0108	1,002	1480	1,554	от 30 до 5000

## 1.78 Ламинарное и турбулентное течения

### Ламинарное (слоистое) течение

Течение, если вдоль потока каждый выделенный тонкий слой скользит относительно соседних, не перемешиваясь с ними.

Ламинарное течение жидкости наблюдается при небольших скоростях ее движения. Внешний слой жидкости, примыкающий к поверхности трубы, в которой она течет, из-за сил молекулярного сцепления прилипает к ней и остается неподвижным. Скорости последующих слоев тем больше, чем больше их расстояние до поверхности трубы, и наибольшей скоростью обладает слой, движущийся вдоль оси трубы (см. рисунок).



### Турбулентное (вихревое) течение

Течение, если вдоль потока происходит интенсивное вихреобразование и перемешивание жидкости (газа).

При турбулентном течении частицы жидкости приобретают составляющие скоростей, перпендикулярные течению, поэтому они могут переходить из одного слоя в другой. Скорость частиц жидкости быстро возрастает по мере удаления от поверхности трубы, затем изменяется довольно незначительно. Поэтому профиль скорости при турбулентном течении в трубах (см. рисунок) отличается от параболического профиля при ламинарном течении более быстрым возрастанием скорости у стенок трубы и меньшей кривизной в центральной части течения.

### Число Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho \langle v \rangle d}{\eta} = \frac{\langle v \rangle d}{\nu}$$

Безразмерная величина, определяющая характер течения жидкости.

При малых значениях числа Рейнольдса ( $Re \lesssim 1000$ ) наблюдается ламинарное течение, переход от ламинарного течения к турбулентному происходит в области  $1000 \lesssim Re \lesssim 2000$ , а при  $Re = 2300$  (для гладких труб) течение — турбулентное. При одинаковых  $Re$  режим течения различных жидкостей (газов) в трубах разных сечений одинаков.

[ $\nu = \eta/\rho$  — кинематическая вязкость;  $\rho$  — плотность жидкости;  $\langle v \rangle$  — средняя по сечению трубы скорость жидкости;  $d$  — характерный линейный размер, например, диаметр трубы]

## 1.6.4. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЯЗКОСТИ

### 1.79 Метод Стокса

#### Идея метода

Этот метод определения вязкости основан на измерении скорости медленно движущихся в жидкости небольших тел сферической формы.

#### Силы, действующие на шарик, падающий в жидкости вертикально вниз

Сила тяжести

$$mg = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g$$

Сила Архимеда

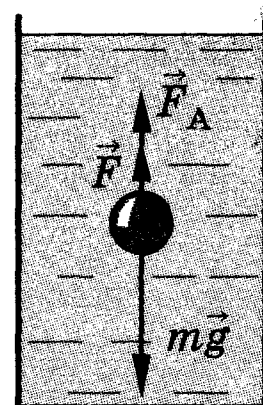
$$F_A = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho' g$$

Сила сопротивления

$$F = 6\pi\eta r v$$

[ $\rho$  — плотность шарика;  $r$  — радиус шарика;  $\rho'$  — плотность жидкости;  $g$  — ускорение свободного падения;  $v$  — скорость шарика]

Установлена опытным путем.



## Коэффициент динамической вязкости жидкости (газа)

$$\eta = \frac{2(\rho - \rho')gr^2}{9v}$$

При равномерном движении шарика  $mg = F + F_A$  или  $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g + 6\pi \eta r v$ , откуда

$$v = \frac{2(\rho - \rho')gr^2}{9\eta}$$

Измерив скорость равномерного движения шарика, можно определить вязкость.

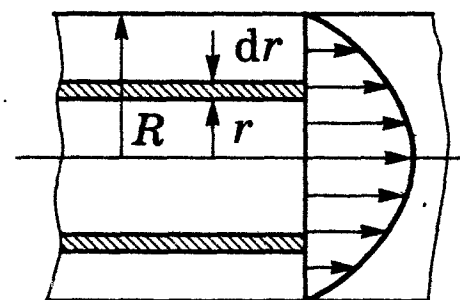
## 1.80 Метод Пуазейля

### Идея метода

Этот метод определения вязкости основан на ламинарном течении жидкости в тонком капилляре.

### Исходные данные

Рассмотрим капилляр радиусом  $R$  и длиной  $l$ . В жидкости мысленно выделим цилиндрический слой радиусом  $r$  и толщиной  $dr$ .



### Сила внутреннего трения, действующая на боковую поверхность слоя

$$F = -\eta \frac{dv}{dr} dS = -\eta \cdot 2\pi r l \frac{dv}{dr}$$

[ $dS$  — боковая поверхность цилиндрического слоя ( $dS = 2\pi r l$ ); знак минус означает, что при возрастании радиуса скорость уменьшается]

### В случае установившегося течения жидкости

$$-\eta \cdot 2\pi r l \frac{dv}{dr} = \Delta p \pi r^2$$

Сила внутреннего трения, действующая на боковую поверхность цилиндра, уравновешивается силой давления, действующей на его основание.

### Скорости частиц жидкости

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

Из предыдущего выражения получаем  $dv = -\frac{\Delta p}{2\eta l} r dr$ . После интегрирования, учитывая, что у стенок имеет место прилипание жидкости, т. е. скорость на расстоянии  $R$  от оси равна нулю, получаем записанное выражение.

Скорости частиц подчиняются *параболическому закону* (см. также рисунок).

## Коэффициент динамической вязкости жидкости

$$\eta = \frac{\pi R^4 \Delta p t}{8Vl}$$

За время  $t$  из трубы вытечет жидкость, объем которой

$$V = \int_0^R vt \cdot 2\pi r dr = \frac{2\pi \Delta p t}{4\eta l} \int_0^R r (R^2 - r^2) dr = \frac{\pi \Delta p t}{2\eta l} \left[ \frac{r^2 R^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi R^4 \Delta p t}{8\eta l},$$

откуда и получается выражение для  $\eta$ .

## 1.7. Элементы релятивистской механики

### 1.7.1. ПОСТУЛАТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (СТО)

## 1.81 Релятивистская механика и СТО

### Релятивистская механика

Изучает законы движения макроскопических тел, движущихся со скоростями, сравнимыми со скоростью распространения света в вакууме ( $v = c$ ).

Релятивистская механика основана на *специальной теории относительности*, сформулированной Эйнштейном.

## 2. ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

### 2.1. Молекулярно-кинетическая теория идеальных газов

#### 2.1.1. СТАТИСТИЧЕСКИЙ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

#### 2.1 Молекулярная физика и термодинамика

*Молекулярная физика и термодинамика* — разделы физики, в которых изучаются *макроскопические процессы* в телах, связанные с огромным числом содержащихся в телах атомов и молекул. В основе исследования лежат два метода: *статистический* и *термодинамический*.

##### Молекулярная физика

Раздел физики, в котором изучаются строение и свойства вещества исходя из молекулярно-кинетических представлений, основывающихся на том, что все тела состоят из молекул, находящихся в непрерывном хаотическом движении.

##### Термодинамика

Раздел физики, в котором изучаются общие свойства макроскопических систем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия, и процессы перехода между этими состояниями.

#### 2.2 Статистический и термодинамический методы

Метод	Суть метода	Пояснения
Статистический (основа молекулярной физики)	Метод исследования систем из большого числа частиц, оперирующий <i>статистическими закономерностями и средними значениями физических величин</i> , характеризующих всю совокупность частиц (например, средние значения скоростей теплового движения молекул и их энергий)	Процессы, изучаемые молекулярной физикой, являются результатом совокупного действия огромного числа молекул. Температура тела, например, определяется скоростью беспорядочного движения его молекул, но так как в любой момент времени разные молекулы имеют различные скорости, то она может быть выражена только через среднее значение скорости движения молекул. Нельзя говорить о температуре одной молекулы
Термодинамический (основа термодинамики)	Метод исследования систем из большого числа частиц, оперирующий <i>на основе законов превращения энергии величинами, характеризующими систему в целом</i> (например, давление, объем, температура), не рассматривая ее микроструктуры и совершающихся в системе микропроцессов	Нет таких областей физики и химии, в которых нельзя было бы пользоваться термодинамическим методом. Однако, с другой стороны, термодинамический метод несколько ограничен: термодинамика ничего не говорит о микроскопическом строении вещества, о механизме явлений, а лишь устанавливает связи между макроскопическими свойствами вещества

*Молекулярно-кинетическая теория и термодинамика взаимно дополняют друг друга, образуя единое целое, отличаясь различными методами исследования.*



## 2.1.2. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ПАРАМЕТРЫ И ПРОЦЕССЫ

### 2.3 Описание термодинамических систем

#### Термодинамическая система

Совокупность макроскопических тел, которые взаимодействуют и обмениваются энергией как между собой, так и с внешней средой.

#### Внешняя среда

Тела, не входящие в исследуемую термодинамическую систему.

#### Замкнутая термодинамическая система

Термодинамическая система, не обменивающаяся с внешней средой ни энергией, ни веществом.

#### Термодинамические параметры (параметры состояния)

Совокупность физических величин, характеризующих свойства термодинамической системы. Обычно в качестве параметров состояния выбирают *температуру, давление и объем*.

#### Термодинамический процесс

Любое изменение в термодинамической системе, связанное с изменением хотя бы одного из ее термодинамических параметров.

**Примеры:** изобарный (происходит при постоянном давлении), изохорный (происходит при постоянном объеме), изотермический (происходит при постоянной температуре) процессы.

#### Термодинамическое равновесие

Система находится в *термодинамическом равновесии*, если ее состояние с течением времени не меняется (предполагается, что внешние условия рассматриваемой системы при этом не изменяются).

### 2.4 Температура. Температурные шкалы

#### Температура

Физическая величина, характеризующая состояние термодинамического равновесия макроскопической системы и определяющая направление теплообмена между телами.

Температура — одно из основных понятий не только в термодинамике, но и физике в целом.

#### Международная практическая шкала (шкала Цельсия)

Градуируется в градусах Цельсия ( $^{\circ}\text{C}$ ). Определяется двумя *реперными точками*:  $0^{\circ}\text{C}$  и  $100^{\circ}\text{C}$  — соответственно температуры замерзания и кипения воды при давлении  $1,013 \cdot 10^5$  Па.

Термометр  
со шкалой Цельсия



## Термодинамическая температурная шкала (шкала Кельвина)

Градуируется в кельвинах (К). Определяется по одной *реперной точке*, в качестве которой взята *тройная точка воды* (температура, при которой лед, вода и насыщенный пар при давлении 609 Па находятся в термодинамическом равновесии). Температура этой точки по данной шкале равна 273,16 К (точно).

Температура  $T = 0$  К называется *нулем Кельвина*.

В термодинамической шкале температура замерзания воды равна 273,15 К (при том же давлении, что и в Международной практической шкале).

Термодинамическая температура ( $T$ ) и температура ( $t$ ) по Международной практической шкале связаны соотношением  $T = 273,15 + t$ .



## 2.5 Диапазон температур



## 2.1.3. ЗАКОНЫ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ПОВЕДЕНИЕ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

## 2.6 Идеальный газ

### Модель идеального газа (идеализация)

Модель, согласно которой:

- ◆ собственный объем молекул газа пренебрежительно мал по сравнению с объемом сосуда;
- ◆ между молекулами газа отсутствуют силы взаимодействия;
- ◆ столкновения молекул газа между собой и со стенками сосуда абсолютно упругие.

Эта модель может быть использована при изучении *реальных* газов, так как они в условиях, близких к нормальным, а также при низких давлениях и высоких температурах близки по свойствам к идеальному газу.

## 2.7 Основные понятия молекулярно-кинетической теории

### Атом

Наименьшая часть химического элемента, являющаяся носителем его свойств.

### Молекула

Наименьшая устойчивая частица вещества, обладающая его основными химическими свойствами и состоящая из атомов, соединенных между собой химическими связями.

### Количество вещества

Физическая величина, определяемая числом специфических структурных элементов — молекул, атомов или ионов, из которых состоит вещество.

### Единица количества вещества

1 моль

1 моль (моль) — количество вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько атомов содержится в нуклиде  $^{12}\text{C}$  массой 0,012 кг. 1 моль — *основная единица*.

### Постоянная Авогадро

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

Число атомов (молекул или других структурных единиц), содержащихся в одном моле *различных* веществ. 1 моль разных веществ содержит одно и то же число молекул.

### Молярная масса

$$M = m_0 N_A$$

Масса 1 моль вещества.

[ $m_0$  — масса одной молекулы;  $N_A$  — постоянная Авогадро]

### Единица молярной массы

1 кг/моль

1 килограмм на моль (кг/моль) — молярная масса вещества, имеющего при количестве вещества 1 моль массу 1 кг.

### Молярный объем

$$V_m = \frac{V}{\nu}$$

Физическая величина, равная отношению объема  $V$  однородной системы к количеству вещества  $\nu$  системы.

### Единица молярного объема

1 м<sup>3</sup>/моль

1 кубический метр на моль (м<sup>3</sup>/моль) — молярный объем вещества, занимающего при количестве вещества 1 моль объем 1 м<sup>3</sup>.

## 2.8 Закон Бойля—Мариотта для изотермического процесса

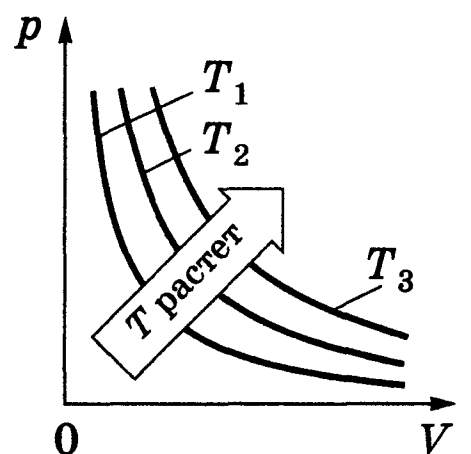
### Закон Бойля—Мариотта

$$pV = \text{const}$$

при  $T = \text{const}$ ,  
 $m = \text{const}$

Для данной массы газа при постоянной температуре произведение давления газа на его объем есть величина постоянная.

Кривая, изображающая зависимость между величинами  $p$  и  $V$ , характеризующими свойства вещества при постоянной температуре, называется *изотермой*. Изотермы представляют собой гиперболы, расположенные на графике тем выше, чем выше температура, при которой происходит процесс (см. рисунок).



## Изотермический процесс

Процесс, происходящий при постоянной температуре ( $T = \text{const}$ ).

### Изотерма

График зависимости между параметрами состояния идеального газа при  $T = \text{const}$ .

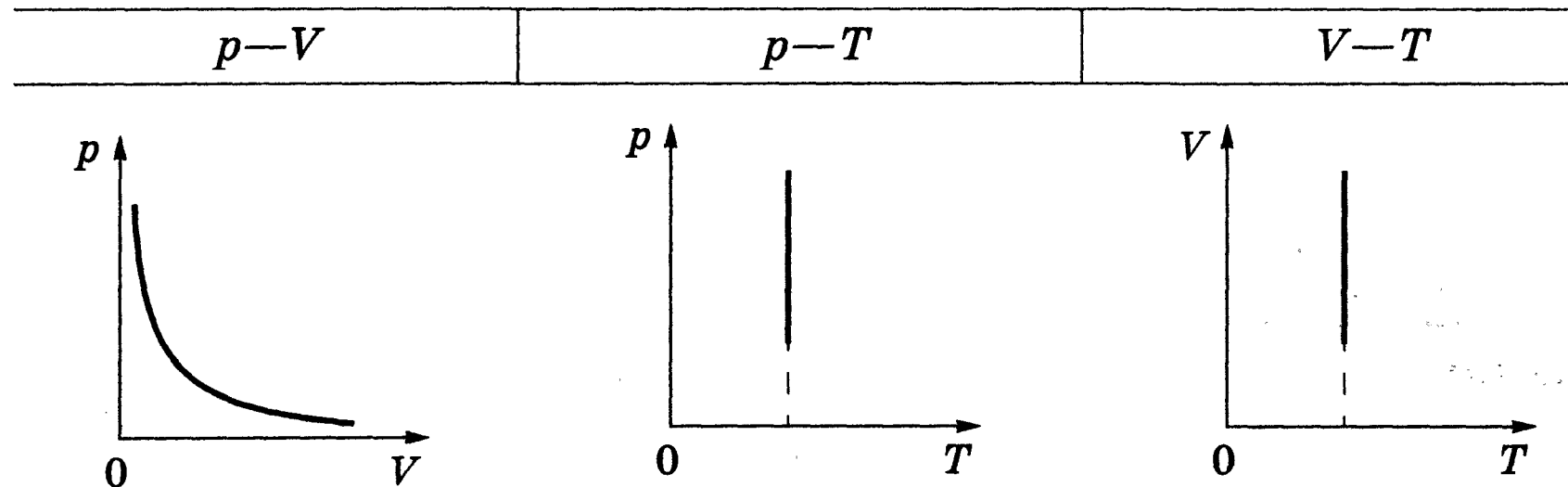
### Графики изотермического процесса

Система координат

$$T = \text{const}$$

$$pV = \text{const}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}$$



## 2.9 Закон Гей-Люссака для изобарного процесса

### Закон Гей-Люссака в шкале Цельсия

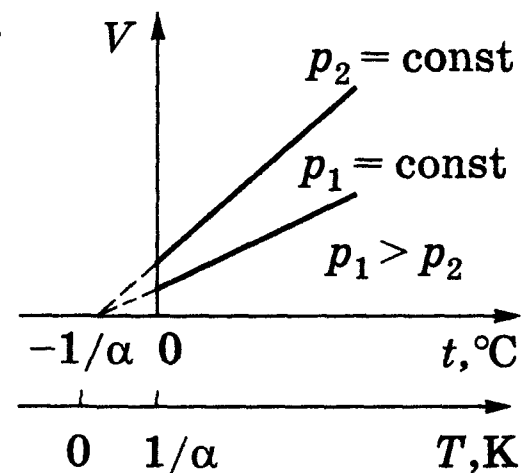
$$V = V_0(1 + \alpha t)$$

при  $p = \text{const}$ ,  
 $m = \text{const}$

Объем данной массы газа при постоянном давлении изменяется линейно с температурой.

[ $t$  — температура по Цельсию;  $V_0$  — объем при  $0^\circ\text{C}$ ;

$$\alpha = \frac{1}{273,15} \text{ K}^{-1}]$$



### Изобарный процесс

Процесс, происходящий при постоянном давлении ( $p = \text{const}$ ).

### Изобара

График зависимости между параметрами состояния идеального газа при  $p = \text{const}$ .

### Закон Гей-Люссака в термодинамической шкале температур

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

при  $p = \text{const}$ ,  
 $m = \text{const}$

Из формулы  $V = V_0(1 + \alpha t)$  следует, что изобары пересекают ось температур в точке  $t = -\frac{1}{\alpha} = -273,15^\circ\text{C}$ , определяемой из условия  $1 + \alpha t = 0$ . Если перенести начало отсчета в эту точку, то происходит переход к шкале Кельвина (см. рисунок), тогда  $T = t + \frac{1}{\alpha}$ . В этом случае

$$V = V_0(1 + \alpha t) = V_0 \left[ 1 + \alpha \left( T - \frac{1}{\alpha} \right) \right] = V_0 \alpha T,$$

откуда  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$  (индексы 1 и 2 относятся к произвольным состояниям, лежащим на одной изобаре).

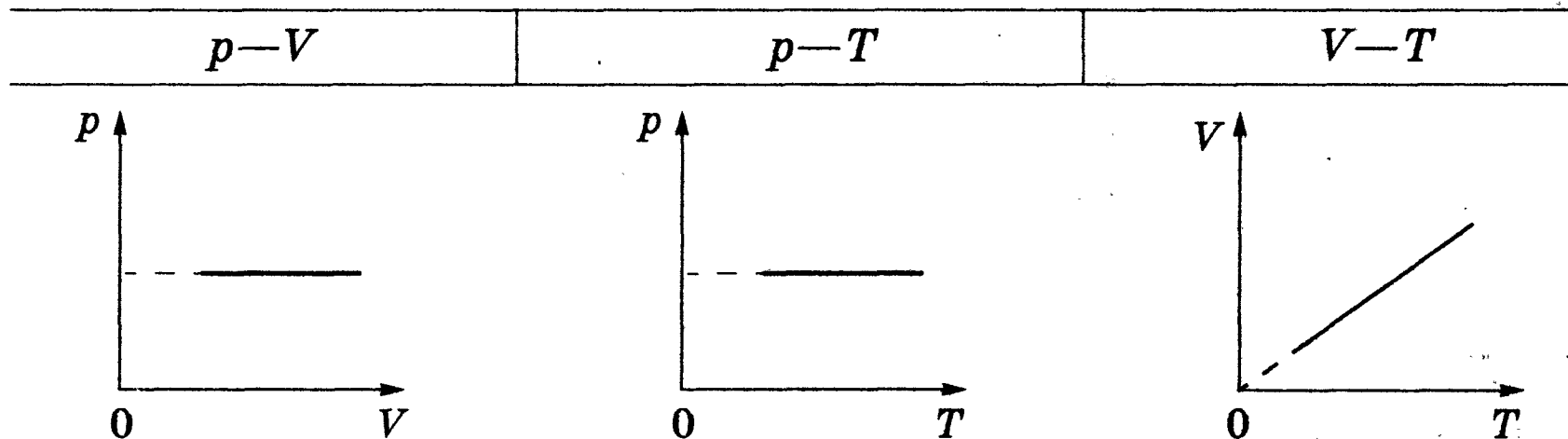
## Графики изобарного процесса

Система координат

$$p = \text{const}$$

$$V = V_0(1 + \alpha t)$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$$



## 2.10 Закон Гей-Люссака для изохорного процесса

### Закон Гей-Люссака в шкале Цельсия

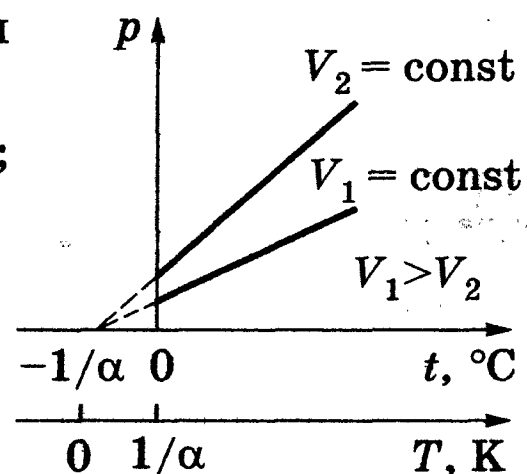
$$p = p_0(1 + \alpha t)$$

при  $V = \text{const}$ ,  
 $m = \text{const}$

Давление данной массы газа при постоянном объеме изменяется линейно с температурой.

[ $t$  — температура по Цельсию;  $p_0$  — давление при  $0^\circ\text{C}$ ;

$$\alpha = \frac{1}{273,15} \text{ K}^{-1}]$$



### Изохорный процесс

Процесс, происходящий при постоянном объеме ( $V = \text{const}$ ).

### Изохора

График зависимости между параметрами состояния идеального газа при  $V = \text{const}$ .

### Закон Гей-Люссака в термодинамической шкале температур

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

при  $V = \text{const}$ ,  
 $m = \text{const}$

Из формулы  $p = p_0(1 + \alpha t)$  следует, что изохоры пересекают ось температур в точке  $t = -\frac{1}{\alpha} = -273,15^\circ\text{C}$ , определяемой из условия  $1 + \alpha t = 0$ . Если перенести начало отсчета в эту точку, то происходит переход к шкале Кельвина (см. рисунок), откуда  $T = t + \frac{1}{\alpha}$ . Тогда  $p = p_0(1 + \alpha t) = p_0 \left[ 1 + \alpha \left( T - \frac{1}{\alpha} \right) \right] = p_0 \alpha T$ , откуда  $\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$  (индексы 1 и 2 относятся к произвольным состояниям, лежащим на одной изохоре).

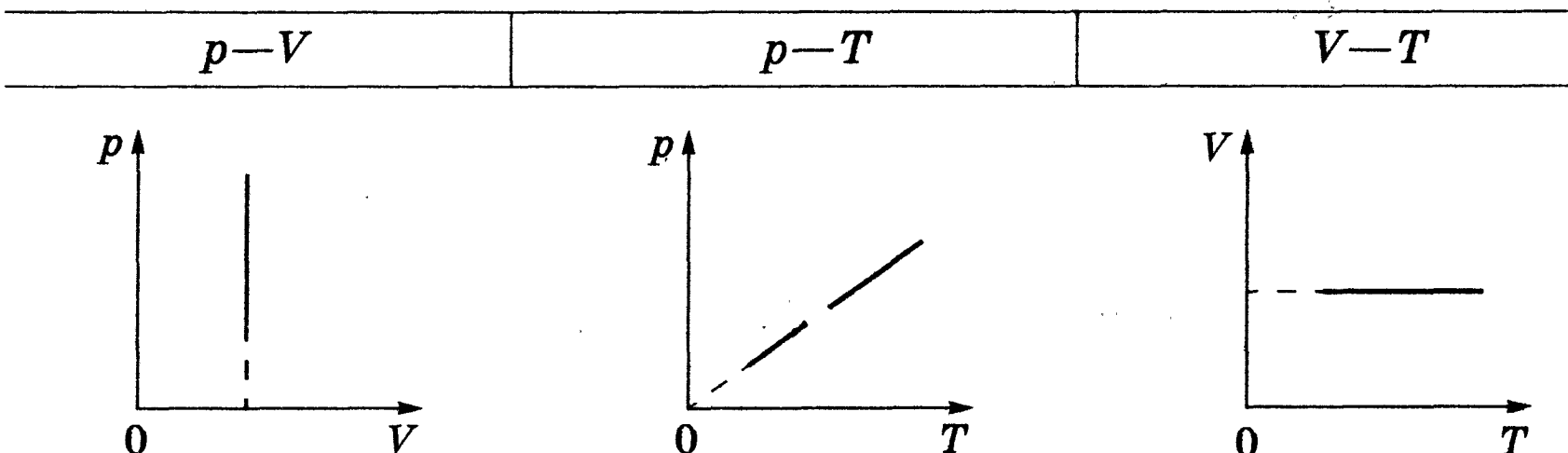
## Графики изохорного процесса

Система координат

$$V = \text{const}$$

$$p = p_0(1 + \alpha t)$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$$



## 2.11 Законы Авогадро и Дальтона

### Закон Авогадро

$$V_m = 22,41 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$$

(при нормальных условиях)

Моли любых газов при одинаковых температуре и давлении занимают одинаковые объемы.

### Закон Дальтона

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

Давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений  $p_1, p_2, \dots, p_n$  входящих в нее газов.

### Парциальное давление

Давление, которое производил бы газ, входящий в состав газовой смеси, если бы он один занимал объем, равный объему смеси при той же температуре.

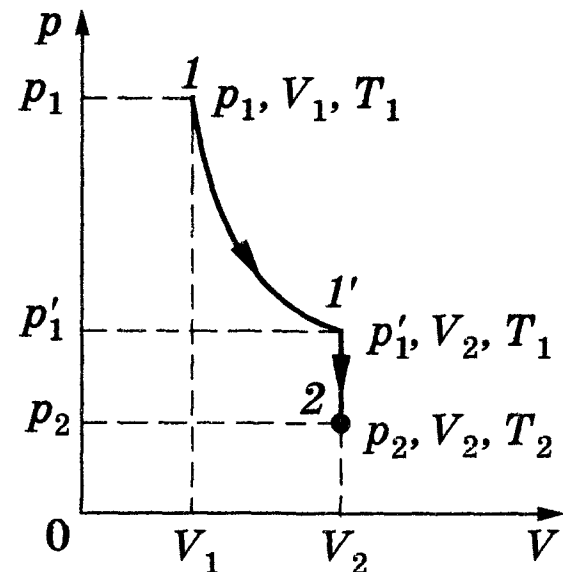
## 2.1.4. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

### 2.12 Уравнение Клапейрона

#### Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона)

$$pV/T = B = \text{const}$$

Некоторая масса газа в состоянии 1 характеризуется параметрами  $p_1, V_1, T_1$ , в состоянии 2 — параметрами  $p_2, V_2, T_2$ . Клапейрон совершил переход  $1 \rightarrow 2$  в виде двух процессов: изотермического ( $1-1'$ ) и изохорного ( $1'-2$ ). Применяв последовательно законы Бойля—Мариотта 2.8 и Гей-Люссака 2.10  $p_1 V_1 = p' V_2, \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$  и исключив  $p'$ , получим  $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$ . Поскольку состояния 1 и 2 произвольны, для данной массы газа величина  $\frac{pV}{T}$  остается постоянной.



[ $B$  — газовая постоянная, различная для разных газов]

### 2.13 Уравнение Клапейрона—Менделеева

#### Уравнение Клапейрона—Менделеева (уравнение состояния) для 1 моль идеального газа

$$pV_m = RT$$

Менделеев объединил уравнение Клапейрона с законом Авогадро, отнес уравнение Клапейрона  $pV = BT$  2.12 к 1 моль, используя молярный объем  $V_m$  2.7. Согласно закону Авогадро 2.11, при одинаковых  $p$  и  $T$  моли всех газов занимают одинаковый молярный объем  $V_m$  и постоянная будет одинакова для всех газов:  $pV_m = RT$ .

[ $p, V_m, T$  — соответственно давление, молярный объем и термодинамическая температура газа;  $R$  — общая для всех газов постоянная, называемая молярной газовой постоянной 2.14]



## Уравнение Клапейрона—Менделеева для произвольной массы $m$ газа

$$pV = \frac{m}{M} RT = \nu RT$$

Если при некоторых заданных давлении и температуре 1 моль газа занимает молярный объем  $V_m$ , то при тех же условиях масса  $m$  газа займет объем  $V = \frac{m}{M} V_m$  ( $M$  — молярная масса). Тогда уравнение состояния для массы  $m$  газа  $pV = \frac{m}{M} RT = \nu RT$  ( $\nu = \frac{m}{M}$  — количество вещества **2.7**).

## Частные законы, вытекающие из уравнения Клапейрона—Менделеева

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

Уравнение Клапейрона—Менделеева для произвольной массы  $m$  газа.

Закон Бойля—Мариотта	Закон Гей-Люссака для изобарного процесса	Закон Гей-Люссака для изохорного процесса
$pV = \text{const}$ ( $T = \text{const}, m = \text{const}$ )	$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$ ( $p = \text{const}, m = \text{const}$ )	$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$ ( $V = \text{const}, m = \text{const}$ )

## 2.14 Некоторые фундаментальные постоянные.

### Еще одна форма записи уравнения состояния

#### Молярная газовая постоянная

$$R = \frac{p_0 V_0}{T_0}$$

$$R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$$

Относится к классу *универсальных* постоянных.

Числовое значение  $R$  определяют из формулы  $pV_m = RT$  **2.13**, полагая, что 1 моль газа находится при нормальных условиях:  $p_0 = 1,013 \cdot 10^5$  Па;  $T_0 = 273,15$  К;  $V_m = 22,41 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>/моль.

#### Постоянная Больцмана

$$k = \frac{R}{N_A}$$

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$$

Относится к классу *универсальных* постоянных.

[ $N_A$  — постоянная Авогадро **2.7**]

#### Еще одна форма уравнения состояния

$$p = nkT$$

Рассмотрев уравнение Клапейрона—Менделеева  $pV_m = RT$  **2.13** и введя постоянную Больцмана  $k = R/N_A$ , получим

$$p = \frac{RT}{V_m} = \frac{kN_A T}{V_m} = nkT.$$

[ $\frac{N_A}{V_m} = n$  — концентрация молекул]

#### Число Лошмидта

$$N_L = \frac{p_0}{kT_0}$$

$$N_L = 2,68 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$$

Число молекул, содержащихся в 1 м<sup>3</sup> газа при нормальных условиях.

При одинаковых давлении и температуре все газы содержат в единице объема одинаковое число молекул.

## 2.1.5. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ (МКТ)

### 2.15 Упрощенный вывод основного уравнения МКТ

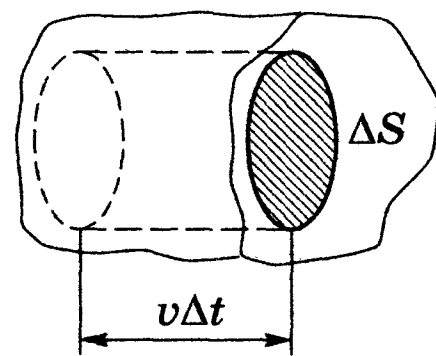
Исходные положения для упрощенного вывода уравнения кинетической теории идеального газа

- ◆ Рассматривается одноатомный идеальный газ.
- ◆ Молекулы газа совершают хаотическое движение, причем все направления движения равновероятны (основание — давление газа на стенки сосуда одинаково).
- ◆ Число взаимных столкновений между молекулами газа *пренебрежимо мало* по сравнению с числом ударов о стенки сосуда.
- ◆ Соударения молекул со стенками сосуда абсолютно упругие.
- ◆ Для упрощения расчетов хаотическое движение молекул заменяют движением вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений, причем в любой момент времени вдоль каждого из них движутся  $1/3$  молекул (из них  $1/6$  молекул движутся вдоль данного направления в одну сторону, а  $1/6$  молекул в другую).
- ◆ Всем молекулам приписывают одинаковые скорости  $v$ .

На стенке сосуда выделена элементарная площадка  $\Delta S$ . За время  $\Delta t$  до площадки  $\Delta S$  долетят все движущиеся по направлению к ней молекулы, заключенные в объеме цилиндра с основанием  $\Delta S$  и высотой  $v\Delta t$ :

$$\frac{1}{6} n \Delta S v \Delta t.$$

[ $n$  — концентрация молекул]



Импульс, передаваемый молекулами при столкновении с площадкой

$$\Delta P = 2m_0 v \cdot \frac{1}{6} n \Delta S v \Delta t = \frac{1}{3} n m_0 v^2 \Delta S \Delta t$$

При каждом соударении молекула, движущаяся перпендикулярно площадке, передает ей импульс  $m_0 v - (-m_0 v) = 2m_0 v$ .

[ $m_0$  — масса молекулы]

Давление газа, оказываемое им на стенку сосуда

$$p = \frac{\Delta P}{\Delta t \Delta S} = \frac{1}{3} n m_0 v^2$$

[ $v$  — скорости молекул, вначале принятые одинаковыми (см. исходные положения)]

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v \rangle^2$$

Если газ в объеме  $V$  содержит  $N$  молекул, движущихся со скоростями  $v_1, v_2, \dots, v_N$ , то вводят *среднюю квадратичную скорость*

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2}.$$

[ $p$  — давление газа;  $n$  — концентрация молекул;  $m_0$  — масса одной молекулы;  $\langle v_{\text{кв}} \rangle^2$  — средняя квадратичная скорость молекул]

- ◆ Точный расчет с учетом движения молекул по всевозможным направлениям приводит к той же формуле, выражающей основное уравнение МКТ.

## 2.16 Другие формы записи основного уравнения МКТ

### Основное уравнение МКТ

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v_{\text{КВ}} \rangle^2$$

$$pV = \frac{1}{3} N m_0 \langle v_{\text{КВ}} \rangle^2$$

Учли, что  $n = \frac{N}{V}$

$$pV = \frac{2}{3} N \frac{m_0 \langle v_{\text{КВ}} \rangle^2}{2} = \frac{2}{3} E$$

$$E = N \frac{m_0 \langle v_{\text{КВ}} \rangle^2}{2}$$

$$pV = \frac{1}{3} m \langle v_{\text{КВ}} \rangle^2$$

$$m = N m_0$$

$$pV_m = \frac{1}{3} M \langle v_{\text{КВ}} \rangle^2$$

Для 1 моль газа  $m = M$

[ $p$  и  $V$  — соответственно давление и объем;  $N$  — число молекул в объеме  $V$ ;  $m_0$  — масса одной молекулы;  $\langle v_{\text{КВ}} \rangle$  — средняя квадратичная скорость молекул;  $E$  — суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа;  $m$  — масса газа;  $V_m$  — молярный объем;  $M$  — молярная масса]

## 2.17 Средняя квадратичная скорость молекул $\langle v_{\text{КВ}} \rangle$

### Уравнение, определяющее $\langle v_{\text{КВ}} \rangle$

$$RT = \frac{1}{3} M \langle v_{\text{КВ}} \rangle^2$$

$$pV_m = RT \quad \text{2.13}; \quad pV_m = \frac{1}{3} M \langle v_{\text{КВ}} \rangle^2 \quad \text{2.16}; \quad \text{откуда } RT = \frac{1}{3} M \langle v_{\text{КВ}} \rangle^2.$$

### Средняя квадратичная скорость молекул

$$\langle v_{\text{КВ}} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{m_0 N_A}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$$

$$\text{Учли, что } k = \frac{R}{N_A} \text{ и } M = m_0 N_A.$$

[ $R$  — молярная газовая постоянная;  $T$  — термодинамическая температура;  $M$  — молярная масса;  $m_0$  — масса одной молекулы;  $N_A$  — постоянная Авогадро;  $k$  — постоянная Больцмана]

Примеры  $\langle v_{\text{КВ}} \rangle$  для некоторых газов:

	300 К	4,2 К		300 К	4,2 К		300 К	4,2 К
$O_2$	483 $\frac{M}{c}$	57,2 $\frac{M}{c}$	$N_2$	517 $\frac{M}{c}$	61,2 $\frac{M}{c}$	$H_2$	1930 $\frac{M}{c}$	229 $\frac{M}{c}$

## 2.18 Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы идеального газа $\langle \varepsilon_0 \rangle$

### Различные формулы для $\langle \varepsilon_0 \rangle$

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{E}{N} = \frac{m_0 \langle v_{\text{КВ}} \rangle^2}{2}$$

$$\text{Использовали формулу } pV = \frac{2}{3} N \frac{m_0 \langle v_{\text{КВ}} \rangle^2}{2} = \frac{2}{3} E \quad \text{2.16}.$$

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{3}{2} kT$$

$$\text{Учли, что } \langle v_{\text{КВ}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}.$$

Из выражения  $\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{3}{2} kT$  следует, что при  $T = 0$  имеем  $\langle \varepsilon_0 \rangle = 0$ , т. е. при 0 К прекращается поступательное движение молекул газа, следовательно, его давление равно нулю. Таким образом, *термодинамическая*

температура является мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул идеального газа, и формула  $\frac{3}{2}kT$  раскрывает молекулярно-кинетическое толкование температуры.

[ $E$  — суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа;  $N$  — число молекул газа в объеме  $V$ ;  $m_0$  — масса одной молекулы;  $\langle v_{\text{кв}} \rangle$  — средняя квадратичная скорость молекул;  $k$  — постоянная Больцмана;  $T$  — термодинамическая температура]

## 2.1.6. ЗАКОН МАКСВЕЛЛА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ МОЛЕКУЛ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ПО СКОРОСТЯМ И ЭНЕРГИЯМ ТЕПЛООВОГО ДВИЖЕНИЯ

### 2.19 Предпосылки существования распределения молекул по скоростям

По молекулярно-кинетической теории, как бы ни изменялись скорости молекул при столкновениях, средняя квадратичная скорость молекул массой  $m_0$  в газе, находящемся в состоянии равновесия при  $T = \text{const}$ , остается постоянной и равной  $\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{3kT/m_0}$ . Это означает, что в газе, находящемся в состоянии равновесия, устанавливается некоторое стационарное, не меняющееся со временем распределение молекул по скоростям, которое подчиняется вполне определенному статистическому закону. Этот закон теоретически выведен Максвеллом.

#### Исходные положения Максвелла при выводе распределения

- ◆ Газ состоит из большого числа  $N$  одинаковых молекул.
- ◆ Температура газа постоянна.
- ◆ Молекулы газа совершают тепловое хаотическое движение.
- ◆ Из-за хаотического движения молекул все направления движения равновероятны, т. е. в любом направлении в среднем движется одинаковое число молекул.
- ◆ На газ не действуют силовые поля.

### 2.20 Функция распределения молекул по скоростям

#### Функция распределения молекул по скоростям

$$f(v) = \frac{dN(v)}{Ndv}$$

Если разбить диапазон скоростей молекул на малые интервалы, равные  $dv$ , то на каждый интервал скорости будет приходиться некоторое число молекул  $dN(v)$ , имеющих скорость, заключенную в этом интервале. Функция  $f(v)$  определяет относительное число молекул  $\frac{dN(v)}{N}$ , скорости которых лежат в интервале от  $v$  до  $v + dv$ , т. е.  $\frac{dN(v)}{N} = f(v) dv$ , откуда  $f(v) = \frac{dN(v)}{Ndv}$ .

#### Выражение

$$f(v) dv$$

Вероятность того, что скорости молекулы заключены в интервале от  $v$  до  $v + dv$ .

#### Условие нормировки для функции $f(v)$

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1$$

Смысл интеграла: любая молекула имеет какую-то скорость  $v$ , поэтому, просуммировав все доли молекул, имеющих всевозможные скорости  $v$ , получим единицу. Площадь, ограниченная функцией  $f(v)$  и осью абсцисс, равна единице.

## 2.21 Закон Максвелла

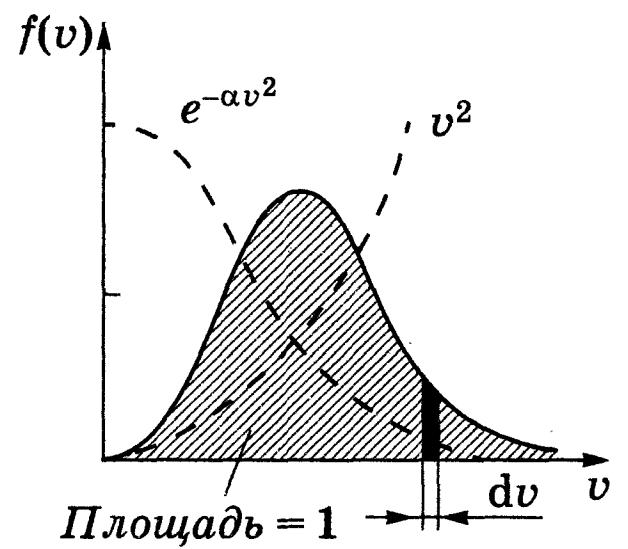
### о распределении молекул идеального газа по скоростям

Функция распределения, первоначально полученная Максвеллом

$$f(v) = Av^2 e^{-m_0 v^2 / (2kT)}$$

Характерные особенности зависимости  $f(v)$  от  $v$ :

- ◆ В показателе экспоненциальной функции имеем взятое с минусом отношение кинетической энергии молекулы к  $kT$  (средняя энергия молекулы).
- ◆ График функции  $f(v)$ , начинаясь в нуле, достигает максимума, а затем асимптотически стремится к нулю; она несимметрична относительно  $v$ .
- ◆ Относительное число молекул  $dN_v/N$ , скорости которых лежат в интервале от  $v$  до  $v + dv$ , находится как площадь закрашенной полоски.



Множитель  $A$

$$A = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2}$$

Находят из условия нормировки  $\int_0^{\infty} f(v) dv = 1$  **2.20**, а именно, интегрируя выражение:  $A \int_0^{\infty} v^2 e^{-m_0 v^2 / (2kT)} dv = 1$ .

Закон Максвелла о распределении молекул по скоростям

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-m_0 v^2 / (2kT)}$$

Конкретный вид функции зависит от рода газа (от массы молекулы) и от параметра состояния (от температуры  $T$ ).

[ $m_0$  — масса молекулы;  $k$  — постоянная Больцмана;  $T$  — термодинамическая температура]

## 2.22 Определение скоростей молекул из распределения Максвелла по скоростям

Наиболее вероятная скорость  $v_B$

Скорость, при которой функция распределения молекул идеального газа по скоростям максимальна (см. рисунок **2.21**).

Значение наиболее вероятной скорости

$$v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

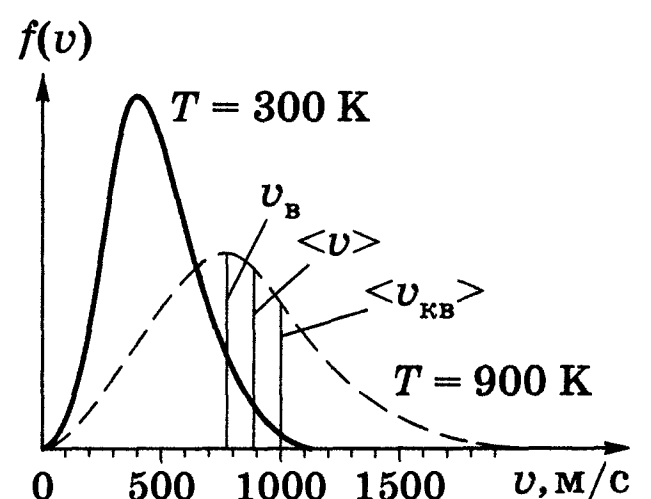
Получается, если продифференцировать  $f(v)$  по аргументу  $v$  и приравнять результат нулю (постоянные множители опускаем):

$$\frac{d}{dv} \left( v^2 e^{-m_0 v^2 / (2kT)} \right) = 2v \left( 1 - \frac{m_0 v^2}{2kT} \right) e^{-m_0 v^2 / (2kT)} = 0.$$

Значение  $v$ , при котором выражение в скобках становится равным нулю, и есть  $v_B = \sqrt{2kT/m_0}$ .

Зависимость распределения Максвелла от температуры

Для примера приведена функция распределения молекул кислорода для двух температур (300 К и 900 К). С повышением температуры максимум функции  $f(v)$  смещается вправо (значение наиболее вероятной скорости становится больше). Площадь же, ограниченная кривой, остается неизменной, поэтому с повышением температуры кривая  $f(v)$  растягивается и понижается.



Средняя скорость $\langle v \rangle$ молекулы	Согласно определению, $\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv$	$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^3 e^{-m_0 v^2/(2kT)} dv;$	
	$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$	$\int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} a^{-2} \text{ (табличный интеграл);}$ $a = \frac{m_0}{2kT}, \quad \langle v \rangle = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{m_0}{2kT}\right)^{-2} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}$	
Средняя квадратичная скорость $\langle v_{кв} \rangle$ молекулы	$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ $\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv$	$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^4 e^{-m_0 v^2/(2kT)} dv;$	
	$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$	$\int_0^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{8} \sqrt{\pi} a^{-5/2} \text{ (табличный интеграл);}$ $a = \frac{m_0}{2kT}; \quad \langle v^2 \rangle = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \frac{3}{8} \sqrt{\pi} \left(\frac{m_0}{2kT}\right)^{-5/2} = \frac{3kT}{m_0};$ $\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} \quad \mathbf{2.17}$	
Скорости, характеризующие состояние газа	$v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$	Наиболее вероятная	Эти скорости обозначены на рисунке данной таблицы
	$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = 1,13v_B$	Средняя	
	$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 1,22v_B$	Средняя квадратичная	

[ $k$  — постоянная Больцмана;  $m_0$  — масса молекулы;  $T$  — термодинамическая температура;  $R$  — молярная газовая постоянная;  $M$  — молярная масса]

## 2.23 Функция распределения молекул по энергиям теплового движения

### Функция распределения молекул по энергиям теплового движения

$$f(\epsilon) = \frac{dN(\epsilon)}{N d\epsilon}$$

Если разбить диапазон энергий молекул на малые интервалы, равные  $d\epsilon$ , то на каждый интервал энергии будет приходиться некоторое число молекул  $dN(\epsilon)$ , имеющих энергию, заключенную в этом интервале. Функция  $f(\epsilon)$  определяет относительное число молекул  $\frac{dN(\epsilon)}{N}$ , энергии которых лежат в интервале от  $\epsilon$  до  $\epsilon + d\epsilon$ , т. е.  $\frac{dN(\epsilon)}{N} = f(\epsilon) d\epsilon$ , откуда  $f(\epsilon) = \frac{dN(\epsilon)}{N d\epsilon}$ .

#### Выражение

$$f(\epsilon) d\epsilon$$

Вероятность того, что энергии молекул заключены в интервале от  $\epsilon$  до  $\epsilon + d\epsilon$ .

## 2.24 Закон Максвелла о распределении молекул идеального газа по энергиям теплового движения

### Число молекул, имеющих скорости в интервале от $v$ до $v + dv$

$$dN(v) = N \cdot 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-m_0 v^2/(2kT)} dv$$

Использовали функцию распределения молекул по скоростям **2.20** и **2.21**.



**Число молекул, имеющих кинетическую энергию поступательного движения, заключенную в интервале от  $\varepsilon$  до  $d\varepsilon$**

$$dN(\varepsilon) = \frac{2N}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/(kT)} d\varepsilon = Nf(\varepsilon) d\varepsilon$$

Перешли от переменной  $v$  к переменной  $\varepsilon = \frac{m_0 v^2}{2}$ . Подставив в  $dN(v)$  скорость  $v = \sqrt{2\varepsilon/m_0}$  и  $dv = (2m_0\varepsilon)^{-1/2} d\varepsilon$ , приходим к выражению  $dN(\varepsilon)$ .

**Функция распределения молекул по энергиям теплового движения**

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/(kT)}$$

Получена из предыдущего выражения:

$$f(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{Nd\varepsilon}$$

[ $k$  — постоянная Больцмана;  $T$  — термодинамическая температура;  $\varepsilon = \frac{m_0 v^2}{2}$  — кинетическая энергия поступательного движения молекул;  $m_0$  — масса молекулы;  $v$  — ее скорость]

## 2.25 Определение энергий из распределения Максвелла

Средняя кинетическая энергия $\langle \varepsilon \rangle$ молекулы идеального газа	Согласно определению, $\langle \varepsilon \rangle = \int_0^{\infty} \varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon$	$\langle \varepsilon \rangle = \int_0^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \varepsilon^{3(1)/2} e^{-\varepsilon/(kT)} d\varepsilon;$ $\int_0^{\infty} x^{3/2} e^{-ax} dx = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} a^{-5/2}$ (табличный интеграл); $a = \frac{1}{kT} \cdot \langle \varepsilon \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \cdot \frac{4}{3} \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{kT}\right)^{-5/2} = \frac{3}{2} kT$ (сравните с результатом 2.14)
	$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} kT$	
Наиболее вероятное значение энергии $\varepsilon_B$ молекул	$\varepsilon_B = \frac{1}{2} kT$	$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/(kT)}; \quad \frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon} = 0;$ $\frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} e^{-\varepsilon/(kT)} \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{-1/2} - \frac{\varepsilon^{1/2}}{kT}\right) = 0, \quad \frac{1}{2\varepsilon_B^{1/2}} - \frac{\varepsilon_B^{1/2}}{kT} = 0;$ $\varepsilon_B = \frac{1}{2} kT$

## 2.1.7. БАРОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

### 2.26 Барометрическая формула

**Барометрическая формула**

Зависимость атмосферного давления  $p$  от высоты  $h$ .

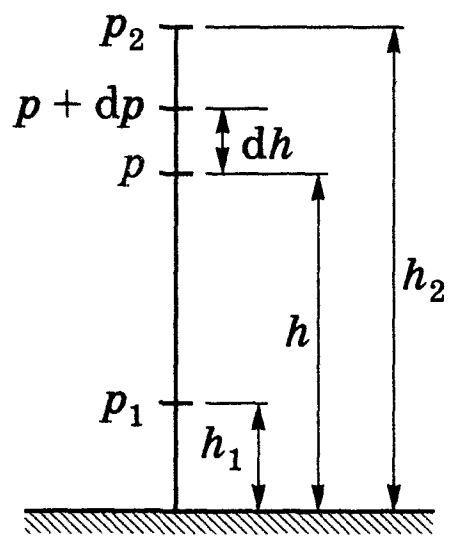
**Исходные положения при выводе формулы**

- ◆ Поле тяготения однородно.
- ◆ Температура постоянна.
- ◆ Масса всех молекул одинакова.
- ◆ Ускорение свободного падения постоянно.

**Вывод барометрической формулы**

Если атмосферное давление на высоте  $h$  равно  $p$ , то на высоте  $h + dh$  оно равно  $p + dp$  (при  $dh > 0$   $dp < 0$ , так как давление с высотой убывает).

Разность давлений  $p$  и  $p + dp$  равна весу газа, заключенного в объеме цилиндра высотой  $dh$ , площадь основания которого равна единице площади:  $p - (p + dp) = \rho g dh$  ( $\rho$  — плотность газа на высоте  $h$ ),  $dp = -\rho g dh$ .



Учитывая, что  $\rho = \frac{m}{V}$ , а  $pV = \frac{m}{M} RT$  ( $m$  — масса газа,

$M$  — молярная масса газа), получаем  $dp = -\frac{Mg}{RT} p dh$ ,

или  $\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dh$ . С изменением высоты от  $h_1$  до  $h_2$

давление изменяется от  $p_1$  до  $p_2$ , т. е.  $\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} \int_{h_1}^{h_2} dh$ , откуда

$$p_2 = p_1 e^{-Mg(h_2 - h_1)/(RT)}$$

### Барометрическая формула

$$p_2 = p_1 e^{-Mg(h_2 - h_1)/(RT)}$$

[ $R$  — молярная газовая постоянная;  $T$  — термодинамическая температура;  $g$  — ускорение свободного падения]

### Более распространенная форма записи барометрической формулы

$$p = p_0 e^{-Mgh/(RT)}$$

Высоты обычно обозначаются относительно уровня моря, где давление считается нормальным ( $p$  — давление на высоте  $h$ ).

## 2.27 Распределение Больцмана

### Распределение Больцмана

$$n = n_0 e^{-\Pi/(kT)}$$

Барометрическая формула  $p = p_0 e^{-Mgh/(RT)}$  2.26 с учетом  $p = nkT$  2.14 может быть записана в виде  $n = n_0 e^{-Mgh/(RT)}$ . Так как  $M = m_0 N_A$ , а  $R = kN_A$ , то

$$n = n_0 e^{-m_0 gh/(kT)} = n_0 e^{-\Pi/(kT)}$$

Из распределения Больцмана следует, что при постоянной температуре плотность газа больше там, где меньше потенциальная энергия его молекул. Если частицы имеют одинаковую массу и находятся в состоянии хаотического теплового движения, то распределение Больцмана справедливо в любом внешнем потенциальном поле, а не только в поле сил тяжести.

[ $n$  — концентрация молекул на высоте  $h$ ,  $n_0$  — то же на высоте  $h = 0$ ;  $m_0$  — масса одной молекулы,  $N_A$  — постоянная Авогадро;  $\Pi = m_0 gh$  — потенциальная энергия молекулы в поле тяготения]

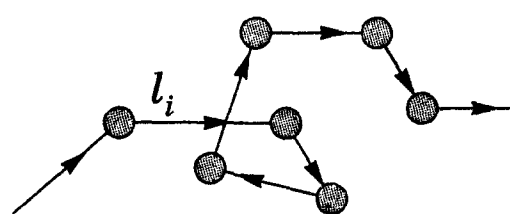
### 2.1.8. СРЕДНЕЕ ЧИСЛО СТОЛКНОВЕНИЙ И ДЛИНА СВОБОДНОГО ПРОБЕГА МОЛЕКУЛ

### 2.28 Средняя длина свободного пробега молекул

#### Длина свободного пробега

Путь, проходимый молекулой между двумя последовательными столкновениями.

Вследствие хаотичности движения молекул  $l_i$  разные.



## Средняя длина свободного пробега молекул $\langle l \rangle$

$$\langle l \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N l_i$$

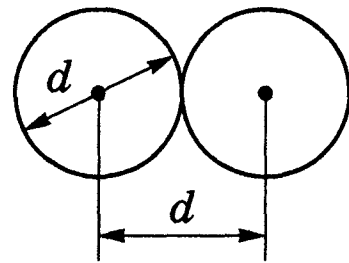
Путь, который в *среднем* проходят молекулы между двумя последовательными столкновениями.

[ $N$  — число молекул]

## Эффективный диаметр молекулы $d$

Минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул.

$d$  зависит от скорости сталкивающихся молекул (от температуры газа).



## Значения $d$ для молекул некоторых газов при нормальных условиях

Газ	азот	водород	воздух	кислород
$d$	0,38 нм	0,28 нм	0,27 нм	0,36 нм

## 2.29 Среднее число столкновений молекул

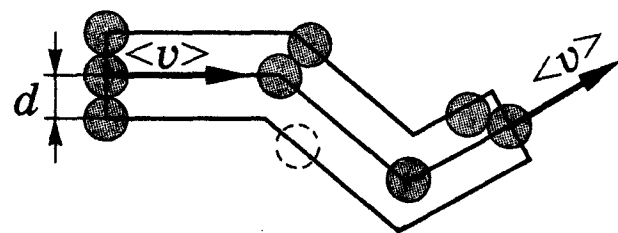
### Среднее число столкновений молекулы за 1 с

$$\langle z \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle l \rangle}$$

[ $\langle v \rangle$  — средняя скорость молекулы (путь, проходимый в среднем молекулой за 1 с);  $\langle l \rangle$  — средняя длина свободного пробега]

### Расчет $\langle z \rangle$

*Модель:* молекула в виде шарика диаметром  $d$  движется среди «застывших» молекул. Среднее число столкновений  $\langle z \rangle$  равно числу молекул в объеме «ломаного» цилиндра:  
 $\langle z \rangle = nV$ ;  $V = \pi d^2 \langle v \rangle$ ;  $\langle z \rangle = n\pi d^2 \langle v \rangle$ .



$$\langle z \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 n \langle v \rangle$$

Эта формула получается при учете движения других молекул.

### Формулы для $\langle l \rangle$ с учетом $\langle z \rangle$

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}$$

$$\frac{\langle l_1 \rangle}{\langle l_2 \rangle} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{p_2}{p_1} \quad (\text{при постоянной температуре}).$$

[ $n$  — концентрация молекул;  $d$  — эффективный диаметр молекулы;  $\langle v \rangle$  — средняя скорость молекулы;  $p$  — давление;  $\langle l \rangle$  — средняя длина свободного пробега молекулы]

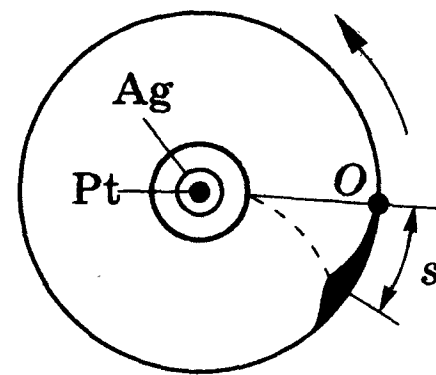
## 2.1.9. НЕКОТОРЫЕ ПОДТВЕРЖДЕНИЯ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

### 2.30 Броуновское движение

Любые частицы малых размеров ( $\approx 1$  мкм), взвешенные в газе или жидкости, совершают сложное зигзагообразное движение. Это *движение* называется *броуновским*. Броуновское движение взвешенных частиц вызывается ударами молекул среды, в которой частицы взвешены. Броуновское движение является *подтверждением выводов молекулярно-кинетической теории о хаотическом тепловом движении атомов и молекул*.

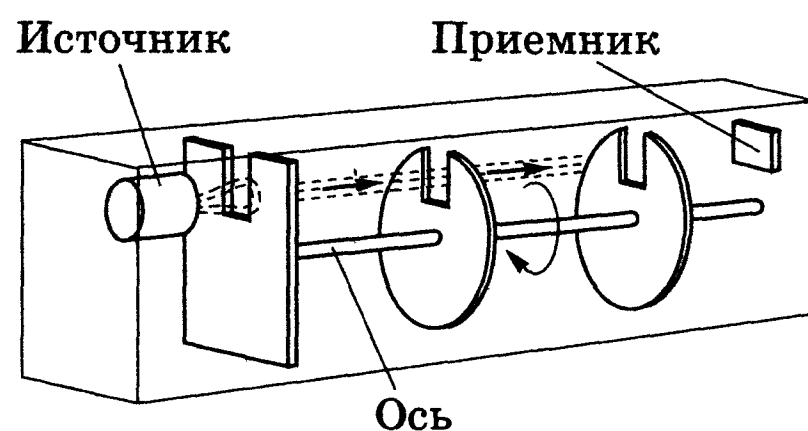
## 2.31 Опыт Штерна

Вдоль оси внутреннего цилиндра с щелью натянута платиновая проволока, покрытая слоем серебра и нагреваемая током при откачанном воздухе. При нагревании серебро испаряется. Атомы серебра, вылетая через щель, попадают на внутреннюю поверхность второго цилиндра, давая изображение щели. Если прибор привести во вращение вокруг общей оси цилиндров, то атомы серебра осядут не против щели, а сместятся на некоторое расстояние  $s$ . Изображение щели получается размытым. Исследуя толщину осажденного слоя, можно оценить распределение молекул по скоростям, которое соответствует максвелловскому распределению.



## 2.32 Опыт Ламмерта

В вакууме молекулярный пучок, сформированный источником, проходя через щель, попадает в приемник. Между источником и приемником помещают два диска с прорезями, закрепленных на общей оси. При неподвижных дисках молекулы достигают приемника, проходя через прорези в обоих дисках. Если ось привести во вращение, то приемника достигнут только те прошедшие прорезь в первом диске молекулы, которые затрачивают для пробега между дисками время, равное или кратное времени оборота диска. Другие же молекулы задерживаются вторым диском. Меняя угловую скорость вращения дисков и измеряя число молекул, попадающих в приемник, можно выявить закон распределения молекул по скоростям. Этот опыт более точно подтвердил максвелловское распределение молекул по скоростям.



## 2.33 Опытное определение постоянной Авогадро

$$N_A = \frac{3RT \ln(n_1/n_2)}{4\pi r^3(\rho - \rho_1)g(h_2 - h_1)}$$

Перрен, исследуя под микроскопом броуновское движение, показал, что броуновские частицы распределяются по высоте подобно молекулам газа в поле тяготения **2.26**. Применив к ним больцмановское распределение **2.27**, можно записать  $n = n_0 e^{-(m - m_1)gh/(kT)}$ ,  $m = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$ ,  $m_1 = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_1$ . Если  $n_1$  и  $n_2$  — концентрации частиц на уровнях  $h_1$  и  $h_2$ , то учитывая, что  $k = R/N_A$ , после использования записанного распределения Больцмана и соответствующих подстановок получаем выражение для  $N_A$ . Значение  $N_A$  соответствует значениям, полученным из других опытов, что подтверждает применимость к броуновским частицам распределения Больцмана.

[ $m$  — масса частицы;  $m_1$  — масса вытесненной ею жидкости;  $r$  — радиус частицы,  $\rho$  — плотность частицы,  $\rho_1$  — плотность жидкости;  $n_1$  и  $n_2$  — концентрации частиц на уровнях  $h_1$  и  $h_2$ ;  $R$  — молярная газовая постоянная;  $T$  — термодинамическая температура]

## 2.1.10. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА

### В ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ НЕРАВНОВЕСНЫХ СИСТЕМАХ

#### 2.34 Общие сведения о явлениях переноса (одномерный случай)

Явление переноса	Переносимая физическая величина	Закон, описывающий явление переноса	Коэффициенты $\lambda$ , $D$ и $\eta$
Теплопроводность	Энергия	Закон Фурье $j_E = -\lambda \frac{dT}{dx}$	$\lambda = \frac{1}{3} c_V \rho \langle v \rangle \langle l \rangle$
Диффузия	Масса	Закон Фика $j_m = -D \frac{d\rho}{dx}$	$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle$
Внутреннее трение (вязкость)	Импульс	Закон Ньютона $j_p = -\eta \frac{dv}{dx}$	$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle$

Явления переноса — особые необратимые процессы в термодинамически неравновесных системах, в результате которых происходит пространственный перенос энергии, массы или импульса.

[ $j_E$ ,  $j_m$ ,  $j_p$  — соответственно плотности теплового потока, потока массы и потока импульса;  $\lambda$ ,  $D$ ,  $\eta$  — соответственно коэффициенты теплопроводности, диффузии и динамической вязкости;  $\frac{dT}{dx}$ ,  $\frac{d\rho}{dx}$ ,  $\frac{dv}{dx}$  — соответственно градиенты температуры, плотности и скорости;  $c_V$  — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении;  $\rho$  — плотность газа;  $\langle v \rangle$  — средняя скорость теплового движения молекул;  $\langle l \rangle$  — средняя длина свободного пробега молекул]

#### 2.35 Теплопроводность

##### Теплопроводность

Один из видов явлений переноса 2.34, заключающийся в том, что если в одной области газа средняя кинетическая энергия молекул больше, чем в другой, то с течением времени вследствие постоянных столкновений молекул происходит процесс выравнивания средних кинетических энергий молекул, т. е., иными словами, выравнивание температур.

##### Закон Фурье

$$j_E = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

Ось  $x$  ориентирована в направлении переноса энергии. Знак минус показывает, что энергия переносится в направлении убывания температуры.

##### Плотность теплового потока

$$j_E$$

Величина, определяемая энергией, переносимой в форме теплоты в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси  $x$ .

##### Градиент температуры

$$\frac{dT}{dx}$$

Определяется скоростью изменения температуры на единицу длины  $x$  в направлении нормали к площадке.

##### Коэффициент теплопроводности (теплопроводность)

$$\lambda = \frac{1}{3} c_V \rho \langle v \rangle \langle l \rangle$$

Равен плотности теплового потока при градиенте температуры, равном единице.

[ $c_V$  — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме;  $\rho$  — плотность газа;  $\langle v \rangle$  — средняя скорость теплового движения молекул;  $\langle l \rangle$  — средняя длина свободного пробега]

## 2.36 Диффузия

### Диффузия

Один из видов явлений переноса **2.34**, заключающийся в том, что происходит самопроизвольное проникновение и перемешивание частиц двух соприкасающихся газов, жидкостей и даже твердых тел; диффузия сводится к обмену масс частиц этих тел, возникает и продолжается, пока существует градиент плотности.

### Закон Фика

$$j_m = -D \frac{d\rho}{dx}$$

Ось  $x$  ориентирована в направлении *переноса массы*. Знак минус показывает, что перенос массы происходит в направлении убывания плотности.

### Плотность потока массы

$$j_m$$

Величина, определяемая массой вещества, диффундирующего *в единицу времени через единичную площадку*, перпендикулярную оси  $x$ .

### Градиент плотности

$$\frac{d\rho}{dx}$$

Определяется скоростью изменения плотности на единицу длины  $x$  в направлении нормали к площадке.

### Коэффициент диффузии (диффузия)

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle$$

Равен плотности потока массы при градиенте плотности, равном единице.

[ $\langle v \rangle$  — средняя скорость теплового движения молекул;  $\langle l \rangle$  — средняя длина свободного пробега]

## 2.37 Внутреннее трение (вязкость)

### Внутреннее трение (вязкость)

Один из видов явлений переноса **2.34**, заключающийся в том, что из-за хаотического теплового движения происходит обмен молекулами между слоями, в результате чего импульс слоя, движущегося быстрее, уменьшается, движущегося медленнее — увеличивается, что приводит к торможению слоя, движущегося быстрее, и ускорению слоя, движущегося медленнее.

Взаимодействие двух слоев, согласно второму закону Ньютона, можно рассматривать как процесс, при котором от одного слоя к другому в единицу времени передается импульс, по модулю равный действующей силе. Тогда выражение для силы внутреннего трения между двумя слоями газа (жидкости), определяемого законом Ньютона  $F = \eta \left| \frac{dv}{dx} \right| S$  ( $S$  — площадь, на которую действует сила  $F$ ) **1.77**, можно представить в приведенном ниже виде.

### Закон Ньютона

$$j_p = -\eta \frac{dv}{dx}$$

Ось  $x$  ориентирована в направлении *переноса импульса*. Знак минус показывает, что импульс переносится в направлении убывания скорости.

### Плотность потока импульса

$$j_p$$

Величина, определяемая полным импульсом, переносимым в единицу времени в положительном направлении оси  $x$  через единичную площадку, перпендикулярную оси  $x$ .

### Градиент скорости

$$\frac{dv}{dx}$$

Определяется быстротой изменения скорости на единицу длины  $x$  в направлении нормали к площадке.



## Динамическая вязкость

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle$$

Равна плотности потока импульса при градиенте скорости, равном единице.

[ $\rho$  — плотность газа;  $\langle v \rangle$  — средняя скорость теплового движения молекул;  $\langle l \rangle$  — средняя длина свободного пробега]

### 2.38 Общие замечания относительно явлений переноса

Закономерности всех явлений переноса сходны между собой. Законы Фурье, Фика и Ньютона были установлены задолго до того, как они были обоснованы и выведены из молекулярно-кинетической теории, позволившей установить, что внешнее сходство их математических выражений обусловлено общностью лежащего в основе явлений теплопроводности, диффузии и внутреннего трения молекулярного механизма перемешивания молекул в процессе их хаотического движения и столкновений друг с другом.

◆ Формулы для коэффициентов теплопроводности, диффузии и внутреннего трения связывают коэффициенты переноса и характеристики теплового движения молекул. Из этих выражений вытекают следующие зависимости между  $\lambda$ ,  $D$  и  $\eta$ :  $\eta = \rho D$ ,  $\frac{\lambda}{\eta c_v} = 1$ .

### 2.1.11. ОСНОВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О СВОЙСТВАХ РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗОВ

#### 2.39 Вакуум и некоторые его характеристики

##### Разреженный газ

Газ, давление которого ниже нормального атмосферного давления.

##### Вакуум

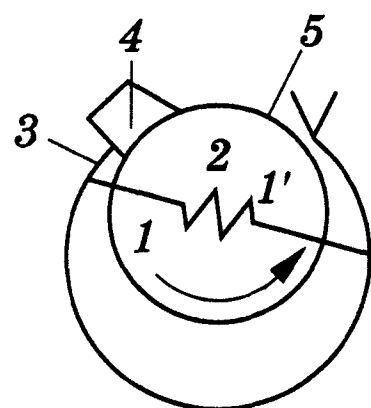
Состояние газа, при котором средняя длина свободного пробега  $\langle l \rangle$  молекул сравнима (или больше) с линейным размером  $d$  откачиваемого сосуда, характерным для рассматриваемого процесса.

Степень вакуума	низкий	средний	высокий	сверхвысокий
Соотношение между $\langle l \rangle$ и $d$	$\langle l \rangle \ll d$	$\langle l \rangle \leq d$	$\langle l \rangle > d$	$\langle l \rangle \gg d$
Интервалы давлений	100 кПа—100 Па	100 Па—0,1 Па	0,1 Па—1 мкПа	< 1 мкПа

#### 2.40 Практические примеры получения разрежения

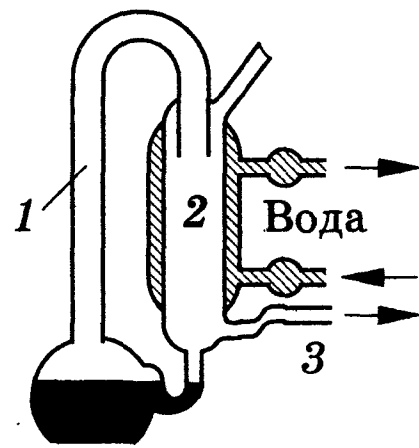
Получение предварительного разрежения (форвакуума) до  $\approx 0,13$  Па ( $\approx 10^{-3}$  мм рт. ст.)

Для этого используются *форвакуумные насосы*. Внутри цилиндрической полости корпуса вращается эксцентрично насаженный цилиндр. Две лопасти 1 и 1', вставленные в разрез цилиндра и раздвигаемые пружиной 2, разделяют пространство между цилиндром и стенкой полости на две части. Газ из откачиваемого сосуда поступает в область 3, по мере поворачивания цилиндра лопасть 1 отходит, пространство 3 увеличивается и газ засасывается через трубку 4. При дальнейшем вращении лопасть 1' отключает пространство 3 от трубки 4 и начинает вытеснять газ через клапан 5 наружу. Весь процесс непрерывно повторяется.



Для этого применяются *диффузионные насосы* (рабочее вещество — ртуть или масло). Их используют вместе с форвакуумными насосами, так как они не способны откачивать газ из сосудов, начиная с атмосферного давления, но способны создавать добавочную разность давлений.

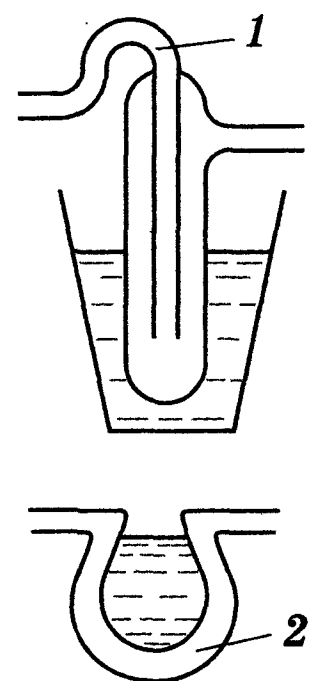
В колбе ртуть нагревается, пары ртути, поднимаясь по трубке 1, вырываются из сопла 2 с большой скоростью, увлекая за собой молекулы газа из откачиваемого сосуда (в нем создан предварительный вакуум). Эти пары, попадая затем в «водяную рубашку», конденсируются и стекают обратно в резервуар, а захваченный газ выходит в пространство (через трубку 3), в котором уже создан форвакуум. Если применять многоступенчатые насосы (несколько сопел расположены последовательно), то при хороших уплотнениях с их помощью реально получить разрежение до  $10^{-7}$  мм рт. ст.



### Дальнейшее понижение давления с помощью «ловушек»

Между диффузионным насосом и откачиваемым объектом располагают специально изогнутое колено (1 или 2) соединительной трубки (ловушку), которую охлаждают жидким азотом.

При такой температуре пары ртути (масла) вымораживаются и давление в откачиваемом сосуде понижается приблизительно на 1—2 порядка. Описанные ловушки называют *охлаждаемыми*; можно применять также *неохлаждаемые ловушки*. Специальное рабочее вещество (например, алюмогель) закладывают в один из отростков соединительной трубки вблизи откачиваемого объекта, которое поддерживается при температуре  $300^\circ\text{C}$ . При достижении высокого вакуума алюмогель охлаждается до комнатной температуры, при которой он начинает поглощать имеющиеся в системе пары. Преимущество этих ловушек состоит в том, что с их помощью в откачиваемых объектах можно поддерживать высокий вакуум уже после непосредственной откачки в течение даже нескольких суток.



## 2.41 Свойства ультраразреженных газов

### Ультраразреженный газ

Газ в состоянии высокого вакуума.

### Внутреннее трение

В состоянии ультраразрежения молекулы газа друг с другом практически не сталкиваются, поэтому газ в этом состоянии *не обладает внутренним трением*.

### Теплопроводность

Отсутствие соударений между молекулами разреженного газа отражается также на механизме теплопроводности. Если при обычных давлениях перенос энергии молекулами производится «эстафетой», то при ультраразрежении каждая молекула *сама* должна перенести энергию от одной стенки сосуда к другой. Явление уменьшения теплопроводности вакуума при понижении давления используется на практике для создания тепловой изоляции (например, сосуды Дьюара).

**Давление в соединенных между собой сосудах (поддерживаются при разных температурах) для газа в случае низкого вакуума и ультраразреженного газа**

Два сосуда 1 и 2, поддерживаемых при температурах  $T_1$  и  $T_2$ , соединены трубкой диаметром  $d$

$$\langle l \rangle \ll d.$$

Если длина свободного пробега  $\langle l \rangle$  молекул гораздо меньше диаметра  $d$  соединительной трубки

$$\langle l \rangle \gg d,$$

то состояние газа характеризуется равенством давлений в обоих сосудах:

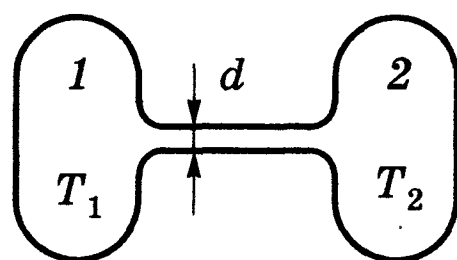
$$p_1 = p_2.$$

Стационарное состояние ультраразреженного газа, находящегося в двух сосудах, соединенных трубкой, возможно лишь в том случае, когда встречные потоки частиц, перемещающихся из одного сосуда в другой,

одинаковы, т. е.  $n_1 \langle v_1 \rangle = n_2 \langle v_2 \rangle$ . Учитывая, что  $n = \frac{p}{kT}$  **2.14** и  $\langle v \rangle =$

$= \sqrt{8RT/(\pi M)}$  **2.22**, получаем, что в условиях высокого вакуума выравнивания давлений не происходит:

$$\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}.$$



## 2.2. Основы термодинамики

### 2.2.1. ЗАКОН БОЛЬЦМАНА О РАВНОМЕРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЭНЕРГИИ ПО СТЕПЕНЯМ СВОБОДЫ

#### **2.42** Число степеней свободы молекул

##### Число степеней свободы

Число независимых переменных, полностью определяющих положение системы в пространстве.

##### Число степеней свободы для различных моделей молекул

Газ	Модель молекулы	Число степеней свободы ( $i$ )			
		поступательные ( $i_{\text{пост}}$ )	вращательные ( $i_{\text{вращ}}$ )	колебательные ( $i_{\text{колеб}}$ )	всего
Одноатомный	Материальная точка 	3	—	—	3
Двухатомный	Две материальные точки, жесткая связь 	3	2	—	5
Двухатомный	Две материальные точки, нежесткая связь 	3	2	2	7
Трехатомный, многоатомный	Три (много) атома, жесткая связь 	3	3	—	6

## 2.43 Закон Больцмана

### о равномерном распределении энергии по степеням свободы

Энергия, приходящаяся на поступательную степень свободы

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{\langle \varepsilon_0 \rangle}{3} = \frac{kT}{2}$$

Независимо от общего числа степеней свободы молекул три степени свободы всегда поступательные. Ни одна из поступательных степеней свободы не имеет преимущества перед другими, поэтому на каждую из них приходится в среднем одинаковая энергия, равная  $\frac{1}{3}$  значения  $\langle \varepsilon_0 \rangle$  2.18.

## Закон Больцмана

### о равномерном распределении энергии по степеням свободы

Для статистической системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, на каждую поступательную и вращательную степени свободы приходится в среднем кинетическая энергия, равная  $\frac{kT}{2}$ , а на каждую колебательную степень свободы — в среднем энергия, равная  $kT$ . Колебательная степень «обладает» вдвое большей энергией потому, что на нее приходится не только кинетическая энергия (как в случае поступательного и вращательного движений), но и потенциальная, причем средние значения кинетической и потенциальной энергий одинаковы.

### Средняя кинетическая энергия молекулы

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT$$

[ $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{колеб}}$  ( $i$  — сумма числа поступательных, числа вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы)]

## 2.44 Внутренняя энергия ( $U$ ) термодинамической системы

### Определение внутренней энергии

Энергия хаотического (теплого) движения микрочастиц системы (молекул, атомов, электронов, ядер и т. д.) и энергия взаимодействия этих частиц.

◆ К внутренней энергии *не относятся* кинетическая энергия движения системы как целого и потенциальная энергия системы во внешних полях.

### Важнейшее свойство внутренней энергии

Внутренняя энергия — *однозначная функция* термодинамического состояния системы, т. е. в каждом состоянии система обладает вполне определенной внутренней энергией (она не зависит от того, как система пришла в данное состояние). Это означает, что при переходе системы из одного состояния в другое изменение внутренней энергии определяется *только разностью значений внутренней энергии этих состояний и не зависит от пути перехода.*

### Внутренняя энергия 1 моль идеального газа

$$U_m = \frac{i}{2} kT N_A = \frac{i}{2} RT$$

В идеальном газе взаимная потенциальная энергия молекул равна нулю (молекулы не взаимодействуют), поэтому  $U_m$  равна сумме кинетических энергий 2.43  $N_A$  молекул.

### Внутренняя энергия произвольной массы $m$ газа

$$U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT = \nu \frac{i}{2} RT$$

[ $M$  — молярная масса;  $\nu$  — количество вещества;  $k$  — постоянная Больцмана;  $R$  — молярная газовая постоянная;  $N_A$  — постоянная Авогадро;  $i$  — число степеней свободы молекулы]

## 2.2.2. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

### 2.45 Работа и теплота

Качественно различные способы изменения внутренней энергии замкнутой термодинамической системы

**Работа, совершаемая над системой**

Энергия, передаваемая термодинамической системе внешними телами.

**Пример:** при движении поршня в цилиндр с газом газ сжимается, его температура повышается, т. е. изменяется (увеличивается) внутренняя энергия газа.

**Сообщение теплоты**

Энергия, передаваемая термодинамической системе внешними телами путем теплообмена.

**Пример:** температуру газа и его внутреннюю энергию можно увеличить, сообщая системе некоторое количество теплоты (процесс обмена внутренними энергиями при контакте тел с различными температурами).

**Две формы передачи энергии от одних тел к другим**

*Работа и теплота.* Эти понятия имеют смысл лишь в связи с процессом изменения состояния термодинамической системы, в то время как внутренняя энергия — однозначная функция состояния этой системы.

### 2.46 Первое начало термодинамики

*Первое начало термодинамики — закон сохранения и превращения энергии применительно к термодинамическим процессам.*

**Первое начало термодинамики**

$$Q = \Delta U + A$$

Теплота, сообщаемая системе, расходуется на изменение ее внутренней энергии и на совершение ею работы против внешних сил.

Опыт показывает, что в соответствии с *законом сохранения энергии* при любом способе перехода системы из первого состояния во второе изменение внутренней энергии  $\Delta U = U_2 - U_1$  будет одинаковым и равным разности между количеством теплоты  $Q$ , полученным системой, и работой  $A$ , совершенной системой против внешних сил:  $\Delta U = Q - A$  или  $Q = \Delta U + A$ .

**Запись первого начала в дифференциальной форме**

$$dQ = dU + dA,$$

более корректно

$$\delta Q = dU + \delta A$$

[ $dU$  — бесконечно малое изменение внутренней энергии системы;  $\delta A$  — элементарная работа;  $\delta Q$  — бесконечно малое количество теплоты. В этом выражении  $dU$  является полным дифференциалом, а  $\delta A$  и  $\delta Q$  таковыми не являются]

**Вечный двигатель первого рода**

Периодически действующий двигатель, который совершал бы большую работу, чем сообщенная ему извне энергия.

**Еще одна формулировка первого начала термодинамики**

Вечный двигатель первого рода невозможен.

Если система *периодически* возвращается в первоначальное состояние, то изменение ее внутренней энергии  $\Delta U = 0$ . Тогда, согласно первому началу термодинамики,  $A = Q$ , откуда и следует записанная формулировка.

## 2.2.3. РАБОТА ГАЗА ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ЕГО ОБЪЕМА

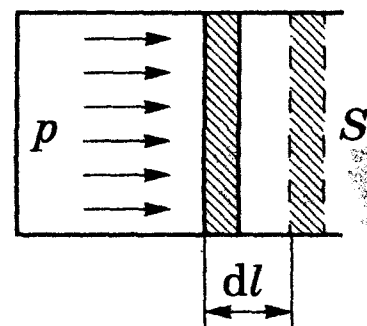
### 2.47 Работа, совершаемая идеальным газом при его расширении

#### Элементарная работа

$$\delta A = p dV$$

Газ, расширяясь, передвигает поршень на бесконечно малое расстояние  $dl$ , производит над ним работу

$$\delta A = F dl = pS dl = p dV.$$



#### Полная работа при изменении объема от $V_1$ до $V_2$

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

Это выражение справедливо при любых изменениях объема твердых, жидких и газообразных тел.

[ $S$  — площадь поршня;  $p$  — давление;  $S dl = dV$  — изменение объема системы]

### 2.48 Графическое изображение работы

#### Равновесный процесс

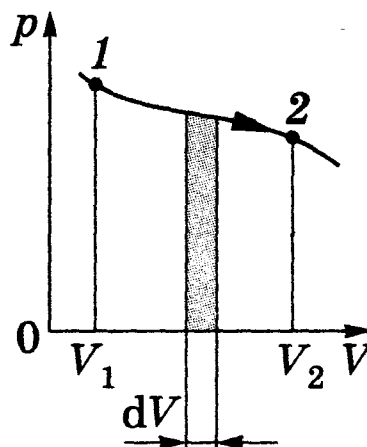
Процесс, в котором система проходит непрерывный ряд бесконечно близких термодинамически равновесных состояний (изменение термодинамических параметров за конечный промежуток времени бесконечно мало).

◆ *Все реальные процессы неравновесны* (они протекают с конечной скоростью), но в ряде случаев неравновесностью реальных процессов можно пренебречь (чем медленнее процесс протекает, тем он ближе к равновесному).

Графически можно изображать только *равновесные процессы*.

#### Графическое представление работы

Изменение давления газа при его расширении задано на рисунке произвольной кривой. При увеличении объема на  $dV$  совершаемая газом работа равна  $p dV$ , т. е. определяется площадью заштрихованной полоски. Полная работа, совершаемая газом при расширении от объема  $V_1$  до объема  $V_2$ , определяется площадью, ограниченной осью абсцисс, кривой  $p(V)$  и прямыми  $V_1$  и  $V_2$ .



## 2.2.4. ТЕПЛОЕМКОСТИ. УРАВНЕНИЕ МАЙЕРА

### 2.49 Теплоемкости и их единицы

Теплоемкость	$C = \frac{dQ}{dT}$	Величина, определяемая количеством теплоты, которое необходимо сообщить телу (системе), чтобы повысить его температуру на один кельвин
Единица теплоемкости	1 Дж/К	1 Дж/К — теплоемкость тела, температура которого повышается на 1 К при подведении к нему количества теплоты 1 Дж
Удельная теплоемкость	$c = \frac{\delta Q}{m dT}$	Величина, определяемая количеством теплоты, необходимым для нагревания 1 кг вещества на 1 К
Единица удельной теплоемкости	$1 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$	1 Дж/(кг · К) — удельная теплоемкость вещества, 1 кг которого обладает теплоемкостью 1 Дж/К
Молярная теплоемкость	$C_m = \frac{\delta Q}{\nu dt}$	Величина, определяемая количеством теплоты, необходимым для нагревания 1 моль вещества на 1 К
Единица молярной теплоемкости	$1 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$	1 Дж/(моль · К) — молярная теплоемкость вещества, имеющего при количестве вещества 1 моль теплоемкость 1 Дж/К



Связь удельной и молярной теплоемкостей	$C_m = cM$	Различают теплоемкости (удельную и молярную) при постоянном объеме ( $c_v$ и $C_v$ ) и постоянном давлении ( $c_p$ и $C_p$ ), если в процессе нагревания вещества его объем или давление поддерживаются постоянными
---	------------	---

[ $M$  — молярная масса;  $m$  — масса вещества;  $\nu = \frac{m}{M}$  — количество вещества]

## 2.50 Молярные теплоемкости при постоянных объеме и давлении

Молярная теплоемкость при постоянном объеме	$C_v = \frac{dU_m}{dT}$	Записав первое начало термодинамики $\delta Q = dU + \delta A$ и учитывая, что $\delta A = p dV$ , $C_m = \frac{\delta Q}{\nu dT}$ , для 1 моль газа получим $C_m dT = dU_m + p dV_m$ . При $V = \text{const}$ работа внешних сил равна нулю и сообщаемая газу извне теплота идет только на увеличение его внутренней энергии: $C_v = \frac{dU_m}{dT}$ . Теплоемкость $C_v$ равна изменению внутренней энергии 1 моль газа при повышении его температуры на 1 К.
	$C_v = \frac{i}{2} R$	$dU_m = \frac{i}{2} R dT$ 2.44. Подставив это выражение в формулу $C_v = \frac{dU_m}{dT}$ , получим записанное выражение.
Уравнение Майера	$C_p = C_v + R$	$\delta Q = dU + \delta A; \delta A = p dV; C_p = \frac{\delta Q}{\nu dT},$ тогда для 1 моль газа (при постоянном давлении) $C_p = \frac{dU_m}{dT} + \frac{p dU_m}{dT}.$ $\frac{dU_m}{dT}$ не зависит от вида процесса (внутренняя энергия идеального газа не зависит ни от $p$ , ни от $V$ , а определяется лишь $T$ ) и всегда равна $C_v$ . Дифференцируя $pV_m = RT$ по $T$ ( $p = \text{const}$ ), получаем уравнение Майера: $C_p = C_v + R$ .
Толкование уравнения Майера	$C_p = C_v + R$	$C_p$ всегда больше $C_v$ на величину молярной газовой постоянной. Это объясняется тем, что при нагревании газа при постоянном давлении требуется еще дополнительное количество теплоты на совершение работы расширения газа, так как постоянство давления обеспечивается увеличением объема газа.
Молярная теплоемкость при постоянном давлении	$C_p = \frac{i+2}{2} R$	Учитывая, что $C_v = \frac{i}{2} R$ , из уравнения Майера $C_p = C_v + R$ получаем записанное выражение.

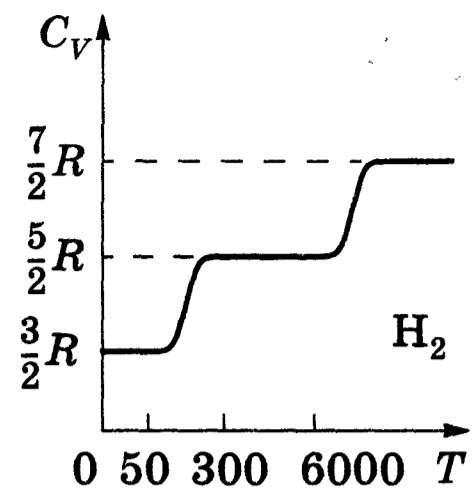
[ $R$  — молярная газовая постоянная;  $i$  — число степеней свободы]

## 2.51 Температурная зависимость молярных теплоемкостей

Из формул 2.50 следует, что молярные теплоемкости определяются лишь числом степеней свободы и не зависят от температуры. Это утверждение молекулярно-кинетической теории справедливо в довольно широком интервале температур лишь для одноатомных газов. Уже у двухатомных газов число степеней свободы, проявляющееся в теплоемкости, зависит от температуры. Молекула двухатомного газа обладает тремя поступательными, двумя вращательными и одной колебательной степенями свободы.

## Качественная экспериментальная зависимость $C_V$ водорода от температуры

Согласно закону равномерного распределения энергии по степеням свободы **2.43**, для комнатных температур  $C_V = \frac{7}{2}R$ . Из рисунка следует, что  $C_V$  зависит от температуры: при низкой температуре ( $\approx 50$  К)  $C_V = \frac{3}{2}R$ , при комнатной  $C_V = \frac{5}{2}R$  (вместо расчетных  $\frac{7}{2}R$ !) и при очень высокой  $C_V = \frac{7}{2}R$ . Это



можно объяснить, предположив, что при низких температурах наблюдается только поступательное движение молекул, при комнатных — добавляется их вращение, а при высоких — к этим двум видам движения добавляются еще колебания молекул.

### 2.52 Значения $i$ , $C_V$ , $C_p$ и $\gamma = C_p/C_V$ при комнатной температуре

Газ	$i$	$C_V$	$C_p$	$\gamma$
Одноатомный	3	$\frac{3}{2}R$	$\frac{5}{2}R$	1,67
Двухатомный	5	$\frac{5}{2}R$	$\frac{7}{2}R$	1,4
Многоатомный	6	$3R$	$4R$	1,33

[ $i$  — число степеней свободы;  $C_V$  — молярная теплоемкость при постоянном объеме;  $C_p$  — молярная теплоемкость при постоянном давлении;  $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$  — характерное для каждого газа отношение]

### 2.53 Экспериментальные значения $C_V$ , $C_p$ и $\gamma$ ( $t = 20$ °С, $p = 1,013 \cdot 10^5$ Па)

Газ		$C_V$ Дж/(кг · К)	$C_p$ Дж/(моль · К)	$\gamma$
Одноатомный	гелий He	12,47	20,80	1,67
	аргон Ar	12,47	20,80	1,67
Двухатомный	водород H <sub>2</sub>	20,43	28,76	1,41
	кислород O <sub>2</sub>	21,06	29,43	1,40
	азот N <sub>2</sub>	20,76	29,09	1,40
	воздух	20,77	29,10	1,40
Многоатомный	двуокись углерода CO <sub>2</sub>	28,46	36,96	1,30
	двуокись серы SO <sub>2</sub>	31,40	40,39	1,29
	метан CH <sub>4</sub>	26,19	34,59	1,32
	аммиак NH <sub>3</sub>	27,84	36,84	1,31

## 2.2.5. ПРИМЕНЕНИЕ ПЕРВОГО НАЧАЛА ТЕРМОДИНАМИКИ К ИЗОПРОЦЕССАМ

### 2.54 Изохорный процесс ( $V = \text{const}$ )

#### Изопроецессы

Равновесные процессы, в которых один из основных параметров поддерживается постоянным.

#### Изохора

В координатах  $p, V$  — прямая, параллельная оси ординат (на рисунке процесс  $1-2$  — изохорное нагревание).

#### Работа

0

$$\delta A = p dV = 0$$

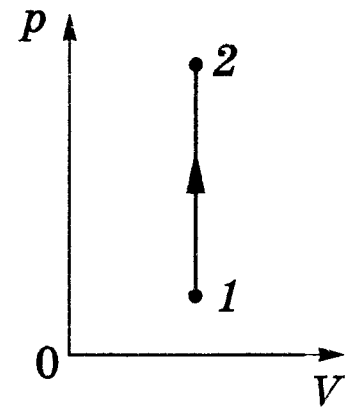
(газ не совершает работы над внешними телами).

#### Первое начало термодинамики

$$\delta Q = dU + \delta A,$$

$$\delta Q = dU$$

Теплота, сообщенная газу в изохорном процессе, идет на увеличение его внутренней энергии.



#### Теплота. Внутренняя энергия

$$\delta Q = dU = \frac{m}{M} C_V dT$$

$dU_m = C_V dT$  2.50, тогда для произвольной массы газа и получается записанная формула.

### 2.55 Изобарный процесс ( $p = \text{const}$ )

#### Изобара

В координатах  $p, V$  — прямая, параллельная оси  $V$ .

#### Работа изобарного расширения

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1)$$

Определяется площадью закрашенного прямоугольника.

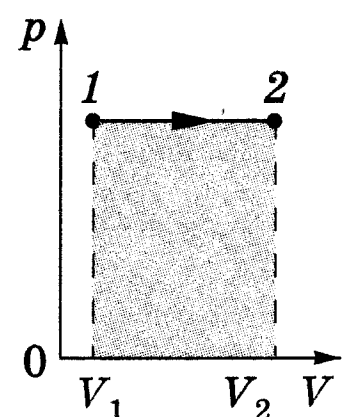
$$A = \frac{m}{M} R (T_2 - T_1)$$

Из уравнения Клапейрона—Менделеева

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

получаем:

$$V_2 - V_1 = \frac{m R}{M p} (T_2 - T_1).$$



#### Физический смысл молярной газовой постоянной

Если в выражении работы изобарного расширения

$$A = \frac{m}{M} R (T_2 - T_1)$$

$T_2 - T_1 = 1 \text{ К}$ , то для 1 моль газа  $R = A$ ,

т. е. молярная газовая постоянная  $R$  численно равна работе изобарного расширения 1 моль идеального газа при нагревании его на 1 К.

## Теплота

$$\delta Q = \frac{m}{M} C_p dT$$

В изобарном процессе при сообщении газу массой  $m$  количества теплоты  $\delta Q$  его внутренняя энергия возрастает на величину  $dU$  и при этом газ совершает работу  $A = \frac{m}{M} R (T_2 - T_1)$ .

## Внутренняя энергия

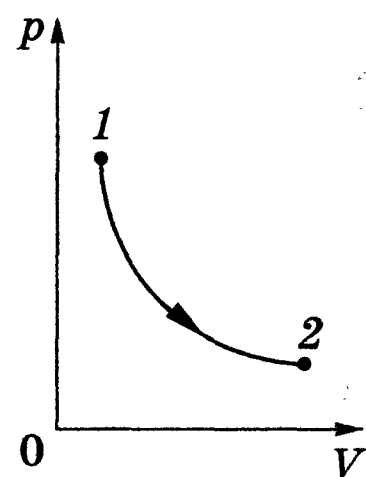
$$dU = \frac{m}{M} C_v dT$$

[ $m$  — масса газа;  $M$  — молярная масса]

## 2.56 Изотермический процесс ( $T = \text{const}$ )

### Изотерма

В координатах  $p, V$  — гипербола ( $pV = \text{const}$ ). На рисунке процесс  $1-2$  — изотермическое расширение.



### Работа изотермического расширения

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\delta A = p dV, pV = \frac{m}{M} RT;$$

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}$$

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M} RT \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

### Первое начало термодинамики

$$\delta Q = dU + \delta A,$$

$$\delta Q = \delta A$$

Все количество теплоты, сообщаемое газу, расходуется на совершение им работы против внешних сил.

### Внутренняя энергия

$$dU = \frac{m}{M} C_v dT = 0$$

При  $T = \text{const}$  внутренняя энергия идеального газа не изменяется.

### Теплота

$$Q = A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}$$

Чтобы при расширении газа его температура не понижалась, к газу в течение изотермического процесса необходимо подводить количество теплоты, эквивалентное внешней работе расширения.

## 2.2.6. АДИАБАТНЫЙ И ПОЛИТРОПНЫЙ ПРОЦЕССЫ

### 2.57 Адиабатный процесс и его уравнение

#### Адиабатный процесс

$$\delta Q = 0$$

Процесс, при котором отсутствует теплообмен между системой и окружающей средой.

**Примеры:** сжатие и расширение воздуха в звуковой волне, расширение и сжатие горючей смеси в цилиндрах двигателей внутреннего сгорания.

◆ Условие  $\delta Q = 0$  (полная теплоизоляция) на практике неосуществимо. Это условие выполняется приближенно для быстропротекающих процессов.

## Первое начало термодинамики

$$\delta Q = dU + \delta A,$$

$$\delta A = -dU$$

В случае адиабатного процесса система совершает работу за счет убыли внутренней энергии системы.

## Уравнение адиабатного процесса (уравнение Пуассона)

$$pV^\gamma = \text{const}$$

$$\delta A = -dU, p dV = -\frac{m}{M} C_V dT. \quad (*)$$

Продифференцировав  $pV = \frac{m}{M} RT$ , получим

$$p dV + V dp = \frac{m}{M} R dT. \quad (**)$$

Разделив (\*\*) на (\*) и учитывая, что  $R = C_p - C_V$  и  $\frac{C_p}{C_V} = \gamma$  2.52, найдем  $\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V}$ . Тогда  $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$  или  $pV^\gamma = \text{const}$  (состояния 1 и 2 были выбраны произвольно).

## Уравнения адиабатного процесса в переменных $T, V$ и $p, T$

$$TV^{\gamma-1} = \text{const},$$

$$T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const}$$

Для перехода к переменным  $T, V$  или  $p, T$  из  $pV^\gamma = \text{const}$  следует, применяя уравнение Клапейрона—Менделеева

$$pV = \frac{m}{M} RT, \text{ исключить соответственно давление или объем.}$$

## Показатель адиабаты (показатель Пуассона)

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{c_p}{c_V} = \frac{i+2}{i}$$

Для одноатомных газов  $i = 3$ ,  $\gamma = 1,67$ ; для двухатомных —  $i = 5$ ;  $\gamma = 1,4$  2.52. Эти значения хорошо подтверждаются экспериментом 2.53.

[ $i$  — число степеней свободы;  $C_p$  и  $C_V$ ,  $c_p$  и  $c_V$  — соответственно молярные и удельные теплоемкости при постоянных давлении и объеме]

## 2.58 Адиабата

### Адиабата

График зависимости между параметрами состояния идеального газа при  $\delta Q = 0$ .

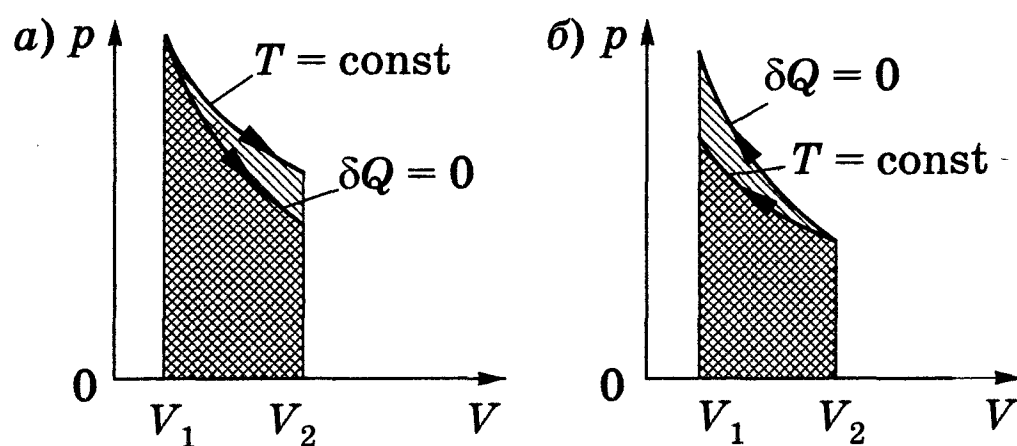
В координатах  $p, V$  — это гиперболоид (определяется уравнением  $pV^\gamma = \text{const}$ ).

[ $\gamma$  — показатель адиабаты]

## Сравнение адиабатного и изотермического процессов

В адиабатном ( $pV^\gamma = \text{const}$ ) и изотермическом ( $pV = \text{const}$ ) процессах наблюдаются существенные различия в характере изменения давления при расширении (рисунок а) и сжатии (рисунок б). Поскольку  $\gamma > 1$ , адиабата идет круче, чем изотерма. Это можно объ-

яснить тем, что при адиабатном сжатии газ нагревается (увеличение  $p$  обусловлено не только уменьшением  $V$  (как при изотермическом процессе), но и повышением температуры). При адиабатном расширении газ охлаждается (уменьшение  $p$  обусловлено не только увеличением  $V$  (как при изотермическом процессе), но и уменьшением температуры).



## 2.59 Работа газа в адиабатном процессе

### Работа газа в адиабатном процессе

$$A = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2)$$

$$\delta A = -dU \quad 2.57, \quad dU = \frac{m}{M} C_V dT \quad 2.50,$$

$$\delta A = -\frac{m}{M} C_V dT, \quad A = -\frac{m}{M} C_V \int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2).$$

Если газ адиабатически расширяется от объема  $V_1$  до  $V_2$ , то его температура уменьшается от  $T_1$  до  $T_2$ .

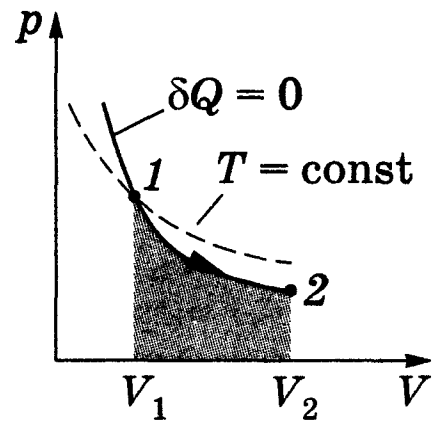
$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right] = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \frac{m}{M} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right]$$

Для перехода к переменным  $p, V$  в формуле  $A = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2)$  следует, применяя уравнение Клапейрона  $pV = \frac{m}{M} RT$ , исключить температуру.

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M} RT_1.$$

### Сравнение работы газа при адиабатном и изотермическом расширении

Работа, совершаемая газом при адиабатном расширении 1-2 (определяется закрашенной на рисунке площадью), меньше, чем при изотермическом: при адиабатном расширении происходит охлаждение газа, тогда как при изотермическом температура поддерживается постоянной за счет притока извне эквивалентного количества теплоты.



## 2.60 Политропный процесс

### Политропный процесс

$$C = \text{const}$$

Процесс, в котором теплоемкость остается постоянной.

### Уравнение и график политропного процесса

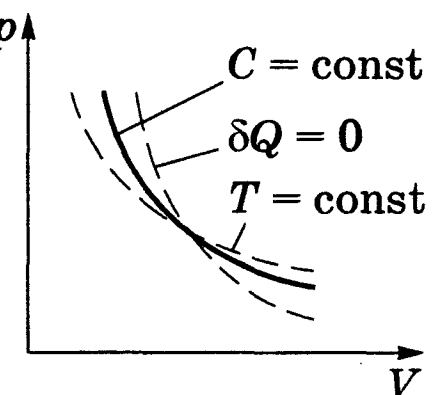
$$pV^n = \text{const}$$

*Политропа* — график зависимости между параметрами состояния при  $C = \text{const}$ .

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V}$$

В координатах  $p, V$  — гипербола (определяется уравнением  $pV^n = \text{const}$ ); занимает промежуточное положение между изотермой и адиабатой.

[ $n$  — показатель политропы,  $1 < n < \gamma$ ]



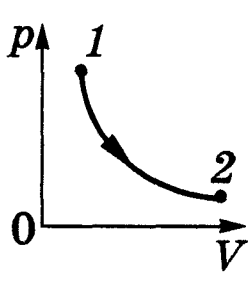
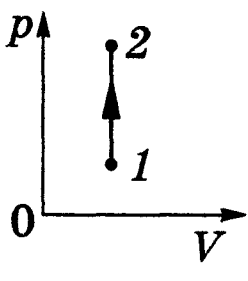
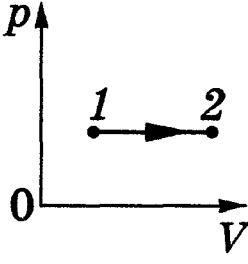
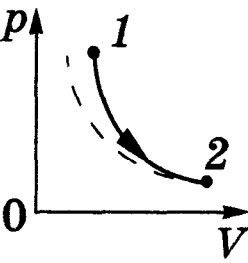
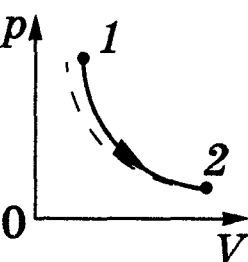
### Частные случаи политропного процесса

$C = 0$	$n = \gamma$	$pV^\gamma = \text{const}$	Уравнение адиабаты
$C = \infty$	$n = 1$	$pV = \text{const}$	Уравнение изотермы
$C = C_p$	$n = 0$	$p = \text{const}$	Уравнение изобары
$C = C_V$	$n = \pm\infty$	$V = \text{const}$	Уравнение изохоры

[ $p$  — давление газа;  $V$  — объем газа;  $\gamma$  — показатель адиабаты;  $C_p$  и  $C_V$  — соответственно молярные теплоемкости при постоянных давлении и объеме]



## 2.61 Сравнение различных газовых процессов

Название процесса	Условие процесса	$p, V$ -диаграмма	Закон	Первое начало термодинамики применительно к процессу	Изменение внутренней энергии $dU$	Работа $A$
Изотермический 2.56	$T = \text{const}$		$pV = \text{const}$	$\delta Q = dA$	0	$\frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$
Изохорный 2.54	$V = \text{const}$		$\frac{p}{T} = \text{const}$	$\delta Q = dU$	$\frac{m}{M} C_V dT$	0
Изобарный 2.55	$p = \text{const}$		$\frac{V}{T} = \text{const}$	$\delta Q = dU + \delta A$	$\frac{m}{M} C_V dT$	$p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M} R (T_2 - T_1)$
Адиабатный 2.57-2.59	$\delta Q = 0$		$pV^\gamma = \text{const},$ $TV^{\gamma-1} = \text{const},$ $T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const}$	$\delta A = -dU$	$\frac{m}{M} C_V dT$	$\frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2)$
Политропный 2.60	$C = \text{const}$		$pV^n = \text{const},$ $TV^{n-1} = \text{const},$ $T^n p^{1-n} = \text{const}$	$\delta Q = dU + \delta A$	$\frac{m}{M} C_V dT$	$\frac{m}{M} \frac{R}{(n-1)} (T_1 - T_2)$

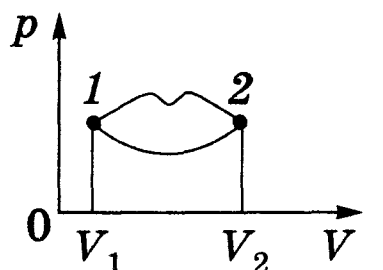
### 2.2.7. КРУГОВОЙ ПРОЦЕСС (ЦИКЛ). ОБРАТИМЫЕ И НЕОБРАТИМЫЕ ПРОЦЕССЫ

#### 2.62 Круговой процесс и его термический КПД

##### Круговой процесс (цикл)

Процесс, при котором система, пройдя через ряд состояний, возвращается в исходное состояние.

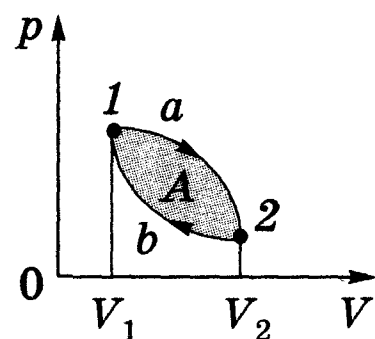
◆ На диаграмме состояний цикл изображается замкнутой кривой.



## Прямой цикл и его применение

Цикл, за который совершается положительная работа  $A = \oint p dV > 0$  (цикл протекает по часовой стрелке).

Работа расширения (процесс  $1a2$ ), определяемая площадью фигуры  $1a2V_2V_11$ , положительна ( $dV > 0$ ). Работа сжатия (процесс  $2b1$ ), определяемая площадью фигуры  $2b1V_1V_22$ , отрицательна ( $dV < 0$ ).



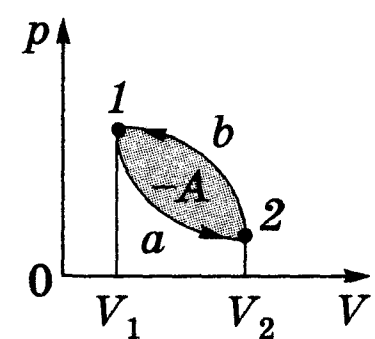
Работа, совершаемая газом за цикл, определяется площадью, охватываемой замкнутой кривой.

Прямой цикл используется в *тепловых двигателях* — периодически действующих двигателях, совершающих работу за счет полученной извне теплоты.

## Обратный цикл и его применение

Цикл, за который совершается отрицательная работа  $A = \oint p dV < 0$  (цикл протекает против часовой стрелки).

Работа расширения (процесс  $1a2$ ), определяемая площадью фигуры  $1a2V_2V_11$ , положительна ( $dV > 0$ ). Работа сжатия (процесс  $2b1$ ), определяемая площадью фигуры  $2b1V_1V_22$ , отрицательна ( $dV < 0$ ).



Работа за цикл определяется площадью, охватываемой замкнутой кривой.

Обратный цикл используется в *холодильных машинах* — периодически действующих установках, в которых за счет работы внешних сил теплота переносится к телам с более высокой температурой.

## Коэффициент полезного действия для кругового процесса

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

В результате кругового процесса система возвращается в исходное состояние, т. е. изменение внутренней энергии газа равно нулю. Согласно первому началу термодинамики **2.45**,  $Q = \Delta U + A = A$ , т. е. работа, совершаемая за цикл, равна количеству полученной извне теплоты.  $Q = Q_1 - Q_2$ . КПД для кругового процесса

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

## 2.63 Обратимые и необратимые процессы

### Обратимый процесс

Термодинамический процесс, который может происходить как в прямом, так и в обратном направлении, причем если такой процесс происходит сначала в прямом, а затем в обратном направлении и система возвращается в исходное состояние, то в окружающей среде и в этой системе не происходит никаких изменений.

### Необратимый процесс

Всякий процесс, не удовлетворяющий условию обратимости процесса.

◆ Все реальные процессы необратимы, поскольку сопровождаются диссипацией энергии (из-за трения, теплопроводности и т. д.).

### Важность изучения обратимых процессов

*Обратимые процессы* — это идеализация реальных процессов. Их рассмотрение существенно по двум причинам: 1) многие процессы в природе

и технике практически обратимы; 2) обратимые процессы являются наиболее экономичными; имеют максимальный термический коэффициент полезного действия, что позволяет указать пути повышения КПД реальных тепловых двигателей.

## 2.2.8. ЭНТРОПИЯ

### 2.64 Понятие энтропии. Неравенство Клаузиуса

*Качественное отличие теплового движения молекул от других форм движения — его беспорядочность, хаотичность. Поэтому для описания теплового движения вводят количественную меру степени молекулярного беспорядка.*

#### Приведенное количество теплоты

$$\frac{Q}{T}$$

Отношение теплоты  $Q$ , полученной телом в изотермическом процессе, к температуре  $T$  теплоотдающего тела.

$$\frac{\delta Q}{T}$$

*Приведенное количество теплоты, сообщаемое телу на бесконечно малом участке процесса.*

#### Определение энтропии

$$S$$

Функция состояния, дифференциалом которой является  $\frac{\delta Q}{T}$ .

Приведенное количество теплоты, сообщаемое телу в любом обратимом круговом процессе, равно нулю:  $\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$ . Полученный результат означает, что этот интеграл не зависит от пути интегрирования (последовательности промежуточных состояний), т. е. подынтегральное выражение  $\frac{\delta Q}{T}$  есть полный дифференциал некоторой функции, которая определяется только состоянием системы и не зависит от пути, которым система пришла в это состояние, или от предыстории системы.

#### Единица энтропии

$$1 \text{ Дж/К}$$

1 Дж/К — изменение энтропии системы, которой при температуре  $n$  К в изотермическом процессе сообщается количество теплоты  $n$  Дж.

#### Неравенство Клаузиуса

$$\Delta S \geq 0$$

*Энтропия замкнутой системы может либо возрасть (в случае необратимых процессов), либо оставаться постоянной (в случае обратимых процессов).*

◆ Это выражение относится только к замкнутым системам. Если система обменивается теплотой с внешней средой, то ее энтропия может вести себя любым образом.

### 2.65 Изменение энтропии

#### Изменение энтропии системы

при ее равновесном переходе из состояния 1 в состояние 2

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU + \delta A}{T}$$

Подынтегральное выражение и пределы интегрирования определяются через величины, характеризующие исследуемый процесс. Из формулы следует, что энтропия определяется с точностью до аддитивной постоянной.

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \frac{m}{M} \left( C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right)$$

Физический смысл имеет не сама энтропия, а разность энтропий (важны только изменения состояний).

$$dU = \frac{m}{M} C_V dT, \delta A = p dV = \frac{m}{M} RT \frac{dV}{V},$$

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \frac{m}{M} C_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{m}{M} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} \left( C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right).$$

Изменение энтропии  $\Delta S_{1 \rightarrow 2}$  идеального газа при переходе его из состояния 1 в состояние 2 не зависит от вида процесса перехода 1 → 2.

### Изоэнтروпийный процесс ( $S = \text{const}$ )

*Адиабатный обратимый процесс.*

Для адиабатного процесса  $\delta Q = 0$ , поэтому  $\Delta S = 0$  и, следовательно,  $S = \text{const}$ , т. е. *адиабатный обратимый процесс протекает при постоянной энтропии.*

### Изменение энтропии в изотермическом и изохорном процессах

$$\Delta S = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

изотермический процесс ( $T_1 = T_2$ )

$$\Delta S = \frac{m}{M} C_V \ln \frac{T_2}{T_1}$$

изохорный процесс ( $V_1 = V_2$ )

[ $m$  — масса газа;  $R$  — молярная газовая постоянная;  $U$  — внутренняя энергия;  $A$  — работа системы против внешних сил;  $T_1$  и  $T_2$  — соответственно начальная и конечная температуры;  $C_V$  — молярная теплоемкость при постоянном объеме;  $V_1$  и  $V_2$  — соответственно начальный и конечный объемы;  $M$  — молярная масса газа]

### Аддитивность энтропии

Энтропия системы равна сумме энтропий тел, входящих в систему. Свойством аддитивности обладают также внутренняя энергия, масса, объем (температура и давление таким свойством не обладают).

## 2.66 Статистическое толкование энтропии

### Термодинамическая вероятность ( $W$ ) системы

*Число способов, которыми может быть реализовано данное состояние макроскопической системы, или число микросостояний, осуществляющих данное макросостояние.*

◆ По определению  $W \geq 1$ , т. е. термодинамическая вероятность не есть вероятность в математическом смысле (последняя  $\leq 1$ !).

### Формула Больцмана

$$S = k \ln W$$

Энтропия определяется логарифмом числа микросостояний, с помощью которых может быть реализовано данное макросостояние ( $k$  — постоянная Больцмана).

◆ Энтропия — *мера вероятности* состояния термодинамической системы.

### Статистическое толкование энтропии

*Энтропия является мерой неупорядоченности системы.* В самом деле, чем больше число микросостояний, реализующих данное макросостояние, тем больше энтропия. В состоянии равновесия — наиболее вероятного состояния системы — число микросостояний максимально, при этом максимальна и энтропия.

## Принцип возрастания энтропии

---

Все процессы в замкнутой системе ведут к увеличению ее энтропии (ведь все *реальные* процессы *необратимы*).

При статистическом толковании энтропии это означает, что процессы в замкнутой системе идут в направлении увеличения числа микросостояний, иными словами, от менее вероятных состояний к более вероятным, до тех пор пока вероятность состояния не станет максимальной.

## Общие выводы

---

Согласно неравенству Клаузиуса ( $\Delta S \geq 0$ ) и формуле Больцмана ( $S = k \ln W$ ), энтропия и термодинамическая вероятность состояний замкнутой системы могут либо возрасть (в случае необратимых процессов), либо оставаться постоянными (в случае обратимых процессов).

Необратимые процессы протекают самопроизвольно до тех пор, пока система не достигнет состояния, отвечающего наибольшей вероятности (энтропия при этом достигает своего максимума).

**Примеры:** перемешивание молекул двух газов при диффузии или выравнивание температур двух газов с разными исходными температурами.

## 2.2.9. ВТОРОЕ И ТРЕТЬЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

### 2.67 Второе начало термодинамики

---

#### Необходимость введения второго начала термодинамики

---

Первое начало термодинамики **2.46**, выражая закон сохранения и превращения энергии, не позволяет установить направление протекания термодинамических процессов. Кроме того, можно представить множество процессов, не противоречащих первому началу, в которых энергия сохраняется, а в природе они не осуществляются.

Появление второго начала термодинамики связано с необходимостью дать ответ на вопрос, какие процессы в природе возможны, а какие нет. Второе начало термодинамики определяет направление протекания термодинамических процессов.

#### Формулировки второго начала термодинамики

---

##### как закон возрастания энтропии при необратимых процессах

Любой необратимый процесс в замкнутой системе происходит так, что энтропия системы при этом возрастает или *в процессах, происходящих или в замкнутой системе, энтропия не убывает*.

◆ Существенно, что речь идет о замкнутых системах, так как в незамкнутых системах энтропия может вести себя любым образом.

##### по Кельвину

Невозможен круговой процесс, единственным результатом которого является превращение теплоты, полученной от нагревателя, в эквивалентную ей работу.

##### по Клаузиусу

Невозможен круговой процесс, *единственным результатом* которого является передача теплоты от менее нагретого тела к более нагретому.

◆ В обеих формулировках следует обратить внимание на слова «единственным результатом»: запреты второго начала сразу снимаются, если процессы, о которых идет речь, не являются единственными.

Возрастание энтропии означает переход системы из менее вероятных в более вероятные состояния. Второе начало, являясь статистическим законом, описывает закономерности хаотического движения большого числа частиц, составляющих замкнутую систему.

### Вечный двигатель второго рода

Периодически действующий двигатель, совершающий работу за счет одного источника теплоты.

### Еще одна формулировка второго начала термодинамики

Вечный двигатель второго рода невозможен.

### Проблема так называемой тепловой смерти Вселенной

Рассматривая Вселенную как замкнутую систему и применяя к ней второе начало термодинамики, Клаузиус свел его содержание к утверждению, что энтропия Вселенной должна достигнуть своего максимума. Это означает, что со временем все формы движения должны перейти в тепловую. Переход же теплоты от горячих тел к холодным приведет к тому, что температура всех тел во Вселенной сравняется, т. е. наступит полное тепловое равновесие и все процессы во Вселенной прекратятся — наступит тепловая смерть Вселенной. Ошибочность вывода о тепловой смерти заключается в том, что бессмысленно применять второе начало термодинамики к незамкнутым системам, например к такой безграничной и бесконечно развивающейся системе, как Вселенная.

## 2.68 Третье начало термодинамики

### Теорема Нернста—Планка (третье начало термодинамики)

$$\lim_{T \rightarrow 0} S \rightarrow 0$$

Энтропия всех тел в состоянии равновесия стремится к нулю по мере приближения температуры к нулю.

◆ Энтропия определяется с точностью до аддитивной постоянной, поэтому эту постоянную удобно взять равной нулю. Однако это — произвольное допущение, поскольку энтропия по своей сущности всегда определяется с точностью до аддитивной постоянной. Из теоремы Нернста—Планка следует, что теплоемкости  $C_p$  и  $C_v$  при 0 К равны нулю.

## 2.2.10. ТЕПЛОВЫЕ ДВИГАТЕЛИ И ХОЛОДИЛЬНЫЕ МАШИНЫ

### 2.69 Тепловой двигатель. Теорема Карно

#### Тепловой двигатель

Периодически действующий двигатель, совершающий работу за счет полученной извне теплоты.

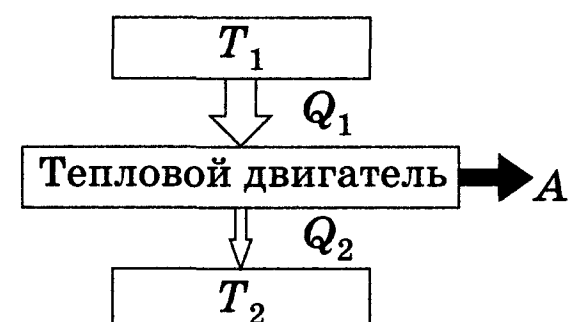
В тепловых двигателях используется *прямой цикл* 2.62.

#### Термостат

Термодинамическая система, которая может обмениваться теплотой с телами без изменения температуры.

#### Принцип работы теплового двигателя

От термостата с более высокой температурой  $T_1$ , называемого *нагревателем*, за цикл отнимается количество теплоты  $Q_1$ , а термостату с более низкой температурой  $T_2$ , называемому *холодильником*, за цикл передается количество теплоты  $Q_2$ , при этом совершается работа  $A = Q_1 - Q_2$ .





## КПД теплового двигателя

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

Чтобы  $\eta = 1$ , необходимо  $Q_2 = 0$  (тепловой двигатель должен иметь один источник теплоты!). Карно показал, что для работы теплового двигателя необходимо не менее двух источников теплоты с различными температурами (иначе это противоречит второму началу термодинамики [2.67](#)).

## Теорема Карно

Из всех периодически действующих тепловых машин, имеющих одинаковые температуры нагревателей ( $T_1$ ) и холодильников ( $T_2$ ), наибольшим КПД обладают обратимые машины; при этом КПД обратимых машин, работающих при одинаковых температурах нагревателей ( $T_1$ ) и холодильников ( $T_2$ ), равны друг другу и не зависят от природы рабочего тела (тела, совершающего круговой процесс и обменивающегося энергией с другими телами), а определяются только температурами нагревателя и холодильника.

## 2.70 Холодильная машина

### Холодильная машина

Периодически действующая установка, в которой за счет работы внешних сил теплота переносится к телу с более высокой температурой.

### Принцип работы холодильной машины

Системой за цикл от термостата с более низкой температурой  $T_2$  отнимается количество теплоты  $Q_2$  и отдается термостату с более высокой температурой  $T_1$  количество теплоты  $Q_1$ . Для кругового процесса  $Q = A$  [2.62](#), но по условию  $Q = Q_2 - Q_1 < 0$ , поэтому  $A < 0$  и  $Q_2 - Q_1 = -A$  или  $Q_1 = Q_2 + A$ , т. е. количество теплоты  $Q_1$ , отданное системой источнику теплоты при более высокой температуре  $T_1$ , больше количества теплоты  $Q_2$ , полученного от источника теплоты при более низкой температуре  $T_2$ , на величину работы, совершенной над системой.



### Вывод из анализа работы холодильной машины и второе начало термодинамики

*Без совершения работы нельзя отбирать теплоту от менее нагретого тела и отдавать ее более нагретому.* Это утверждение есть не что иное, как второе начало термодинамики в формулировке Клаузиуса [2.67](#).

◆ Второе начало термодинамики вовсе не запрещает переход теплоты от менее нагретого тела к более нагретому. Именно такой переход осуществляется в холодильной машине. Но при этом следует помнить, что внешние силы совершают работу над системой, т. е. этот переход не является единственным результатом процесса.

### Холодильный коэффициент

$$\eta' = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$$

Характеризует эффективность холодильной машины и определяется как отношение отнятой от термостата [2.69](#) с более низкой температурой количества теплоты  $Q_2$  к работе  $A$ , которая затрачивается на приведение холодильной машины в действие.

## 2.2.11. ЦИКЛ КАРНО

### 2.71 Цикл Карно и работа за цикл

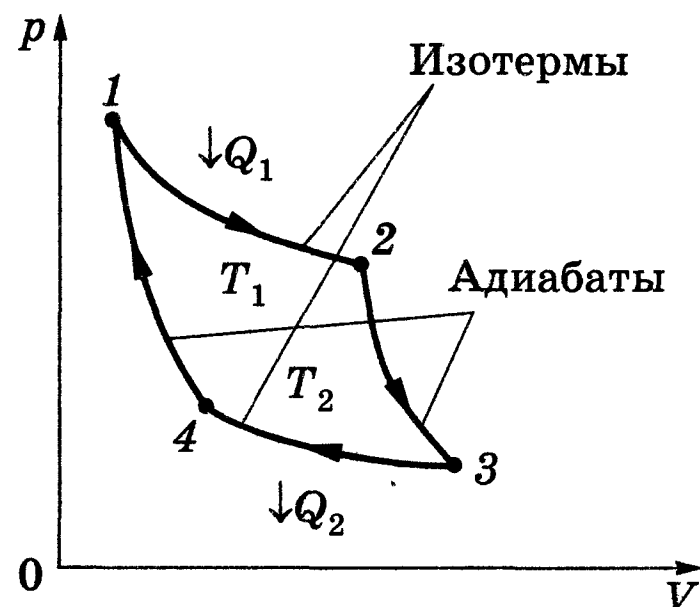
#### Цикл Карно

Наиболее экономичный обратимый круговой процесс, состоящий из двух изотерм и двух адиабат.

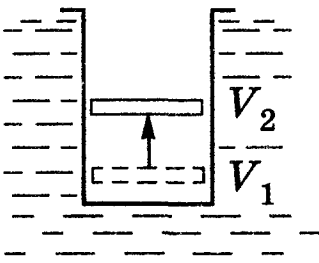
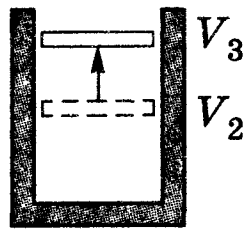
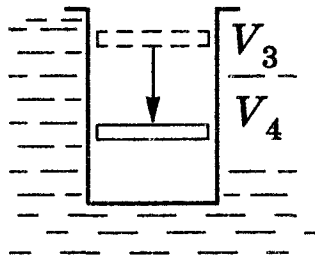
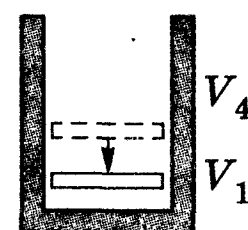
#### Последовательные процессы цикла Карно в диаграмме $p, V$

Наглядное изображение последовательных процессов приведено на рисунке.

Процесс  $1 \rightarrow 2$  — изотермическое расширение,  
 процесс  $2 \rightarrow 3$  — адиабатное расширение,  
 процесс  $3 \rightarrow 4$  — изотермическое сжатие,  
 процесс  $4 \rightarrow 1$  — адиабатное сжатие.



#### Рассматриваемый цикл Карно — прямой; рабочее тело — идеальный газ

$1 \rightarrow 2$	$2 \rightarrow 3$	$3 \rightarrow 4$	$4 \rightarrow 1$
Изотермическое расширение	Адиабатное расширение	Изотермическое сжатие	Адиабатное сжатие
			
Термостат $T_1$ $T_1 = \text{const}$	Тепловая изоляция $\delta Q = 0$	Термостат $T_2$ $T_2 = \text{const}$	Тепловая изоляция $\delta Q = 0$

#### Последовательное рассмотрение термодинамических процессов и работа в них

$$A_{12} = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_1$$

Изотермическое расширение  $1-2$   
 $T = \text{const}; V_2 > V_1$  2.56

$$A_{23} = -\frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1)$$

Адиабатное расширение  $2-3$   
 $\delta Q = 0; T_2 < T_1$  2.59

$$A_{34} = \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -Q_2$$

Изотермическое сжатие  $3-4$   
 $T = \text{const}; V_4 < V_3$  2.56

$$A_{41} = -\frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2) = -A_{23}$$

Адиабатное сжатие  $4-1$   
 $\delta Q = 0; T_1 > T_2$  2.59

#### Работа за цикл

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 + A_{23} - Q_2 - A_{23} = Q_1 - Q_2$$

Определяется площадью, ограниченной изотермами и адиабатами цикла Карно.

## 2.72 Термический КПД цикла Карно

### Термический КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Записав уравнение адиабатного процесса в виде  $TV^{\gamma-1} = \text{const}$  и используя рисунок 2.71, можем записать

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}, \quad T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1},$$

откуда  $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$ . Подставив эти выражения в формулу для термического КПД кругового процесса 2.62, получаем

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\frac{m}{M}RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{M}RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{\frac{m}{M}RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

**Вывод.** Для цикла Карно КПД действительно определяется только температурами нагревателя и холодильника (см. теорему Карно, 2.69).

### Теорема Карно — основа для установления термодинамической шкалы температур

Из выражения для  $\eta$  получаем  $\frac{T_2}{T_1} = \frac{Q_2}{Q_1}$ , т. е. для сравнения температур

$T_1$  и  $T_2$  двух тел необходимо осуществить обратимый цикл Карно, в котором одно тело используется в качестве нагревателя, другое — холодильника.

Из равенства  $\frac{T_2}{T_1} = \frac{Q_2}{Q_1}$  видно, что отношение температур тел равно

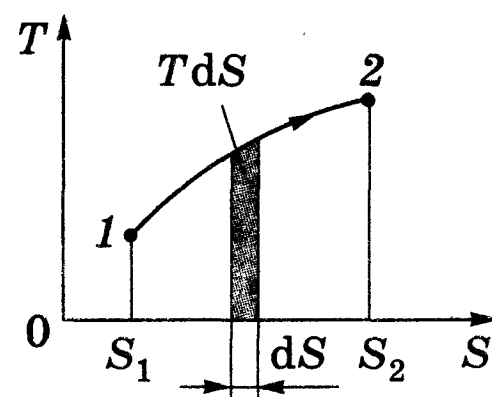
отношению отданного в этом цикле количества теплоты к полученному. Согласно теореме Карно, химический состав рабочего тела не влияет на результаты сравнения температур, поэтому такая термодинамическая шкала не связана со свойствами какого-то определенного термометрического тела.

## 2.2.12. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ДИАГРАММА $T-S$ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

### 2.73 Определение теплоты, полученной телом, с помощью $T-S$ -диаграммы

#### $T-S$ -диаграмма

Диаграмма, где по осям абсцисс и ординат отложены энтропия  $S$  и термодинамическая температура  $T$  рассматриваемого тела.



#### Обратимый процесс на диаграмме $T-S$

Из определения энтропии 2.64  $\delta Q = T dS$  и определяется площадью закрашенной полоски.

#### Количество теплоты, полученное телом в ходе процесса 1—2

$$Q_{12} = \int_1^2 \delta Q = \int_1^2 T dS$$

Определяется площадью, ограниченной кривой 1—2, прямыми  $S_1$  и  $S_2$  и осью абсцисс.

## 2.74 Представление изопроецессов идеального газа на $T-S$ -диаграмме

Эквивалентные формы записи для энтропии идеального газа

$$dS = \frac{m}{M} \left( C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} \right) \quad dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{dU + \delta A}{T} = \frac{m}{M} \left( C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} \right),$$

учли, что  $\delta A = p dV$  2.47,  $p = \frac{m}{M} \frac{RT}{V}$  2.13

и  $dU = \frac{m}{M} C_V dT$  2.44.

$$dS = \frac{m}{M} \left( C_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \right) \quad dS = \frac{m}{M} \left( C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} \right) = \frac{m}{M} \left[ C_V d(\ln T) + R d(\ln V) \right].$$

Воспользовавшись уравнением  $\frac{pV}{T} = \text{const}$  2.12, имеем

$$\ln p + \ln V - \ln T = \text{const}, \quad d(\ln p) + d(\ln V) - d(\ln T) = 0,$$

откуда  $R d(\ln V) = R d(\ln T) - R d(\ln p)$ . Получаем

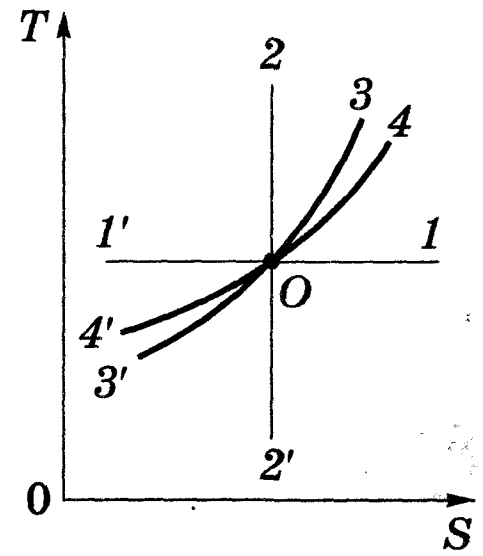
$$dS = \frac{m}{M} [(C_V + R) d(\ln T) - R d(\ln p)] = \frac{m}{M} \left( C_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \right).$$

Графическое представление изопроецессов идеального газа на диаграмме  $T-S$

Начальное состояние газа обозначено точкой 0.

**Изотермический процесс**

Прямая  $1-1'$ , проходящая через точку 0 параллельно оси абсцисс ( $O-1$  — изотермическое расширение: теплота подводится;  $dS > 0$ ;  $O-1'$  — изотермическое сжатие: теплота отбирается,  $dS < 0$ ).



**Адиабатный (изоэнтропийный) процесс**

Прямая  $2-2'$ , проходящая через точку 0 параллельно оси ординат ( $O-2$  — адиабатное сжатие ( $dT > 0$ );  $O-2'$  — адиабатное расширение ( $dT < 0$ )).

**Изохорный процесс**

Кривая  $3-3'$ .  $dS = \frac{m}{M} C_V \frac{dT}{T}$  ( $O-3$  — изохорное нагревание:  $dS > 0$ ,  $dT > 0$ ;  $O-3'$  — изохорное охлаждение:  $dS < 0$ ,  $dT < 0$ ).

**Изобарный процесс**

Кривая  $4-4'$ .  $dS = \frac{m}{M} C_p \frac{dT}{T}$  ( $O-4$  — изобарное расширение:  $dS > 0$ ,  $dT > 0$ ;  $O-4'$  — изобарное сжатие  $dS < 0$ ,  $dT < 0$ ). Поскольку  $C_p > C_V$ , кривая  $4-4'$  (изобарный процесс) более пологая, чем кривая  $3-3'$  (изохорный процесс).

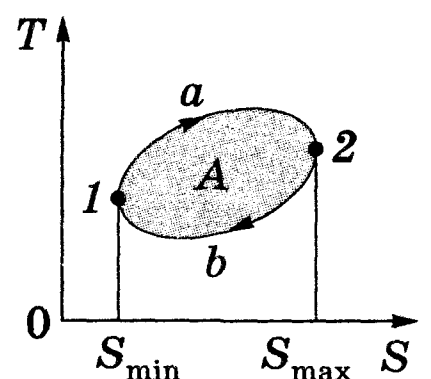
## 2.75 Примеры некоторых циклов в $T-S$ -диаграмме

Обратимый прямой цикл в  $T-S$ -диаграмме

На рисунке изображен в  $T-S$ -диаграмме произвольный обратимый прямой цикл  $1a2b1$ .

Состояния 1 ( $S_{\min}$ ) и 2 ( $S_{\max}$ ) соответственно принадлежат минимальному и максимальному значениям энтропии рабочего тела в цикле.

В процессе  $1a2$  теплота подводится, а в процессе  $2b1$  — отбирается.

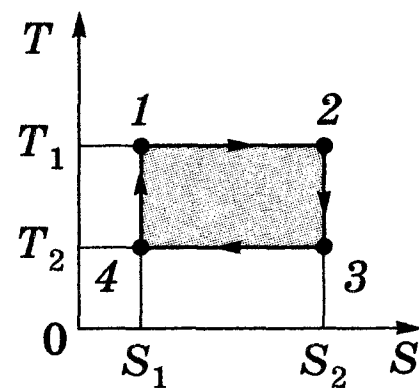


Процесс $1a2$	$Q^+ = \int_1^2 T dS > 0$	Теплота подводится ( $Q^+$ ).
Процесс $2b1$	$Q^- = \int_2^1 T dS < 0$	Теплота отбирается ( $Q^-$ ).
Работа за цикл	$A = Q^+ + Q^-$ $A = \oint T dS > 0$	Работа определяется площадью, ограниченной замкнутой кривой $1a2b1$ .

### Цикл Карно

Прямой цикл Карно в  $T-S$ -диаграмме — прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат 2.74.

- $1-2$  — изотермическое расширение;
- $2-3$  — адиабатное расширение;
- $3-4$  — изотермическое сжатие;
- $4-1$  — адиабатное сжатие.



Термический коэффициент полезного действия цикла Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad \eta = \frac{A}{Q^+} = \frac{\int_1^2 T dS}{\int_1^2 T dS} = \frac{(T_1 - T_2)(S_2 - S_1)}{T_1(S_2 - S_1)} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad 2.72.$$

## 2.3. Реальные газы, жидкости и твердые тела

### 2.3.1. СИЛЫ И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ МЕЖМОЛЕКУЛЯРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

#### 2.76 Описание взаимодействия между молекулами реального газа

##### Реальный газ

Газ, свойства которого зависят от взаимодействия молекул.

##### Силы межмолекулярного взаимодействия

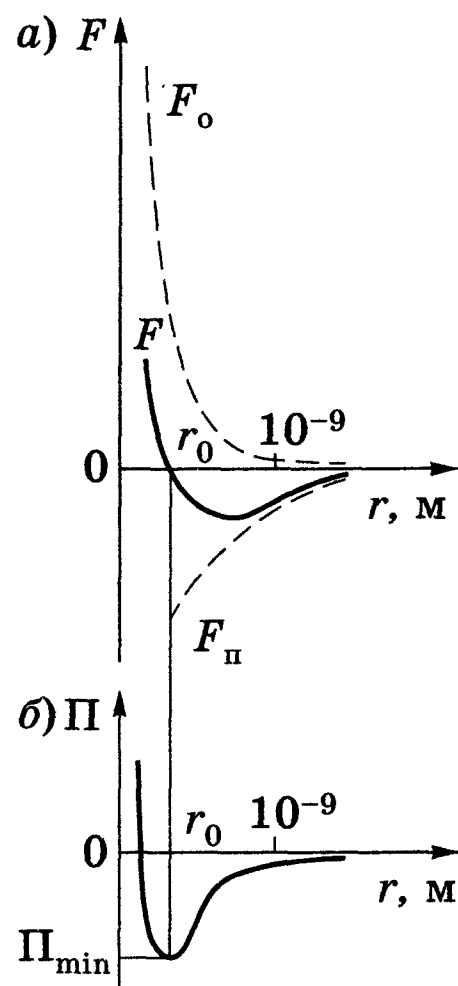
Силы взаимодействия между молекулами и атомами газа, не приводящие к образованию химических соединений.

Эти силы — короткодействующие (проявляются на расстояниях  $\leq 10^{-9}$  м).

##### Зависимость сил межмолекулярного взаимодействия от расстояния между молекулами

Между молекулами вещества одновременно действуют силы притяжения и силы отталкивания. На расстоянии  $r = r_0$  сила  $F = 0$ , т. е. силы притяжения и отталкивания уравновешивают друг друга. Таким образом, расстояние  $r_0$  соответствует равновесному состоянию между молекулами, на котором бы они находились в отсутствие теплового движения. При  $r < r_0$  преобладают силы отталкивания ( $F_o > 0$ ), при  $r > r_0$  — силы притяжения ( $F_{II} < 0$ ). На расстояниях  $r > 10^{-9}$  м межмолекулярные силы взаимодействия практически отсутствуют ( $F \rightarrow 0$ ).

[ $F_o$  — сила отталкивания;  $F_{II}$  — сила притяжения;  $F$  — их равнодействующая]



## Зависимость потенциальной энергии межмолекулярного взаимодействия от расстояния между молекулами

Элементарная работа  $\delta A$  силы  $F$  при увеличении расстояния между молекулами на  $dr$  совершается за счет уменьшения взаимной потенциальной энергии молекул, т. е.  $\delta A = F dr = -d\Pi$ . Согласно рисунку б, если молекулы находятся друг от друга на расстоянии, на котором межмолекулярные силы взаимодействия не действуют ( $r \rightarrow \infty$ ), то  $\Pi = 0$ . При постепенном сближении молекул между ними появляются силы притяжения ( $F < 0$ ), которые совершают положительную работу ( $\delta A = F dr > 0$ ). Тогда потенциальная энергия взаимодействия уменьшается, достигая минимума при  $r = r_0$ . При  $r < r_0$  с уменьшением  $r$  силы отталкивания ( $F > 0$ ) резко возрастают и совершаемая против них работа отрицательна ( $\delta A = F dr < 0$ ). Потенциальная энергия начинает тоже резко возрастать и становится положительной. Из данной потенциальной кривой следует, что система из двух взаимодействующих молекул в состоянии устойчивого равновесия ( $r = r_0$ ) обладает минимальной потенциальной энергией.

### 2.77 Критерий различных агрегатных состояний вещества

Критерием различных агрегатных состояний вещества является соотношение между величинами  $\Pi_{\min}$  и  $kT$ ;  $\Pi_{\min}$  — наименьшая потенциальная энергия взаимодействия молекул — определяет работу, которую нужно совершить против сил притяжения для того, чтобы разъединить молекулы, находящиеся в равновесии ( $r = r_0$ );  $kT$  определяет удвоенную среднюю энергию, приходящуюся на одну степень свободы хаотического (теплового) движения молекул.

#### Газообразное состояние вещества

$$\Pi_{\min} \ll kT$$

Вещество находится в газообразном состоянии, так как интенсивное тепловое движение молекул препятствует соединению молекул, сблизившихся до расстояния  $r_0$ , т. е. вероятность образования агрегатов из молекул достаточно мала.

#### Твердое состояние вещества

$$\Pi_{\min} \gg kT$$

Вещество находится в твердом состоянии, так как молекулы, притягиваясь друг к другу, не могут удалиться на значительные расстояния и колеблются около положений равновесия, определяемых расстоянием  $r_0$ .

#### Жидкое состояние вещества

$$\Pi_{\min} \approx kT$$

Вещество находится в жидком состоянии, так как в результате теплового движения молекулы перемещаются в пространстве, обмениваясь местами, но не расходясь на расстояние, превышающее  $r_0$ .

**Вывод.** Любое вещество, в зависимости от температуры, может находиться в газообразном, жидком или твердом агрегатном состоянии, причем температура перехода из одного агрегатного состояния в другое зависит от значения  $\Pi_{\min}$  для данного вещества. Например, у инертных газов  $\Pi_{\min}$  мало, а у металлов велико, поэтому при обычных (комнатных) температурах они находятся соответственно в газообразном и твердом состояниях.



## 2.3.2. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ РЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

### 2.78 Поправки, вносимые при рассмотрении реальных газов

#### Учет собственного объема молекул

Наличие сил отталкивания, которые противодействуют проникновению в занятый молекулой объем других молекул, сводится к тому, что фактический свободный объем, в котором могут двигаться молекулы реального газа, будет не  $V_m$ , а  $V_m - b$ , где  $b$  — объем, занимаемый самими молекулами. Объем  $b$  равен *четверенному собственному объему молекул*. Если, например, в сосуде находятся две молекулы, то центр любой из них не может приблизиться к центру другой молекулы на расстояние, меньшее диаметра  $d$  молекулы. Это означает, что для центров обеих молекул оказывается недоступным сферический объем радиуса  $d$ , т. е. объем, равный восьми объемам молекулы или четверенному объему молекулы в расчете на одну молекулу.

#### Учет притяжения молекул

$$p' = \frac{a}{V_m^2}$$

Действие сил притяжения газа приводит к появлению дополнительного давления на газ, называемого *внутренним давлением*  $p'$ .

[ $a$  — постоянная Ван-дер-Ваальса, характеризующая силы межмолекулярного притяжения;  $V_m$  — молярный объем]

### 2.79 Уравнение Ван-дер-Ваальса

#### Для 1 моль газа

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$$

Уравнение получается при введении поправок 2.78 в уравнение  $pV_m = RT$  2.13.

#### Для произвольной массы газа

$$\left(p + \frac{v^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{v} - b\right) = RT$$

Уравнение получаем, учитывая, что  $V = vV_m$ ,  $\left(v = \frac{m}{M}\right)$ .

[ $a$  и  $b$  — постоянные для каждого газа величины;  $p$  — давление газа;  $V$  — молярный объем;  $R$  — молярная газовая постоянная;  $T$  — термодинамическая температура;  $v$  — количество вещества;  $m$  — масса газа;  $M$  — его молярная масса;  $V$  — объем газа]

#### Определение поправок ( $a$ и $b$ ) Ван-дер-Ваальса

Записывают уравнения Ван-дер-Ваальса для двух известных из опыта состояний газа, которые решаются относительно  $a$  и  $b$ .

#### О решениях уравнения Ван-дер-Ваальса

Уравнение Ван-дер-Ваальса можно преобразовать к виду

$$pV_m^3 - (RT + pb)V_m^2 + aV_m - ab = 0.$$

Это уравнение при заданных  $p$  и  $T$  является уравнением третьей степени относительно  $V_m$ , следовательно, оно может иметь либо три вещественных корня, либо один вещественный и два мнимых, причем *физический смысл имеют лишь вещественные положительные корни*.

При выводе уравнения Ван-дер-Ваальса (это не единственное уравнение, описывающее реальные газы) сделан целый ряд упрощений, поэтому оно также весьма приближенное, хотя и лучше (особенно для несильно сжатых газов) согласуется с опытом, чем уравнение состояния идеального газа.

## 2.3.3. ИЗОТЕРМЫ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА И ИХ АНАЛИЗ

### 2.80 Критическая изотерма. Критические параметры

#### Изотермы Ван-дер-Ваальса

Кривые зависимости  $p$  от  $V_m$  при заданных  $T$ , определяемые уравнением Ван-дер-Ваальса 2.79 для 1 моль газа.

#### Критическая изотерма

Изотерма, на которой наблюдается лишь одна точка перегиба.

#### Критическая температура

Температура  $T_k$ , соответствующая критической изотерме.

#### Критическая точка

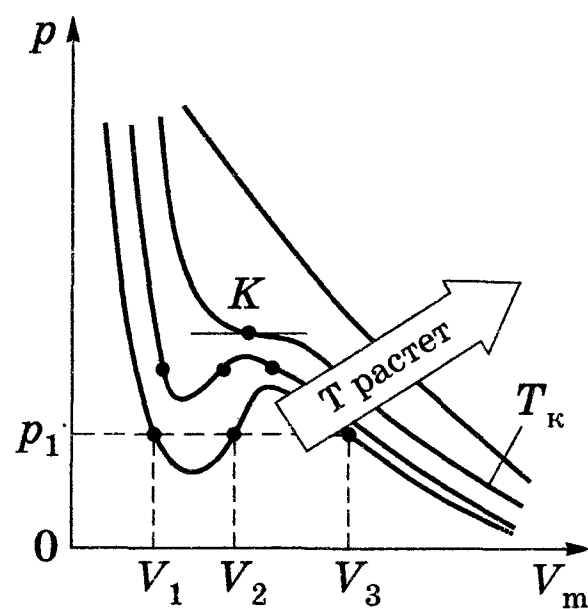
Точка перегиба  $K$  на критической изотерме.

#### Критические объем и давление

Объем  $V_k$  и давление  $p_k$ , соответствующие критической точке  $K$ .

#### Критическое состояние

Состояние с критическими параметрами  $(p_k, V_k, T_k)$ .



#### Определение критических параметров

$$V_k = 3b,$$

$$p_k = \frac{a}{27b^2},$$

$$T_k = \frac{8a}{27Rb}$$

Уравнение Ван-дер-Ваальса  $p_k V^3 - (RT_k + p_k b)V^2 + aV - ab = 0$  (индекс «m» опущен для простоты) в критической точке имеет вид  $p_k(V - V_k)^3 = 0$  (в ней все три корня совпадают) или

$$p_k V^3 - 3p_k V_k V^2 + 3p_k V_k^2 V - p_k V_k^3 = 0.$$

Поскольку записанные последнее и первое уравнения тождественны, то у них должны быть равны и коэффициенты при неизвестных соответствующих степеней:  $p_k V_k^3 = ab$ ,  $3p_k V_k^2 = a$ ,  $3p_k V_k = RT_k + p_k b$ .

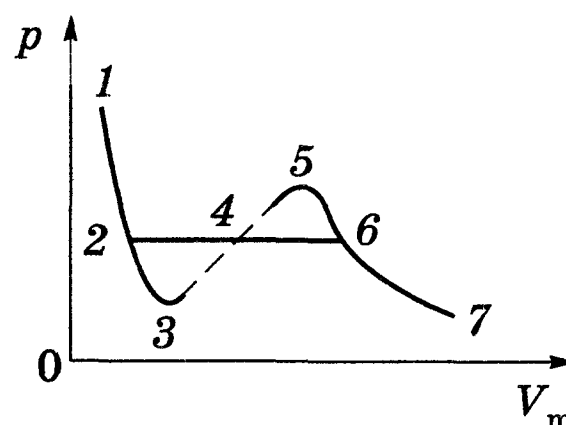
### 2.81 Анализ изотерм Ван-дер-Ваальса

#### Изотермы Ван-дер-Ваальса при $T > T_k$

При  $T > T_k$  (см. рисунок 2.80) изотерма реального газа отличается от изотермы идеального газа только некоторым искажением ее формы, оставаясь монотонно спадающей кривой.

#### Изотермы Ван-дер-Ваальса при $T < T_k$

Рассматривая различные участки одной из изотерм при  $T < T_k$ , видим, что на участках 1—3 и 5—7 при уменьшении объема  $V_m$  давление  $p$  возрастает. На участке 3—5 сжатие вещества приводит к уменьшению давления; практика же показывает, что такие состояния в природе не осуществляются. Наличие участка 3—5 означает, что при постепенном изменении объема вещества не может оставаться все время в виде однородной среды; в некоторый момент должно наступить скачкообразное изменение состояния и распад вещества на две фазы. Таким образом, истинная изотерма имеет вид ломаной линии 7—6—2—1. Часть 7—6 отвечает газообразному состоянию, а часть 2—1 — жидкому. В состояниях, соответствующих горизонтальному участку изотермы 6—2, наблюдается равновесие жидкой и газообразной фаз вещества.



## Пар

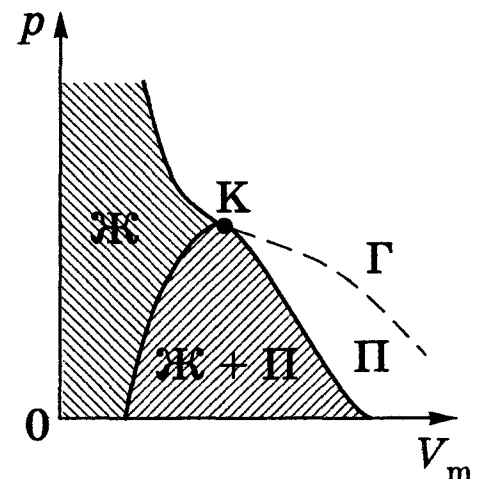
Вещество в газообразном состоянии при температуре ниже критической.

## Насыщенный пар

Пар, находящийся в равновесии со своей жидкостью.

## Анализ состояний, ограниченных критической изотермой и колоколообразной кривой

Если через крайние точки горизонтальных участков семейства изотерм провести линию, то получится колоколообразная кривая, ограничивающая область двухфазных состояний вещества. Эта кривая и критическая изотерма делят диаграмму  $p, V_m$  под изотермой на три области: под колоколообразной кривой располагается область двухфазных состояний (жидкость и насыщенный пар), слева от нее находится область жидкого состояния, а справа — область пара. Пар отличается от остальных газообразных состояний тем, что при изотермическом сжатии его можно подвергнуть сжижению. Газ же при температуре выше критической не может быть превращен в жидкость ни при каком давлении.



## 2.3.4. ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ РЕАЛЬНОГО ГАЗА

### 2.82 Определение внутренней энергии реального газа

#### Внутренняя энергия реального газа

$$U = \varepsilon + \Pi$$

Равна сумме кинетической энергии  $\varepsilon$  хаотического теплового движения молекул и их взаимной потенциальной энергии  $\Pi$ .

#### Кинетическая энергия хаотического движения молекул

$$C_V T$$

(для  
1 моль)

Свойства большинства реальных газов близки к свойствам идеального, если они находятся при температурах, когда можно пренебречь взаимодействием молекул, и потому эта составляющая внутренней энергии определяется внутренней энергией для *идеального газа*.

#### Взаимная потенциальная энергия молекул реального газа

$$\Pi = -\frac{a}{V_m}$$

(для  
1 моль)

Потенциальная энергия реального газа обусловлена только силами притяжения между молекулами. Наличие сил притяжения приводит к возникновению внутреннего давления на газ  $p' = \frac{a}{V_m^2}$  2.78. Работа, которая затрачивается для преодоления сил притяжения, действующих между молекулами газа, как известно из механики, идет на увеличение потенциальной энергии системы, т. е.  $\delta A = p' dV_m = \delta \Pi$ , или

$$\delta \Pi = \frac{a}{V_m^2} dV_m, \text{ откуда } \Pi = -\frac{a}{V_m}.$$

#### Внутренняя энергия 1 моль реального газа

$$U_m = C_V T - \frac{a}{V_m}$$

Внутренняя энергия растет с повышением температуры и увеличением давления.

[ $C_V$  — молярная теплоемкость при постоянном объеме;  $T$  — термодинамическая температура;  $a$  — постоянная Ван-дер-Ваальса;  $V_m$  — молярный объем]

## 2.83 Адиабатное расширение газа в вакуум

### Внутренняя энергия при адиабатном расширении газа в вакуум

$$U = \text{const}$$

Если газ расширяется *без теплообмена с окружающей средой* (адиабатный процесс, т. е.  $\delta Q = 0$ ) и *не совершает внешней работы* (расширение газа в вакуум, т. е.  $\delta A = 0$ ), то на основании первого начала термодинамики ( $\delta Q = (U_2 - U_1) + \delta A$ ) получим  $U_1 = U_2$ .

◆ Равенство  $U_1 = U_2$  формально справедливо как для идеального, так и реального газов, но результат, получаемый при его применении, для обоих случаев совершенно различен.

$$U_1 = U_2 \text{ (идеальный газ)}$$

$$T_1 = T_2$$

При адиабатном расширении идеального газа в вакуум его температура не изменяется ( $U_m = C_V T$ ; рассматриваем 1 моль газа).

$$U_1 = U_2 \text{ (реальный газ)}$$

$$T_1 - T_2 = \frac{a}{C_V} \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)$$

Для 1 моль  $U_1 = C_V T - \frac{a}{V_1}$ ,  $U_2 = C_V T - \frac{a}{V_2}$ . При подстановке этих формул в равенство  $U_1 = U_2$  получаем, что

$$T_1 - T_2 = \frac{a}{C_V} \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right).$$

Так как  $V_2 > V_1$ , то  $T_1 > T_2$ , т. е. реальный газ при адиабатном расширении в вакуум охлаждается.

## 2.3.5. ЭФФЕКТ ДЖОУЛЯ—ТОМСОНА

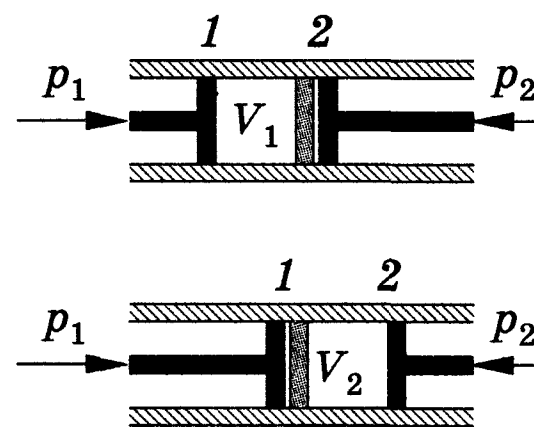
### 2.84 Понятие об эффекте Джоуля—Томсона. Энтальпия

#### Эффект Джоуля—Томсона

Изменение температуры реального газа в результате его адиабатного расширения (*адиабатного дросселирования* — медленного прохождения газа под действием перепада давления сквозь *дроссель* (например, пористую перегородку)).

#### Схема опыта Джоуля—Томсона

В теплоизолированной трубке с пористой перегородкой находятся два поршня, которые могут перемещаться без трения. Вначале слева от перегородки газ под поршнем 1 находится под давлением  $p_1$ , занимает объем  $V_1$  при температуре  $T_1$ , а справа газ отсутствует (поршень 2 придвинут к перегородке). После прохождения газа через пористую перегородку в правой части газ характеризуется параметрами  $p_2$ ,  $V_2$ ,  $T_2$ . Давления  $p_1$  и  $p_2$  поддерживаются постоянными ( $p_1 > p_2$ ).



#### Энтальпия

$$U + pV$$

Функция состояния термодинамической системы.

[ $U$  — внутренняя энергия;  $p$  — давление;  $V$  — объем]

#### Сохранение энтальпии в адиабатном процессе

$$U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2$$

Так как расширение газа происходит адиабатно, то, согласно первому началу термодинамики,

$$\delta Q = (U_2 - U_1) + \delta A = 0.$$

Внешняя работа, совершаемая газом, состоит из положительной работы при движении поршня 2 ( $A_2 = p_2 V_2$ ) и отрицательной при движении поршня 1 ( $A_1 = p_1 V_1$ ), т. е.  $\delta A = A_2 - A_1$ . Подставляя выражения для работ в первое начало термодинамики, получаем  $U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2$ .

## 2.85 Условие сохранения энтальпии — основа теории эффекта Джоуля—Томсона

Расчет разности температур (1 моль)

$$T_2 - T_1 = \frac{2a\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) - b(p_2 - p_1)}{C_V + R} - \frac{ab\left(\frac{1}{V_2^2} - \frac{1}{V_1^2}\right)}{C_V + R}$$

Подставив в формулу

$$U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2 \quad 2.84$$

выражения

$$U_1 = C_V T_1 - \frac{a}{V_1}, \quad U_2 = C_V T_2 - \frac{a}{V_2},$$

а также рассчитанные из уравнения Ван-дер-Ваальса 2.79 значения  $p_1 V_1$  и  $p_2 V_2$ , и произведя элементарные преобразования, получим записанное выражение для  $T_2 - T_1$ .

**Вывод.** Знак разности  $T_2 - T_1$  зависит от того, какая из поправок Ван-дер-Ваальса играет бóльшую роль.

Анализ выражения  $T_2 - T_1$  при допущении  $p_2 \ll p_1; V_2 \gg V_1$

$a \approx 0$	$T_2 - T_1 \approx \frac{-b(p_2 - p_1)}{C_V + R} > 0$	Если не учитывать силы притяжения между молекулами, а учитывать лишь размеры молекул, то газ нагревается
$b \approx 0$	$T_2 - T_1 \approx \frac{2a\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right)}{C_V + R} < 0$	Если не учитывать размеров молекул, а учитывать лишь силы притяжения между молекулами, то газ охлаждается
$a \neq 0, b \neq 0$	$T_2 - T_1 \approx \frac{-\frac{2a}{V_1} + \frac{bRT_1}{V_1 - b}}{C_V + R} + \frac{\frac{ba}{V_1^2} - \frac{ab}{V_1^2}}{C_V + R} = \frac{\frac{bRT_1}{V_1 - b} - \frac{2a}{V_1}}{C_V + R}$	В общую формулу подставили $p_1$ (из уравнения Ван-дер-Ваальса)

Знак разности температур зависит от значений начального объема  $V_1$  и начальной температуры  $T_1$ .

### Эффект Джоуля—Томсона

положительный  $\Delta T < 0$  (газ в процессе дросселирования охлаждается).

отрицательный  $\Delta T > 0$  (газ в процессе дросселирования нагревается).

Эффект Джоуля—Томсона обусловлен отклонением газа от идеальности. Так, для 1 моль идеального газа выражение  $U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2$  2.84 с учетом  $pV_m = RT$  2.13 принимает вид  $C_V T_1 + RT_1 = C_V T_2 + RT_2$ , откуда следует, что  $T_1 = T_2$ .

## 2.86 Температура и кривая инверсии

### Температура инверсии

Температура, при которой (для данного давления) происходит изменение знака эффекта Джоуля—Томсона.

В зависимости от условий дросселирования для одного и того же газа эффект Джоуля—Томсона может быть как положительным, так и отрицательным.

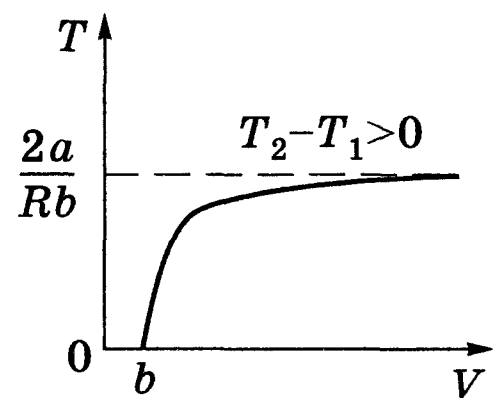
$$T = \frac{2a}{Rb} \left(1 - \frac{b}{V}\right)$$

Эта формула получается, если приравнять  $T_2 - T_1$  при  $a \neq 0, b \neq 0$  нулю. **2.85**

### Кривая инверсии

Кривая, определяемая уравнением  $T = \frac{2a}{Rb} \left(1 - \frac{b}{V}\right)$ .

Область выше кривой инверсии соответствует отрицательному эффекту Джоуля—Томсона, ниже — положительному. Например, при дросселировании от 20 до 0,1 МПа и начальной температуре 17 °С воздух охлаждается на 35 °С.



## 2.3.6. СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ. ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ

### 2.87 Описание жидкостей

#### Поведение жидкостей

Жидкость — агрегатное состояние вещества, промежуточное между газообразным и твердым, поэтому она обладает свойствами как газообразных, так и твердых веществ. Жидкости, подобно твердым телам, обладают определенным объемом, а подобно газам, принимают форму сосуда, в котором они находятся. В жидкостях имеет место так называемый *ближний порядок* в расположении частиц, т. е. их упорядоченное расположение, повторяющееся на расстояниях, сравнимых с межатомными.

Согласно Френкелю, каждая молекула в течение некоторого времени колеблется около определенного положения равновесия, после чего скачком переходит в новое положение, отстоящее от исходного на расстоянии порядка межатомного. Таким образом, молекулы жидкости довольно медленно перемещаются по всей массе жидкости и диффузия происходит гораздо медленнее, чем в газах. С повышением температуры жидкости частота колебательного движения резко увеличивается, возрастает подвижность молекул, что, в свою очередь, является причиной уменьшения вязкости жидкости.

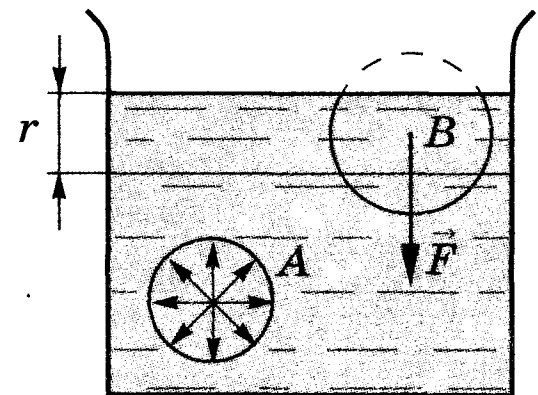
#### Радиус ( $r$ ) и сфера молекулярного действия

Расстояние (порядка  $10^{-9}$  м), при котором можно пренебречь силами притяжения между молекулами жидкости. Сфера радиусом  $r$  называется *сферой молекулярного действия*.

#### Молекулярное (внутреннее) давление

Давление, оказываемое на жидкость результирующими силами всех молекул поверхностного слоя.

Силы, с которыми молекулы, находящиеся внутри сферы молекулярного действия радиусом  $r$ , действуют на молекулу  $A$ , направлены в разные стороны и в среднем скомпенсированы, поэтому результирующая сила, действующая на молекулу внутри жидкости со стороны других молекул, равна нулю. Для молекулы  $B$  сфера молекулярного действия лишь частично расположена внутри жидкости. В данном случае равнодействующая сил  $\vec{F}$ , приложенных к каждой молекуле поверхностного слоя, не равна нулю и направлена внутрь жидкости.





## 2.88 Поверхностное натяжение жидкостей

### Поверхностная энергия

$$\Delta E = \sigma \Delta S$$

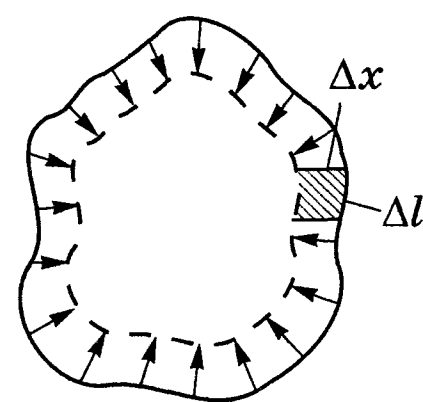
Дополнительная энергия, которой обладают молекулы в поверхностном слое жидкости.

Суммарная энергия частиц жидкости складывается из энергии их хаотического (теплового) движения и потенциальной энергии, обусловленной силами межмолекулярного взаимодействия. Для перемещения молекулы из глубины жидкости в поверхностный слой надо затратить работу. Эта работа совершается за счет кинетической энергии молекул и идет на увеличение их потенциальной энергии. Поэтому молекулы поверхностного слоя жидкости обладают большей потенциальной энергией, чем молекулы внутри жидкости.

[ $\Delta S$  — площадь слоя;  $\sigma$  — поверхностное натяжение]

### Силы поверхностного натяжения

Силы, направленные по касательной к поверхности жидкости и перпендикулярные участку контура (на рисунке рассмотрена поверхность жидкости, ограниченная замкнутым контуром), на который они действуют, и стремящиеся сократить поверхность до минимума.



### Работа сил поверхностного натяжения

Силы, действующие со стороны выделенного участка на границах с ним участки, совершают работу  $\Delta A = f \Delta l \Delta x$ . Имеем  $\Delta l \Delta x = \Delta S$ ;  $\Delta A = f \Delta S$ .

### Поверхностное натяжение

$$\sigma = f$$

Равно силе поверхностного натяжения, приходящейся на единицу длины контура, ограничивающего поверхность.

Работа сил поверхностного натяжения совершается за счет уменьшения поверхностной энергии, т. е.  $\Delta A = \Delta E$ . Учитывая эти выражения ( $\Delta A = f \Delta S$ ;  $\Delta E = \sigma \Delta S$ ), получаем  $\sigma = f$ .

[ $f$  — сила поверхностного натяжения, действующая на единицу длины контура поверхности жидкости]

### Единица поверхностного натяжения

$$1 \text{ Н/м}$$

или

$$1 \text{ Дж/м}^2$$

1 ньютон на метр — поверхностное натяжение жидкости, создаваемое силой 1 Н, приложенной к участку контура свободной поверхности длиной 1 м и действующей нормально к контуру и по касательной к поверхности.

1 джоуль на квадратный метр — поверхностное натяжение жидкости, поверхностная энергия которой площадью 1 м<sup>2</sup> равна 1 Дж.

### Значения $\sigma$ для некоторых веществ (Н/м)

Эфир	Ацетон	Бензол	Глицерин	Вода	Ртуть
$1,71 \cdot 10^{-2}$	$2,33 \cdot 10^{-2}$	$2,89 \cdot 10^{-2}$	$6,57 \cdot 10^{-2}$	$7,27 \cdot 10^{-2}$	$4,65 \cdot 10^{-1}$

### Поверхностно-активные вещества

Вещества, ослабляющие поверхностное натяжение жидкости.

Примеры: для воды — спирт, эфир, нефть и т. д.

Некоторые вещества (соль, сахар) повышают поверхностное натяжение жидкости, поскольку их молекулы взаимодействуют с молекулами жидкости сильнее, чем молекулы жидкости между собой. Например, если посолить мыльный раствор, то в поверхностный слой жидкости выталкивается молекул мыла больше, чем в пресной воде. В мыловаренной технике мыло «высаливается» этим способом из раствора.

### 2.3.7. СМАЧИВАНИЕ

#### 2.89 Условия равновесия на границе жидкость — твердое тело

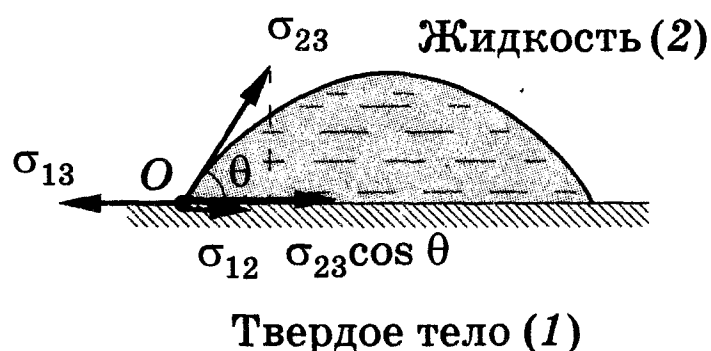
##### Определение смачивания

Явление искривления свободной поверхности жидкости при соприкосновении жидкости с поверхностью твердого тела.

Смачивание определяется характером сил, действующих между молекулами поверхностных слоев соприкасающихся тел.

##### Силы поверхностного натяжения на границе жидкости с твердым телом

а) Газ (3)



б) Газ (3)



Приложены к линии соприкосновения трех сред в точке  $O$  и направлены по касательной внутрь поверхности соприкосновения соответствующих двух сред (рисунки *a* и *б*). Эти силы, отнесенные к единице длины линии соприкосновения, равны соответствующим поверхностным натяжениям  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$ .

##### Краевой угол ( $\theta$ )

Угол между касательными к поверхности жидкости и твердого тела.

##### Условия равновесия на границе жидкости с твердым телом

$$\cos \theta = \frac{\sigma_{13} - \sigma_{12}}{\sigma_{23}}$$

Условие равновесия капли — равенство нулю суммы проекций сил поверхностного натяжения на направление касательной к поверхности твердого тела, т. е.  $-\sigma_{13} + \sigma_{12} + \sigma_{23} \cos \theta = 0$ .

#### 2.90 Смачивающая и несмачивающая жидкости

##### Смачивающая жидкость

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Если  $\sigma_{13} > \sigma_{12}$ , то  $\cos \theta > 0$  2.89 и угол  $\theta$  — острый, т. е. жидкость смачивает твердое тело (рисунок *a*, 2.89).

Вода смачивает стекло. Силы притяжения между молекулами жидкости и твердого тела здесь больше, чем между молекулами самой жидкости, и жидкость стремится увеличить поверхность соприкосновения с твердым телом.

##### Полное смачивание

$$\theta = 0$$

При  $\sigma_{13} > \sigma_{12} + \sigma_{23}$  жидкость растекается по поверхности твердого тела, покрывая его тонкой пленкой (например, керосин на поверхности стекла).

## Несмачивающая жидкость

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

Если  $\sigma_{13} < \sigma_{12}$ , то  $\cos \theta < 0$  **2.89** и угол  $\theta$  — тупой, т. е. жидкость не смачивает твердое тело (рисунок б, **2.89**).

Ртуть не смачивает стекло. Силы притяжения между молекулами жидкости и твердого тела здесь меньше, чем между молекулами жидкости, и жидкость стремится уменьшить поверхность своего соприкосновения с твердым телом.

## Полное несмачивание

$$\theta = \pi$$

Если  $\sigma_{12} > \sigma_{13} + \sigma_{23}$ , то жидкость стягивается в шаровую каплю, в пределе имея лишь одну точку соприкосновения (например, капля воды на поверхности парафина).

Смачивание и несмачивание — понятия относительные: жидкость, смачивающая одну твердую поверхность, не смачивает другую. Например, вода смачивает стекло, но не смачивает парафин; ртуть не смачивает стекло, но смачивает чистые поверхности металлов.

## 2.3.8. ДАВЛЕНИЕ ПОД ИСКРИВЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ. КАПИЛЛЯРНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

### 2.91 Давление под искривленной поверхностью жидкости

#### Давление под искривленной поверхностью жидкости

Давление, обусловленное силами поверхностного натяжения и оказываемое на нижележащие слои жидкости со стороны поверхностного слоя.

Это *избыточное (добавочное)* давление положительно для выпуклой поверхности, и отрицательно — для вогнутой.

#### Избыточное давление под искривленной поверхностью жидкости

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}$$

В случае мыльного шарообразного пузыря (для примера) избыточное давление  $\Delta p$  (по сравнению с атмосферным) внутри пузыря уравновешивается давлением со стороны стенок пузыря, обусловленным поверхностным натяжением. Если давление внутри пузыря увеличивается, то совершаемая при этом работа  $4\pi R^2 \Delta p dR$  переходит в поверхностную энергию пузыря  $\sigma dS$  **2.88**. Согласно закону сохранения энергии,

$4\pi R^2 \Delta p dR = 2\sigma \cdot 8\pi R dR$ , откуда  $\Delta p = \frac{4\sigma}{R}$ . Так как это давление создается двумя изогнутыми поверхностями пузыря (внешней и внутренней), то давление, создаваемое одной поверхностью, в два раза меньше.

[ $R$  — радиус мыльного пузыря;  $dR$  — увеличение радиуса пузыря при увеличении внутри него давления;  $dS$  — суммарное увеличение внутренней и внешней поверхности пузыря;  $dS = 2d(4\pi R^2) = 2 \cdot 8\pi R dR$ ;  $\sigma$  — поверхностное натяжение]

#### Формула Лапласа

$$\Delta p = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Общая формула, определяющая избыточное давление для произвольной поверхности жидкости двойкой кривизны.

[ $R_1$  и  $R_2$  — радиусы кривизны двух любых взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости в данной точке. Радиус кривизны положителен, если центр кривизны соответствующего сечения находится внутри жидкости, и отрицателен, если центр кривизны находится вне жидкости]

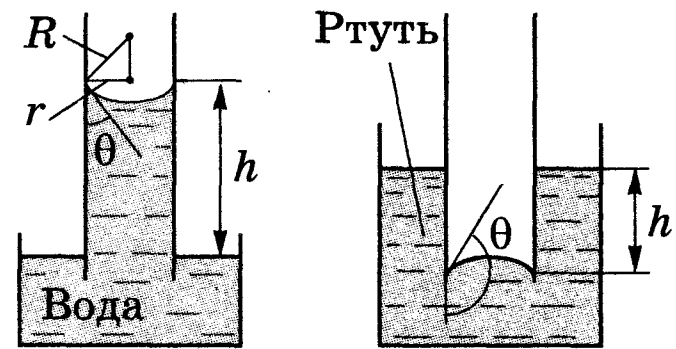
Сферическая поверхность	$R_1 = R_2 = R$	$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}$
Цилиндрическая поверхность	$R_1 = R_2; R_2 = \infty$	$\Delta p = \frac{\sigma}{R}$
Плоская поверхность	$R_1 = R_2 = \infty$	$\Delta p = 0$

## 2.92 Капиллярные явления

### Капилляры

Узкие цилиндрические трубки (их диаметр  $\leq 1$  мм).

Если капилляр поместить одним концом в жидкость, налитую в широкий сосуд, то вследствие смачивания или несмачивания жидкостью стенок капилляра кривизна поверхности жидкости в капилляре становится значительной. Если жидкость смачивает материал трубки, то внутри ее поверхность жидкости — *мениск* — имеет вогнутую форму, если не смачивает — выпуклую (см. рисунок).



### Капиллярность

Явление изменения высоты уровня жидкости в капиллярах.

Под вогнутой поверхностью жидкости появится отрицательное избыточное давление **2.91**, наличие которого приводит к тому, что жидкость в капилляре поднимается, так как под плоской поверхностью жидкости в широком сосуде избыточного давления нет. Если же жидкость не смачивает стенки капилляра, то положительное избыточное давление приведет к опусканию жидкости в капилляре (см. рисунок).

### Высота поднятия (глубина опускания) жидкости в капилляре

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g R} = \frac{2\sigma}{\rho g r} \cos \theta$$

Жидкость в капилляре поднимается или опускается на такую высоту  $h$ , при которой давление столба жидкости (гидростатическое давление **1.72**)  $\rho g h$  уравновешивается избыточным давлением  $\Delta p = \frac{2\sigma}{R}$  **2.91**:  $\frac{2\sigma}{R} = \rho g h$ .

[ $\rho$  — плотность жидкости;  $r$  — радиус капилляра;  $R$  — радиус кривизны поверхности;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\theta$  — краевой угол]

## 2.3.9. ТВЕРДЫЕ ТЕЛА: КРИСТАЛЛИЧЕСКИЕ И АМОРФНЫЕ

### 2.93 Основные сведения

#### Твердые тела

Агрегатные состояния вещества, характеризующиеся постоянством формы и объема, причем тепловые движения частиц в них представляют собой хаотические колебания частиц относительно положений равновесия.

## Кристаллические тела

Твердые тела, имеющие упорядоченное, периодически повторяющееся расположение частиц (атомов, молекул, ионов).

## Кристаллическая решетка

Структура, для которой характерно регулярное расположение частиц с периодической повторяемостью в трех измерениях.

## Узлы кристаллической решетки

Точки, в которых расположены частицы, точнее — средние равновесные положения, около которых частицы совершают колебания.

## 2.94 Кристаллические тела: моно- и поликристаллы

### Монокристаллы

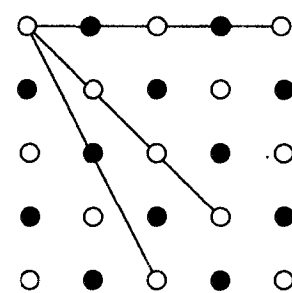
Твердые тела, частицы которых образуют единую кристаллическую решетку 2.93.

Внешняя форма монокристаллов одного вида может быть различной, но углы между соответствующими гранями постоянны — *закон постоянства углов*, сформулированный Ломоносовым. Монокристаллами являются большинство минералов. Крупные природные монокристаллы встречаются довольно редко (например, лед, поваренная соль, исландский шпат). Многие монокристаллы выращиваются искусственно.

### Анизотропия монокристаллов

Зависимость физических свойств — упругих, механических, тепловых, электрических, магнитных, оптических — от направления.

Объясняется тем, что (см. рисунок) плотность расположения частиц кристаллической решетки по разным направлениям неодинакова, что и приводит к различию свойств кристаллов вдоль этих направлений.



### Поликристаллы

Твердые тела, имеющие мелкокристаллическую структуру, т. е. состоящие из множества беспорядочно ориентированных кристаллических зерен (например, горные породы, металлы, сплавы).

### Изотропия поликристаллов

В поликристаллах анизотропия наблюдается только для отдельных мелких кристалликов, но их различная ориентация приводит к тому, что свойства поликристалла по всем направлениям *в среднем* одинаковы. Изотропны *аморфные твердые тела* 2.95, которые представляют собой переохлажденные жидкости.

## 2.95 Аморфные твердые тела. Полимеры

### Аморфные твердые тела и их свойства

Твердые тела, физические свойства которых одинаковы по всем направлениям (наблюдается изотропия свойств).

Для аморфных твердых тел, как и для жидкостей, характерен *ближний порядок* в расположении частиц; в них в отличие от жидкостей подвиж-

ность частиц довольно мала. *Особенностью аморфных тел является отсутствие у них определенной точки плавления*, т. е. невозможно указать определенную температуру, выше которой можно было бы констатировать жидкое состояние, а ниже — твердое. Из опыта известно, что в аморфных телах со временем может наблюдаться процесс кристаллизации, например в стекле появляются кристаллики; оно, теряя пластичность, начинает мутнеть и превращается в поликристаллическое тело.

## Полимеры

---

Органические аморфные тела, молекулы которых состоят из большого числа одинаковых длинных молекулярных цепочек, соединенных химическими (валентными) связями.

**Примеры:** естественные (крахмал, белок, каучук, клетчатка и др.) и искусственные (пластмасса, резина, полистирол, лавсан, капрон и др.) органические вещества.

Полимерам присущи прочность и эластичность; некоторые полимеры выдерживают растяжение, в 5—10 раз превышающее их первоначальную длину. Это объясняется тем, что длинные молекулярные цепочки могут при деформации либо сворачиваться в плотные клубки, либо вытягиваться в прямые линии. Эластичность полимеров проявляется только в определенном интервале температур, ниже которого они становятся твердыми и хрупкими, а выше — пластичными.

## 2.3.10. ТИПЫ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

### **2.96** Признаки классификации кристаллов

---

#### Кристаллографический признак кристаллов

---

В данном случае важна только пространственная периодичность в расположении частиц, поэтому можно отвлечься от их внутренней структуры, рассматривая частицы как геометрические точки.

#### Физический признак кристаллов

---

В данном случае важна природа частиц, расположенных в узлах кристаллической решетки, и характер сил взаимодействия между ними.

### **2.97** Кристаллографический признак кристаллов

---

#### Симметрия кристаллической решетки

---

Свойство решетки совмещаться с собой при некоторых пространственных перемещениях, например параллельных переносах, поворотах, отражениях или их комбинациях и т. д. Кристаллической решетке присущи 230 комбинаций элементов симметрии, или 230 различных пространственных групп. Эти 230 групп разбиваются по признакам симметрии на 32 класса.

#### Кристаллографические системы (сингонии)

---

Признак деления кристаллов по форме элементарной ячейки.

Всякая пространственная решетка может быть составлена повторением в трех различных направлениях элементарной решетки. Существует семь кристаллографических систем, каждая из которых включает в себя несколько классов симметрии.



**Представление кристаллографических систем  
в порядке возрастающей симметрии**

Кристаллографическая система	Характеристика элементарной ячейки	Форма элементарной ячейки	Кристаллографическая система	Характеристика элементарной ячейки	Форма элементарной ячейки
Триклинная	$a \neq b \neq c,$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma$		Ромбоэдрическая (тригональная)	$a = b = c,$ $\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$	
Моноклинная	$a \neq b \neq c,$ $\alpha = \beta = 90^\circ \neq \gamma$		Гексагональная	$a = b \neq c,$ $\alpha = \beta = 90^\circ,$ $\gamma = 120^\circ$	
Ромбическая	$a \neq b \neq c,$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$		Кубическая	$a = b = c,$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	
Тетрагональная	$a = b \neq c,$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$				

Для описания элементарных ячеек пользуются кристаллографическими осями координат, которые проводят параллельно ребрам элементарной ячейки, а начало координат выбирают в левом углу передней грани элементарной ячейки. Элементарная кристаллическая ячейка представляет собой параллелепипед, построенный на ребрах  $a, b, c$  с углами  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  между ребрами. Величины  $a, b$  и  $c$  и  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  называются *параметрами элементарной ячейки* и однозначно ее определяют.

**2.98 Деление кристаллов по физическому признаку**

**Ионные кристаллы**

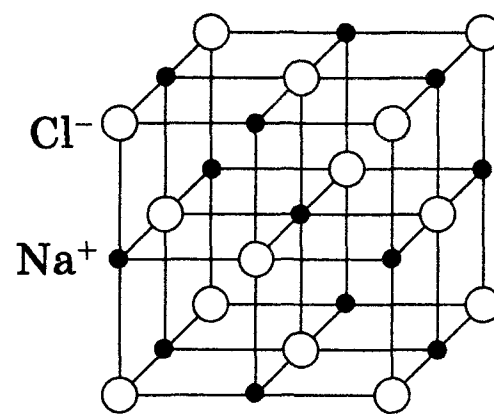
В узлах кристаллической решетки поочередно располагаются ионы противоположного знака.

**Примеры:** галоидные соединения щелочных металлов (NaCl, CsCl, KBr и т. д.), оксиды различных элементов (MgO, CaO и т. д.).

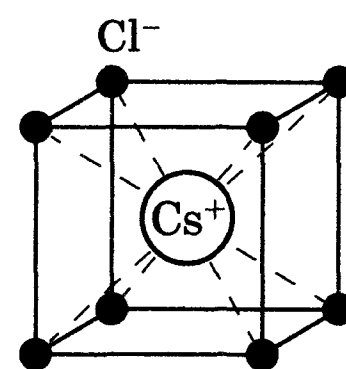
Решетка NaCl — две одинаковые гранецентрированные кубические решетки, вложенные друг в друга; в узлах одной из этих решеток находятся ионы  $\text{Na}^+$ , в узлах другой, — ионы  $\text{Cl}^-$ .

Решетка CsCl — кубическая объемно-центрированная решетка — в центре каждой элементарной решетки находится ион.

Силы взаимодействия между ионами являются в основном электростатическими (кулоновскими). Связь, обусловленная кулоновскими силами притяжения между разноименно заряженными ионами, называется *ионной*. Здесь нельзя выделить отдельные молекулы: кристалл представляет собой как бы одну гигантскую молекулу.



NaCl



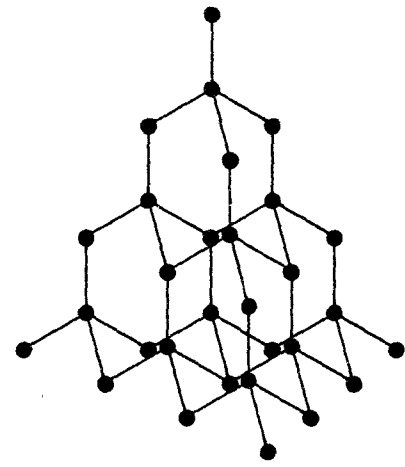
CsCl

## Атомные кристаллы

В узлах кристаллической решетки располагаются нейтральные атомы, удерживаемые в узлах решетки *ковалентными связями* квантово-механической природы (у соседних атомов обобществлены валентные электроны, наименее связанные с атомом).

**Примеры:** алмаз и графит (два различных состояния углерода), неорганические соединения (ZnS, BeO и т. д.), полупроводники (Ge, Si).

Решетка алмаза — каждый атом углерода окружен четырьмя такими же атомами, которые располагаются на одинаковых расстояниях от него в вершинах тетраэдров. В отличие от графита решетка алмаза не содержит плоских слоев, что не позволяет сдвигать отдельные участки кристалла, поэтому алмаз является прочным соединением.



## Металлические кристаллы

В узлах кристаллической решетки располагаются положительные ионы металла. При образовании кристаллической решетки валентные электроны, сравнительно слабо связанные с атомами, отделяются от атомов и коллективизируются: они уже принадлежат не одному атому, как в случае ионной связи, и не паре соседних атомов, как в случае гомеоплярной связи, а всему кристаллу в целом.

**Примеры:** Li, Na, K, Rb, Cs (объемно-центрированная решетка), Cu, Ag, Pt, Au (кубическая гранецентрированная решетка). Чаще металлы встречаются в виде поликристаллов **2.94**.

В металлах между положительными ионами хаотически, подобно молекулам газа, движутся «свободные» электроны, наличие которых обеспечивает хорошую электропроводность металлов. Так как металлическая связь не имеет направленного действия и положительные ионы решетки одинаковы по свойствам, то металлы должны иметь симметрию высокого порядка.

## Молекулярные кристаллы

В узлах кристаллической решетки располагаются нейтральные молекулы вещества, силы взаимодействия между которыми обусловлены незначительным взаимным смещением электронов в электронных оболочках атомов. Эти *силы* называются *ван-дер-ваальсовыми*, так как они имеют ту же природу, что и силы притяжения между молекулами, приводящими к отклонению газов от идеальности.

**Примеры:** органические соединения (парафин, спирт, резина и т. д.), инертные газы (Ne, Ar, Kr, Xe) и газы CO<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, N<sub>2</sub> в твердом состоянии, лед, а также кристаллы брома Br<sub>2</sub>, иода I<sub>2</sub>.

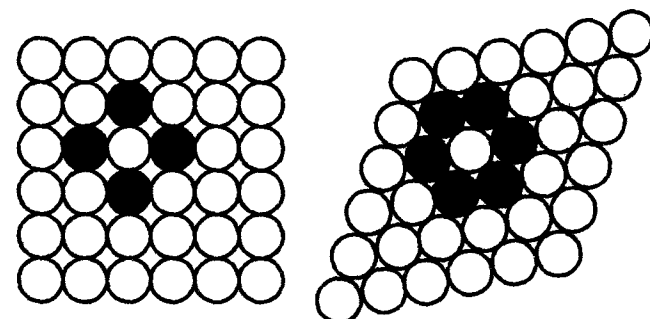
◆ Ван-дер-ваальсовы силы довольно слабые, поэтому молекулярные кристаллы легко деформируются.

## 2.99 Возможные упаковки атомов в решетке

### Координационное число

Число ближайших одготипных с данным атомом соседних атомов в кристаллической решетке или молекул в молекулярных кристаллах.

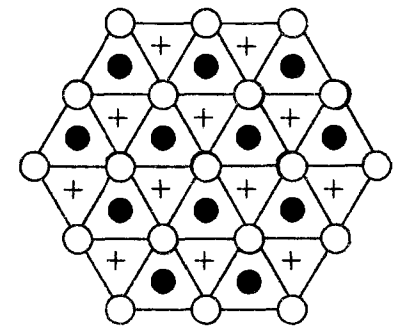
Для модельного изображения кристаллических структур пользуются системой плотной



упаковки шаров. Правая упаковка более плотная. Различие в упаковках сводится к различию координационных чисел: в левой упаковке координационное число равно 4, в правой — 6.

### Возможные способы плотной упаковки шаров одинакового радиуса

Решетку начнем строить со слоя шаров, представленных на приведенном в конце с. 120 правом рисунке. Центры шаров спроецируем на плоскость, обозначив их белыми кружками. На эту же плоскость спроецируем центры просветов между шарами (соответственно черные кружки и крестики).



Любой плотноупакованный слой будем называть слоем *A*, если центры его шаров расположены над белыми кружками, слоем *B* — если над черными кружками, слоем *C* — если над крестиками. Над слоем *A* уложим второй плотноупакованный слой так, чтобы каждый шар этого слоя лежал на трех шарах первого слоя. Это можно сделать двояко: взять в качестве второго слоя либо *B*, либо *C*. Третий слой можно опять уложить двояко и т. д. Итак, плотную упаковку можно описать как последовательность *ABCBCA...*, в которой не могут стоять рядом слои, обозначенные одинаковыми буквами.

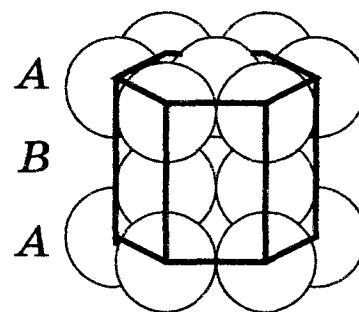
### Два типа упаковки, имеющих реальное значение из возможных комбинаций

◆ двухслойная упаковка *ABABAB...* — гексагональная плотно упакованная структура (рисунок *a*);

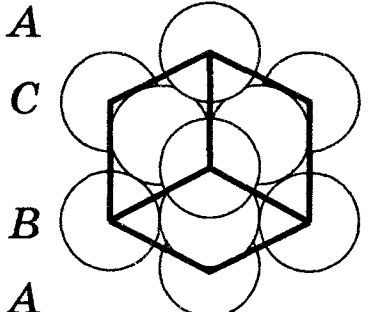
◆ трехслойная упаковка *ABCABC...* — кубическая гранецентрированная структура (рисунок *б*)

В обеих решетках координационное число равно 12 и плотность упаковки одинакова — атомы занимают 74% общего объема кристалла.

*a)*

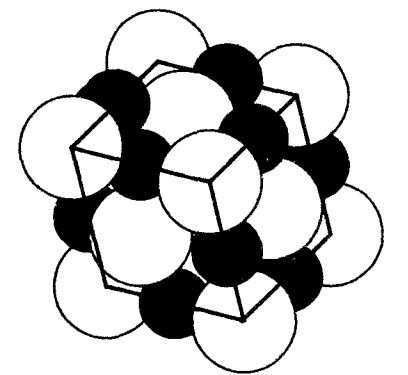


*б)*



### Модельное изображение кристалла поваренной соли (NaCl)

Если кристалл построен из атомов различных элементов, то его можно представить в виде плотной упаковки шаров разных размеров. Крупные ионы хлора ( $r = 181$  пм) образуют плотную трехслойную упаковку, у которой большие пустоты заполнены меньшими по размеру ионами натрия ( $r = 98$  пм). Каждый ион Na окружен шестью ионами Cl, и, наоборот, каждый ион Cl — шестью ионами Na.



## 2.3.11. ДЕФЕКТЫ В КРИСТАЛЛАХ

### 2.100 Макро- и микродефекты в кристаллах

#### Дефекты кристаллической решетки

Всякие отклонения от строгой периодичности расположения частиц в узлах кристаллической решетки.

Дефекты делятся на *макроскопические* и *микроскопические*.

#### Макроскопические дефекты

Дефекты, возникающие в процессе образования и роста кристаллов.

К ним относятся всякого рода трещины, макроскопические пустоты, инородные макроскопические включения.

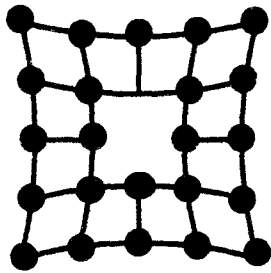
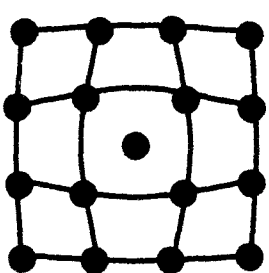
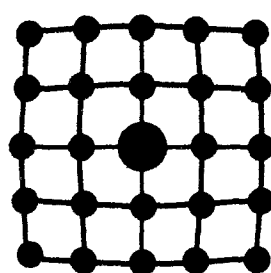
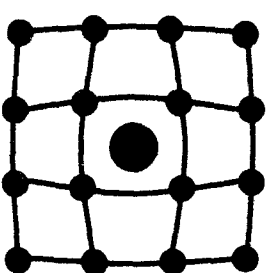
## Микроскопические дефекты

Дефекты, обусловленные микроскопическими отклонениями от периодичности.

Микродефекты делятся на *точечные* и *линейные*.

### 2.101 Точечные и линейные микродефекты

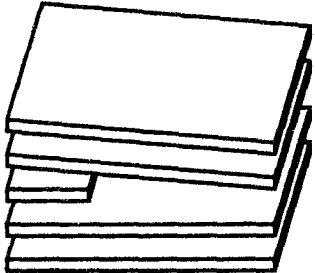
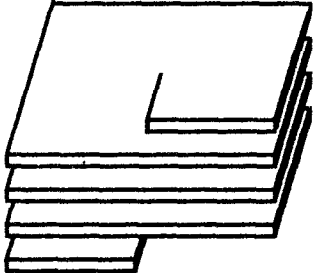
#### Точечные дефекты

<i>Вакансия</i>	<i>Междоузельный атом</i>	<i>Примесный атом</i>	
			
Отсутствие атома в узле решетки	Атом, внедрившийся в междоузельное пространство	Атом примеси, замещающий атом основного вещества	Атом примеси, внедрившийся в междоузельное пространство

Точечные дефекты нарушают лишь *ближний* порядок в кристаллах, не затрагивая дальнего порядка, — в этом состоит их характерная особенность.

#### Линейные дефекты (дислокации)

*Дислокации* — линейные дефекты, нарушающие правильное чередование атомных плоскостей.

<i>Краевые дислокации</i>	<i>Винтовые дислокации</i>
	
Появляется лишняя атомная полуплоскость, как бы вдвинутая между плоскостями кристалла, край этой полуплоскости и образует краевую дислокацию	Ни одна из атомных плоскостей внутри кристалла не обрывается, а сами плоскости лишь приблизительно параллельны и смыкаются друг с другом так, что фактически кристалл состоит из одной атомной плоскости, изогнутой по винтовой поверхности

Линейные дефекты нарушают *дальний* порядок и в значительной степени определяют механические свойства кристаллов. Дислокации никогда не обрываются, они либо выходят на поверхность, либо разветвляются, поэтому в реальном кристалле образуются плоские или пространственные сетки дислокаций.

## 2.3.12. ТЕПЛОЕМКОСТЬ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

### 2.102 Закон Дюлонга и Пти

#### Модель твердого тела для определения теплоемкости

Правильно построенная кристаллическая решетка, в узлах которой частицы (атомы, ионы, молекулы), принимаемые за материальные точки, колеблются около своих положений равновесия — *узлов решетки* —

в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Таким образом, каждой составляющей кристаллическую решетку частице приписывается три колебательных степени свободы, каждая из которых, согласно закону равнораспределения энергии по степеням свободы **2.43**, обладает энергией  $kT$ .

### Внутренняя энергия 1 моль твердого тела

$$U_m = 3N_A kT = 3RT$$

[ $N_A$  — постоянная Авогадро:  $N_A k = R$  ( $R$  — молярная газовая постоянная,  $k$  — постоянная Больцмана)]

### Закон Дюлонга и Пти

$$C_V = \frac{dU_m}{dT} = 3R = 25 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$$

Молярная (атомная) теплоемкость *химически простых тел* в кристаллическом состоянии одинакова (равна  $3R$ ) и не зависит от температуры.

## 2.103 Особенности теплоемкости химических соединений

### Молярная теплоемкость твердых химических соединений

$$C_V = 3nR \approx 25n \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$$

Равна сумме атомных теплоемкостей, составляющих это соединение.

Расчет произведен на примере NaCl. Число частиц в 1 моль в данном случае равно  $nN_A$ , где  $n$  — число атомов в молекуле (для NaCl число частиц в 1 моль равно  $2N_A$ ; так, в 1 моль NaCl содержится  $N_A$  атомов Na и  $N_A$  атомов Cl).

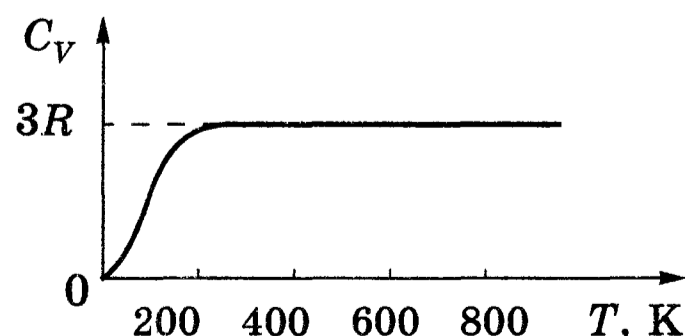
### Теоретические и экспериментальные значения молярной теплоемкости твердых тел и ее зависимость от температуры

Вещество	$C_V$ (Дж/(моль · К))	
	Теоретическое значение	Экспериментальное значение
Алюминий Al	25	25,5
Алмаз C	25	5,9
Бериллий Be	25	15,6
Бор B	25	13,5
Железо Fe	25	26,8
Серебро Ag	25	25,6
NaCl	50	50,6
AgCl	50	50,9
CaCl <sub>2</sub>	75	76,2

Для многих веществ **2.102** закон Дюлонга и Пти выполняется с довольно хорошим приближением, хотя некоторые вещества, например C, Be, B, имеют значительные отклонения от вычисленных теплоемкостей.

### Температурная зависимость молярной теплоемкости твердых тел

Опыт приводит к выводу, что теплоемкость твердых тел зависит от температуры. Около 0 К  $C_V \sim T^3$  и только при достаточно высоких температурах, характерных для каждого вещества,  $C_V = 3R$ .



Расхождение опытных и теоретических значений теплоемкостей, вычисленных на основе классической теории, объяснено на основе квантовой теории.

## 2.3.13. ИСПАРЕНИЕ, СУБЛИМАЦИЯ, КОНДЕНСАЦИЯ, ПЛАВЛЕНИЕ И КРИСТАЛЛИЗАЦИЯ

### 2.104 Парообразование и конденсация

#### Парообразование

Физический процесс, при котором вещество из жидкого состояния при подведении теплоты переходит в газообразное состояние.

#### Теплота парообразования

Количество теплоты, необходимое для перехода вещества из жидкого в газообразное состояние.

#### Температура парообразования

Температура перехода жидкости в газ.



#### Удельная теплота парообразования

$$q = \frac{Q_{\text{пар}}}{m}$$

Количество теплоты, необходимое, чтобы перевести 1 кг жидкости при постоянной температуре в газообразное состояние.

#### Испарение

Парообразование, происходящее при любой температуре со свободной поверхности жидкости.

#### Сублимация (возгонка)

Физический процесс прямого перехода вещества из твердого состояния в газообразное, минуя жидкую фазу.

Процесс сублимации при обычных температурах незначителен, он активизируется с повышением температуры.

**Примеры:** превращение льда в пар — мокрое белье высыхает на морозе; интенсивно сублимируют камфара, нафталин (обнаруживается по свойственному им резкому запаху).

#### Конденсация

Физический процесс, при котором вещество из газообразного состояния с отдачей теплоты переходит в жидкое состояние.

#### Сравнение характеристик при испарении и конденсации

*Конденсация — процесс, компенсирующий испарение.* Подведенное при испарении количество теплоты отдается веществом при конденсации:  $|Q_{\text{пар}}| = -|Q_{\text{конд}}|$ . Температура кипения определенного вещества *при постоянном давлении* равна температуре конденсации:  $T_{\text{к}} = T_{\text{конд}}$ . Температура кипения повышается с увеличением давления.

### 2.105 Плавление и кристаллизация (затвердевание)

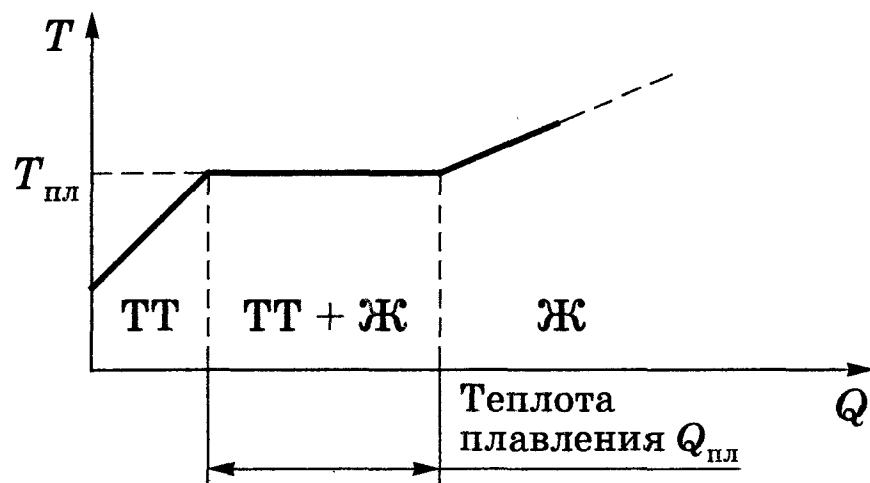
#### Плавление

Физический процесс, при котором вещество из кристаллического (твердого) состояния при подведении теплоты переходит в жидкое состояние.



## Теплота плавления

Количество теплоты, необходимое для перевода вещества из кристаллического (твердого) в жидкое состояние.



## Температура плавления

Температура перехода кристаллического (твердого) состояния в жидкость.

## Удельная теплота плавления

$$q = \frac{Q_{\text{пл}}}{m}$$

Количество теплоты, необходимое, чтобы перевести 1 кг твердого вещества при постоянной температуре в жидкое состояние.

## Кристаллизация (затвердевание)

Физический процесс, при котором вещество из жидкого состояния с отдачей теплоты переходит в кристаллическое (твердое) состояние.

Для кристаллизации вещества необходимо наличие так называемых *центров кристаллизации* — кристаллических зародышей, которыми могут быть не только кристаллики образующегося вещества, но и примеси, а также пыль, сажа и т. д.

## Сравнение характеристик при плавлении и кристаллизации (затвердевании)

Подведенное при плавлении количество теплоты отдается веществом при кристаллизации (затвердевании):  $|Q_{\text{пл}}| = -|Q_{\text{кр}}|$ . Температура плавления определенного вещества *при постоянном давлении* равна температуре кристаллизации (затвердевания):  $T_{\text{пл}} = T_{\text{кр}}$ . Температура плавления большинства веществ повышается с увеличением давления (исключение — лед: с повышением давления его температура плавления понижается).

## 2.3.14. АГРЕГАТНЫЕ СОСТОЯНИЯ. ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ

### 2.106 Фаза и агрегатное состояние

#### Фаза

Термодинамически равновесное состояние вещества, отличающееся по физическим свойствам от других возможных равновесных состояний того же вещества.

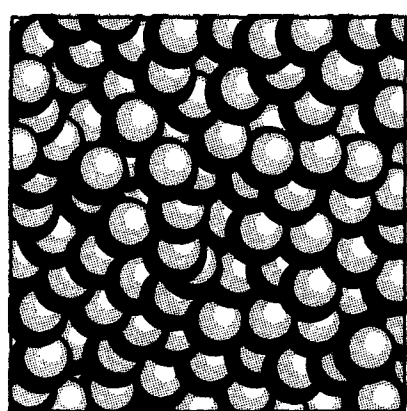
**Пример:** если в закрытом сосуде находится вода, то эта система является *двухфазной*: жидкая фаза — вода; газообразная фаза — смесь воздуха с водяными парами. Если в воду бросить кусочки льда, то эта система станет трехфазной, в которой лед является твердой фазой.

#### Агрегатные состояния

Состояния одного и того же вещества, переходы между которыми сопровождаются скачкообразным изменением его физических свойств.

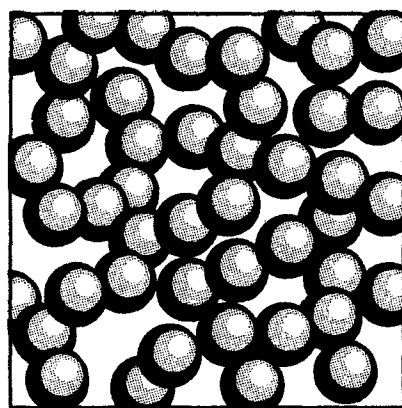
Вещество может находиться в трех агрегатных состояниях: *твердом, жидком и газообразном.*

Твердое состояние



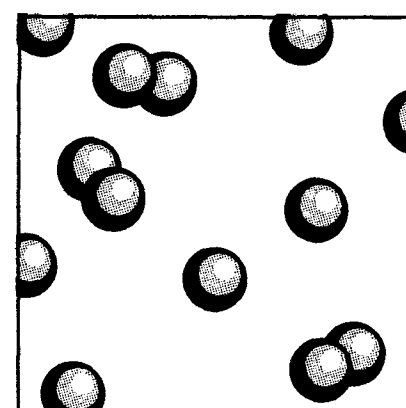
Твердые вещества имеют определенную форму и постоянный объем; молекулы и атомы сильно сцеплены друг с другом; молекулы и атомы образуют кристаллическую решетку и колеблются около узлов кристаллической решетки.

Жидкое состояние



Жидкие вещества стремятся сохранить объем, но не сохраняют формы. Молекулы находятся близко друг к другу, но их относительные положения не фиксированы и они медленно меняют положение друг относительно друга.

Газообразное состояние



Вещество в газообразном состоянии не сохраняет ни формы, ни объема. Объем и форма определяются сосудом, в котором газ находится. Молекулы газа, сталкиваясь время от времени друг с другом, меняют направление своего движения.

Изменения агрегатного состояния

См. 2.104 2.105. Переход в агрегатное состояние, отвечающее более высокой температуре, требует *подвода энергии*; переход же в агрегатное состояние, отвечающее более низкой температуре, сопровождается *выделением энергии*.



О понятиях «фаза» и «агрегатное состояние»

Часто понятие «фаза» употребляется в смысле агрегатного состояния, однако надо учитывать, что оно шире, чем понятие «агрегатное состояние». В пределах одного агрегатного состояния вещество может находиться в нескольких фазах, отличающихся по своим свойствам, составу и строению (лед, например, встречается в пяти различных модификациях — фазах).

**2.107** Фазовые переходы

Фазовый переход

Переход вещества из одной фазы в другую, связанный обязательно с качественными изменениями свойств вещества.

**Примеры:** изменения агрегатного состояния вещества 2.106 или переходы, связанные с изменениями в составе, строении и свойствах вещества (например, переход кристаллического вещества из одной модификации в другую).

Фазовые переходы I рода

Переходы, сопровождающиеся поглощением или выделением теплоты. Характеризуются постоянством температуры, изменениями энтропии и объема.

**Примеры:** плавление, кристаллизация 2.105.

## Фазовые переходы II рода

Переходы, не связанные с поглощением или выделением теплоты и изменением объема.

Характеризуются постоянством объема и энтропии, но скачкообразным изменением теплоемкости.

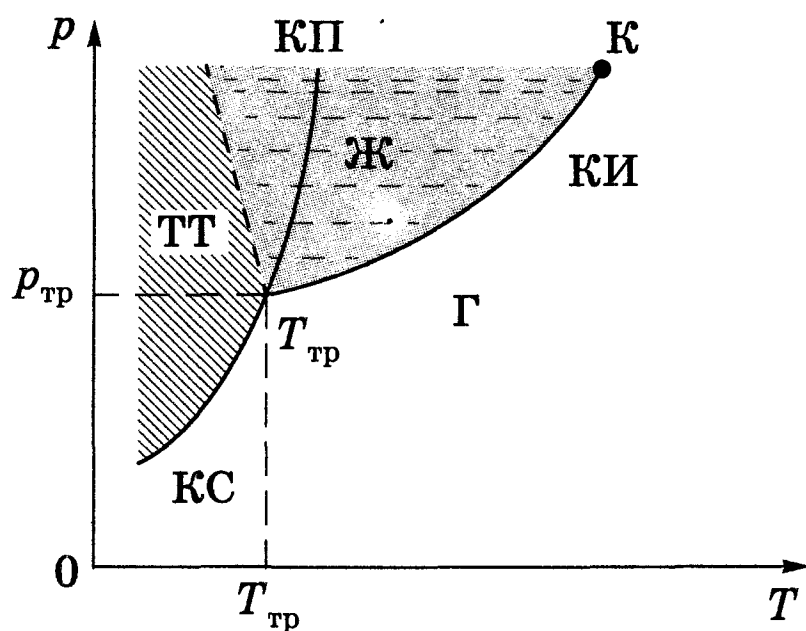
**Примеры:** переход ферромагнитных веществ (железа, никеля) при определенных давлении и температуре в парамагнитное состояние; переход металлов и сплавов при температуре, близкой к 0 К, в сверхпроводящее состояние, характеризующее скачкообразным уменьшением электрического сопротивления до нуля.

## 2.3.15. ДИАГРАММА СОСТОЯНИЯ И ЕЕ АНАЛИЗ

### 2.108 Диаграмма состояния. Тройная точка

#### Диаграмма состояния

Геометрическое изображение фазовых превращений, где в координатах  $p$ ,  $T$  задается зависимость между температурой фазового перехода и давлением в виде кривых испарения (КИ), плавления (КП) и сублимации (КС), разделяющих поле диаграммы на три области, соответствующие условиям существования твердой (ТТ), жидкой (Ж) и газообразной (Г) фаз.



#### Кривые фазового равновесия

Кривые на диаграмме; каждая точка на них соответствует условиям равновесия двух сосуществующих фаз: КП — твердого тела и жидкости, КИ — жидкости и газа, КС — твердого тела и газа.

#### Тройная точка

Точка, в которой пересекаются кривые фазового равновесия и которая, следовательно, определяет условия (температуру  $T_{тр}$  и давление  $p_{тр}$ ) одновременного равновесного сосуществования трех фаз вещества.

Каждое вещество имеет одну тройную точку. Координаты тройной точки воды:  $T = 273,16$  К (или  $t = 0,01$  °С (по шкале Цельсия)). Тройная точка воды — *реперная точка* для построения термодинамической температурной шкалы 2.4.

### 2.109 Уравнение Клапейрона—Клаузиуса.

#### Анализ диаграммы состояния

#### Уравнение Клапейрона—Клаузиуса

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(V_2 - V_1)}$$

Метод расчета кривой равновесия 2.108 двух фаз одного и того же вещества.

[ $L$  — теплота фазового перехода;  $(V_2 - V_1)$  — изменение объема вещества при переходе его из первой фазы во вторую;  $T$  — температура перехода (процесс изотермический);  $p$  — равновесное давление]

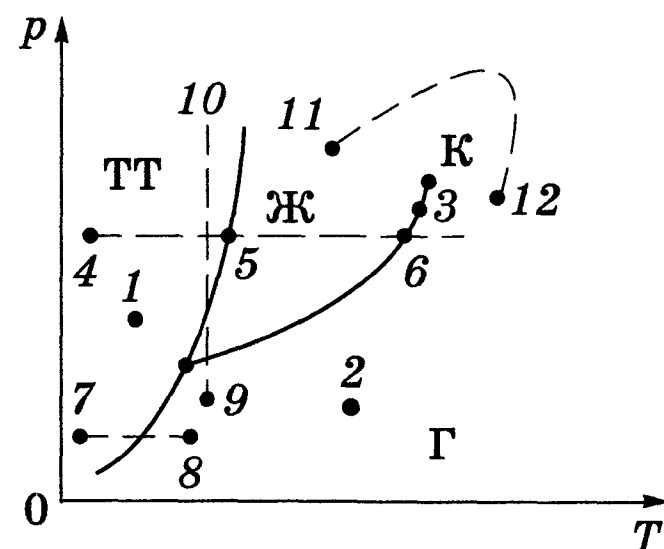
#### Применение уравнения Клапейрона—Клаузиуса

Позволяет определять наклоны кривых равновесия. Наклон задается знаком  $(V_2 - V_1)$ , так как  $L$  и  $T$  — положительны. При испарении жидкостей

и сублимации твердых тел объем вещества всегда возрастает, поэтому  $\frac{dp}{dT} > 0$ , т. е. в этих процессах повышение температуры приводит к увеличению давления, и наоборот. При плавлении большинства веществ объем, как правило, возрастает, т. е.  $\frac{dp}{dT} > 0$ ; следовательно, увеличение давления приводит к повышению температуры плавления (сплошная КП, рисунок 2.108). Для некоторых же веществ ( $H_2O$ , Ge, чугун и др.) объем жидкой фазы меньше объема твердой фазы, т. е.  $\frac{dp}{dT} < 0$ ; следовательно, увеличение давления сопровождается понижением температуры плавления (штриховая линия на рисунке 2.108).

### Возможности экспериментальных диаграмм состояния

На основе экспериментальной диаграммы состояния можно судить, в каком состоянии находится данное вещество при определенных  $p$  и  $T$ , а также какие фазовые переходы будут происходить при том или ином процессе. Например, при условиях, соответствующих точке 1, вещество находится в твердом состоянии, точке 2 — в газообразном, а точке 3 — одновременно в жидком и газообразном состояниях.



### Анализ возможных состояний вещества на основе экспериментальной диаграммы состояния

Допустим, что вещество в твердом состоянии, соответствующем точке 4, подвергается изобарному нагреванию, изображенному на диаграмме состояния горизонтальной штриховой прямой 4—5—6.

Из рисунка видно, что при температуре, соответствующей точке 5, вещество плавится, при более высокой температуре, соответствующей точке 6, начинает превращаться в газ.

Если же вещество находится в твердом состоянии, соответствующем точке 7, то при изобарном нагревании (штриховая прямая 7—8) кристалл превращается в газ, минуя жидкую фазу.

Если вещество находится в состоянии, соответствующем точке 9, то при изотермическом сжатии (штриховая прямая 9—10) оно пройдет следующие три состояния: газ — жидкость — кристаллическое состояние. На диаграммах состояния видно, что кривая испарения обрывается в критической точке  $K$ . Поэтому возможен *непрерывный* переход вещества из жидкого состояния в газообразное и обратно в обход критической точки, без пересечения кривой испарения (переход 11—12 на рисунке), т. е. такой переход, который не сопровождается фазовыми превращениями. Переход же кристаллического состояния в жидкое или газообразное может быть только скачкообразным (в результате фазового перехода), поэтому кривые плавления и сублимации не обрываются.

## 3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

### 3.1. Электростатика

#### 3.1.1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЗАРЯД И ЗАКОН ЕГО СОХРАНЕНИЯ. ЗАКОН КУЛОНА

##### 3.1 Электрический заряд и его свойства

###### Электрический заряд

Физическая величина, характеризующая способность тел или частиц к электромагнитным взаимодействиям.

###### Единица электрического заряда

1 Кл (кулон)

1 Кл — электрический заряд, проходящий через поперечное сечение проводника при силе тока 1 А за время 1 с. Кулон — производная единица.

1 Кл = 1 А · с

###### Элементарный электрический заряд

$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл

Наименьший электрический заряд, положительный или отрицательный, равный величине заряда электрона.

###### Носители элементарного электрического заряда

электрон      Носитель элементарного отрицательного заряда;  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг.

протон        Носитель элементарного положительного заряда;  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг.

###### Фундаментальные свойства электрических зарядов

- ◆ Существует в двух видах: положительный и отрицательный. Одноименные заряды отталкиваются, разноименные — притягиваются.
- ◆ Электрический заряд *инвариантен* (его величина не зависит от системы отсчета, т. е. не зависит от того, движется он или покоится).
- ◆ Электрический заряд *дискретен*, т. е. заряд любого тела составляет целое кратное от элементарного электрического заряда  $e$ .
- ◆ Электрический заряд *аддитивен* (заряд любой системы тел (частиц) равен сумме зарядов тел (частиц), входящих в систему).
- ◆ Электрический заряд подчиняется *закону сохранения заряда*.

##### 3.2 Закон сохранения электрического заряда

###### Замкнутая система зарядов

Система, не обменивающаяся зарядами с внешними телами.

###### Закон сохранения электрического заряда

Алгебраическая сумма электрических зарядов любой замкнутой системы остается неизменной, какие бы процессы ни происходили внутри данной системы.

##### 3.3 Закон Кулона

###### Точечный заряд

Заряд, сосредоточенный на теле, линейные размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с расстояниями до других заряженных тел, с которыми он взаимодействует. Точечный заряд, как и материальная точка, — физическая абстракция.

## Закон Кулона

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1 Q_2|}{r^2}$$

Сила взаимодействия  $F$  между двумя неподвижными точечными зарядами, находящимися в вакууме, пропорциональна зарядам  $Q_1$  и  $Q_2$  и обратно пропорциональна квадрату расстояния  $r$  между ними.

## Электрическая постоянная

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$$

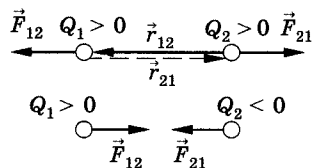
Относится к числу фундаментальных физических постоянных;  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$ .

## Закон Кулона в векторной форме

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r}$$

[ $\vec{F}_{12}$  — сила, действующая на заряд  $Q_1$  со стороны заряда  $Q_2$ ;  $\vec{r}_{12}$  — радиус-вектор, соединяющий заряд  $Q_2$  с зарядом  $Q_1$ ;  $r = |\vec{r}_{12}|$ ;  $\vec{F}_{21}$  — сила, действующая на заряд  $Q_2$  со стороны заряда  $Q_1$ ;  $\vec{r}_{21}$  — радиус-вектор, соединяющий заряд  $Q_1$  с зарядом  $Q_2$ ;  $\vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12}$ ]

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{\vec{r}_{21}}{r}$$



## Кулоновская сила

Сила  $\vec{F}_{12}$  или  $\vec{F}_{21}$ : направлена вдоль прямой, соединяющей взаимодействующие заряды (является центральной силой) и соответствует притяжению ( $F < 0$ ) в случае разноименных зарядов и отталкиванию ( $F > 0$ ) в случае одноименных зарядов (см. рисунок).

## 3.1.2. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ И ЕГО НАПРЯЖЕННОСТЬ

### 3.4 Напряженность электростатического поля

#### Электрическое поле

Силовое поле, посредством которого взаимодействуют электрические заряды.

#### Электростатическое поле

Поле, создаваемое неподвижными электрическими зарядами.

#### Пробный точечный положительный заряд

Заряд, используемый для обнаружения и опытного исследования электростатического поля и не искажающий исследуемое поле (не вызывает перераспределения зарядов, создающих поле).

#### Напряженность электростатического поля

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_0}$$

Физическая величина, определяемая силой, действующей на единичный положительный заряд, помещенный в данную точку поля.

Напряженность электростатического поля — силовая векторная характеристика.

#### Единица напряженности электростатического поля

$$1 \text{ Н/Кл} = 1 \text{ В/м}$$

1 Н/Кл — напряженность такого электростатического поля, которое на точечный заряд 1 Кл действует с силой в 1 Н (В (вольт) — единица потенциала [3.21](#)).



### 3.5 Напряженность поля точечного заряда в вакууме

Напряженность поля точечного заряда  
в векторной и скалярной формах

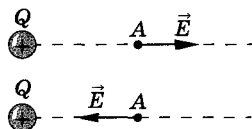
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} Q \vec{r};$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} Q$$

[ $\vec{r}$  — радиус-вектор, соединяющий данную точку поля с зарядом  $Q$ ;  $r = |\vec{r}|$ ;  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная]

Направление вектора  $\vec{E}$

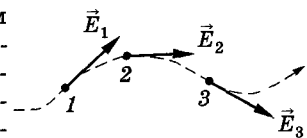
Направление вектора  $\vec{E}$  совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд. Если поле создается положительным зарядом, то вектор  $\vec{E}$  направлен вдоль радиуса-вектора от заряда во внешнее пространство (отталкивание пробного положительного заряда); если поле создается отрицательным зарядом, то вектор  $\vec{E}$  направлен к заряду.



### 3.6 Линии напряженности электростатического поля

Линии напряженности электростатического поля (силовые линии)

Линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора  $\vec{E}$ . Линиям напряженности приписывается направление, совпадающее с направлением вектора напряженности. Линии напряженности никогда не пересекаются, поскольку в каждой данной точке пространства вектор  $\vec{E}$  имеет лишь одно направление.

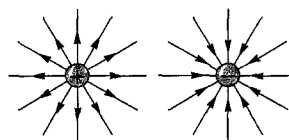


Линии напряженности в случае однородного поля

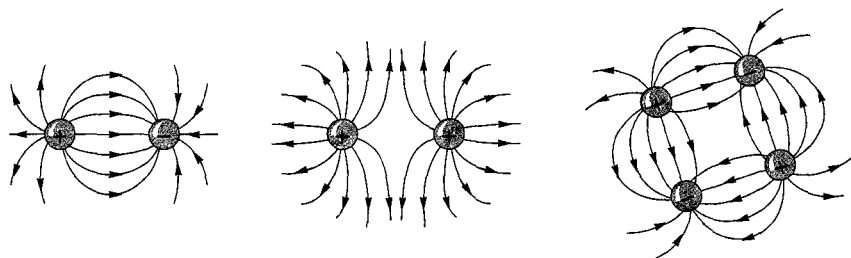
В случае *однородного* поля (для него вектор напряженности в любой точке постоянен по модулю и направлению) *линии напряженности параллельны вектору напряженности*.

Линии напряженности для точечного заряда

В случае точечного заряда линии напряженности — *радиальные прямые*, выходящие из заряда, если он положителен, и входящие в него, если заряд отрицателен.



Некоторые примеры графического изображения  
электростатических полей с помощью линий напряженности



### 3.1.3. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ. ПОЛЕ ДИПОЛЯ

#### 3.7 Принцип суперпозиции (наложения) электростатических полей

##### Принцип суперпозиции (наложения) электростатических полей

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

Напряженность  $\vec{E}$  результирующего поля, создаваемого системой зарядов, равна *геометрической* сумме напряженностей полей, создаваемых в данной точке каждым из зарядов в отдельности.

**Доказательство.** К кулоновским силам применим принцип независимости действия сил [1.2]:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i, \quad \vec{F} = Q_0 \vec{E} \quad \text{и} \quad \vec{F}_i = Q_0 E_i.$$

Подставив эти выражения в предыдущую формулу, получим  $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$ .

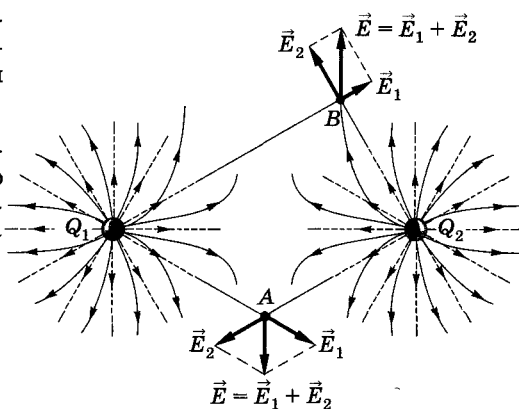
##### Возможные применения принципа

Расчет электростатического поля любой системы неподвижных зарядов

##### Пример применения принципа суперпозиции

Поле создается двумя точечными неподвижными положительными зарядами  $Q_1$  и  $Q_2$  ( $Q_1 = Q_2$ ).

На рисунке показаны напряженности результирующего поля в точке  $A$ , равноудаленной от зарядов, и в произвольной точке  $B$ .



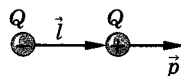
#### 3.8 Электрический диполь

##### Электрический диполь

Система двух равных по модулю разноименных точечных зарядов ( $+Q, -Q$ ), расстояние  $l$  между которыми значительно меньше расстояния до рассматриваемых точек поля.

##### Плечо диполя

Вектор  $\vec{l}$ , направленный по оси диполя (прямой, проходящей через оба заряда) от отрицательного заряда к положительному и равный расстоянию между ними.



##### Электрический момент диполя

$$\vec{p} = |Q| \vec{l}$$

Вектор  $\vec{p}$ , совпадающий по направлению с плечом диполя и равный произведению модуля заряда  $|Q|$  на плечо  $\vec{l}$ .

##### Расчет поля диполя в произвольной точке

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

Расчет производится согласно принципу суперпозиции [3.7], где  $\vec{E}_+$  и  $\vec{E}_-$  — напряженности полей, создаваемых соответственно положительным и отрицательным зарядами.

### 3.9 Поле диполя

#### Напряженность поля на продолжении оси диполя в точке A

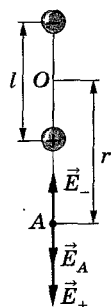
Напряженность поля диполя в точке A направлена вдоль оси диполя и, согласно принципу суперпозиции 3.7, по модулю равна

$$E = E_+ - E_-;$$

$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q}{(r - l/2)^2} - \frac{Q}{(r + l/2)^2} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(r + l/2)^2 - (r - l/2)^2}{(r - l/2)^2(r + l/2)^2}.$$

Согласно определению диполя 3.8,  $\frac{l}{2} \ll r$  (на рисунке для наглядности масштаб не выдержан), поэтому

$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ql}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3}.$$

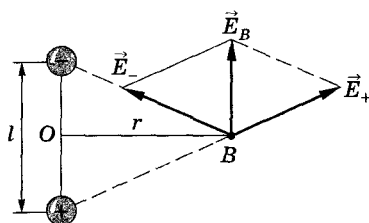


#### Напряженность поля на перпендикуляре, восстановленном к оси диполя из его середины

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2 + l^2/4} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2},$$

$$\frac{E_B}{E_+} = \frac{l}{\sqrt{r^2 + (l/2)^2}} \approx \frac{l}{r}, \quad E_B = \frac{E_+}{r^2},$$

$$E_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ql}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3}.$$

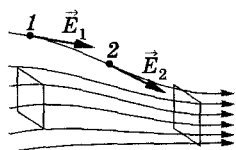


### 3.14. ТЕОРЕМА ГАУССА ДЛЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ВАКУУМЕ

#### 3.10 Поток вектора напряженности электростатического поля

##### Густота линий напряженности электростатического поля

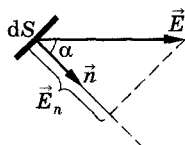
Чтобы линии напряженности характеризовали не только направление 3.6, но и значение напряженности электростатического поля, их проводят с определенной густотой: число линий напряженности, пронизывающих единицу площади поверхности, перпендикулярную линиям напряженности, должно быть равно модулю вектора  $\vec{E}$ .



##### Поток вектора напряженности сквозь площадку dS

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_n dS$$

$d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$  — вектор, модуль которого равен  $dS$ , а направление вектора совпадает с направлением  $\vec{n}$  к площадке. Выбор направления вектора  $\vec{n}$  (а следовательно, и  $d\vec{S}$ ) условен.



##### Поток вектора напряженности сквозь замкнутую поверхность S

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Интеграл берется по замкнутой поверхности S. Поток вектора  $\vec{E}$  — скалярная величина (зависит от конфигурации поля и от выбора направления  $\vec{n}$ ).

Для замкнутых поверхностей за положительное направление нормали принимается внешняя нормаль, т. е. нормаль, направленная наружу области, охватываемой поверхностью.

## Единица потока вектора $\vec{E}$

$$1 \text{ В} \cdot \text{м}$$

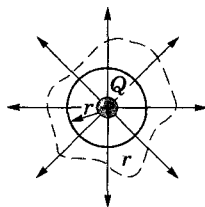
1 вольт-метр равен потоку напряженности сквозь поверхность площадью  $1 \text{ м}^2$ , перпендикулярную линиям напряженности поля напряженностью  $1 \text{ В/м}$ .

## 3.11 Примеры вычисления потока вектора $\vec{E}$

Поток вектора  $\vec{E}$  сквозь сферическую поверхность радиуса  $r$ , охватывающую точечный заряд  $Q$

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Этот результат справедлив для замкнутой поверхности любой формы. Так, если окружить сферу (см. рисунок) произвольной замкнутой поверхностью, то каждая линия напряженности, пронизывающая сферу, пройдет сквозь эту поверхность.



Поток вектора  $\vec{E}$  сквозь произвольную замкнутую поверхность, окружающую  $n$  зарядов

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n Q_i$$

Согласно принципу суперпозиции (3.7),  $\vec{E} = \sum \vec{E}_i$ , поэтому

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S (\sum_i \vec{E}_i) d\vec{S} = \sum_i \oint_S \vec{E}_i d\vec{S}.$$

Каждый из интегралов, стоящий под знаком суммы, равен  $\frac{Q_i}{\epsilon_0}$ , поэтому

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n Q_i.$$

[ $\vec{E}$  — напряженность поля, создаваемого всеми зарядами;  $\vec{E}_i$  — напряженность поля, создаваемая зарядом  $Q_i$ ;  $E_n$  — проекция вектора напряженности на направление нормали;  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная]

## 3.12 Теорема Гаусса для поля в вакууме

Теорема Гаусса (в случае дискретного распределения зарядов)

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n Q_i$$

Поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на  $\epsilon_0$ .

Объемная плотность заряда

$$\rho = \frac{dQ}{dV}$$

Физическая величина, определяемая зарядом, приходящимся на единицу объема.

Теорема Гаусса (в случае непрерывного распределения зарядов)

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \oint_V \rho dV$$

Поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен заряду, заключенному в объеме, ограниченном этой поверхностью, деленному на  $\epsilon_0$ .

### 3.1.5. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ГАУССА К РАСЧЕТУ ПОЛЕЙ В ВАКУУМЕ

#### 3.13 Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости

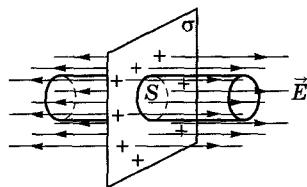
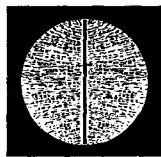
Поверхностная плотность заряда

$$\sigma = \frac{dQ}{dS}$$

Физическая величина, определяемая зарядом, приходящимся на единицу поверхности.

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Бесконечная плоскость заряжена с постоянной поверхностной плотностью  $\sigma$ . Линии напряженности перпендикулярны рассматриваемой плоскости и направлены от нее в обе стороны. В качестве замкнутой поверхности мысленно построим цилиндр, основания которого параллельны заряженной плоскости, а ось перпендикулярна ей.



Полный поток сквозь цилиндр равен сумме потоков сквозь его основания (площади оснований равны, и для основания  $E_n = E$ ), т. е. равен  $2ES$ . Согласно теореме Гаусса,

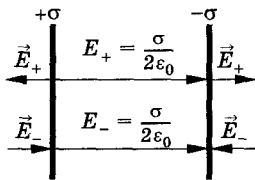
$$2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}, \text{ откуда } E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

#### 3.14 Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Плоскости заряжены с поверхностной плотностью  $+\sigma$  и  $-\sigma$ . Поле этих плоскостей находится как суперпозиция полей, создаваемых каждой плоскостью. На рисунке верхние стрелки соответствуют полю от положительной заряженной плоскости, нижние — от отрицательной. Слева и справа от плоскостей  $E = 0$  (поля вычитаются, линии вектора  $\vec{E}$  направлены навстречу друг другу). В области между плоскостями

$$E = E_+ + E_-, \text{ т. е. } E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$



#### 3.15 Поле равномерно заряженной сферической поверхности

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

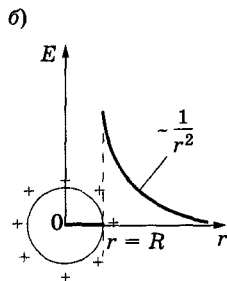
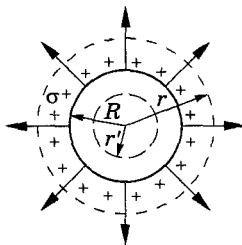
$$(r > R)$$

Сферическая поверхность радиуса  $R$  с общим зарядом  $Q$  заряжена равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma$ .

$$E = 0$$

$$(r' < R)$$

Благодаря равномерному распределению заряда по поверхности поле, создаваемое им, обладает сферической симметрией. Поэтому линии напряженности направлены радиально (рисунок а). Построим мысленно сфе-



ру радиуса  $r$ , имеющую общий центр с заряженной сферой. Если  $r > R$ , то внутрь поверхности попадает весь заряд  $Q$ , создающий рассматриваемое поле, и по теореме Гаусса  $4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0}$ , откуда  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$  ( $r \geq R$ ).

При  $r > R$  поле убывает с расстоянием  $r$  по такому же закону, как и у точечного заряда. График зависимости  $E$  от  $r$  приведен на рисунке б.

Если  $r' < R$ , то замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, поэтому внутри равномерно заряженной сферической поверхности  $E = 0$ .

### 3.16 Поле объемнозаряженного шара

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

$(r \geq R)$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r'$$

$(r' \leq R)$

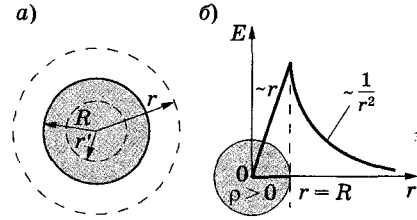
Шар радиуса  $R$  с общим зарядом  $Q$  (рисунок а) заряжен равномерно с объемной плотностью  $\rho$ . Из соображений симметрии следует, что для напряженности поля *вне шара* получится тот же результат, что и в случае сферической поверхности:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (r \geq R).$$

Внутри шара напряженность другая. Сфера радиуса  $r' < R$  охватывает заряд  $Q' = \frac{4}{3}\pi r'^3 \rho$ . Поэтому, согласно теореме Гаусса,  $4\pi r'^2 E = \frac{Q'}{\epsilon_0} = \frac{4}{3}\pi r'^3 \frac{\rho}{\epsilon_0}$ . Учитывая, что  $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ , получаем

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r' \quad (r' \leq R).$$

График зависимости  $E$  от  $r$  приведен на рисунке б.



### 3.17 Поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра

Линейная плотность заряда

$$\tau = \frac{dQ}{dl}$$

Физическая величина, определяемая зарядом, приходящимся на единицу длины.

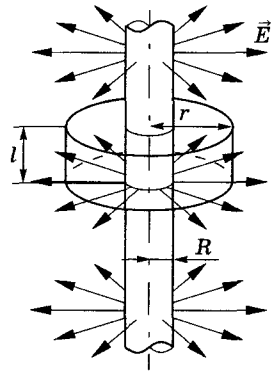
$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r}$$

$(r \geq R)$

$$E = 0$$

$(r < R)$

Бесконечный цилиндр радиуса  $R$  заряжен равномерно с *линейной плотностью*  $\tau$ . Из соображений симметрии следует, что линии напряженности будут направлены по радиусам круговых сечений цилиндра с одинаковой густотой во все стороны относительно оси цилиндра. В качестве замкнутой поверхности мысленно построим коаксиальный с заряженным цилиндром радиуса  $r$  и высотой  $l$ . Поток вектора  $E$  сквозь торцы цилиндра равен нулю (торцы параллельны линиям напряженности), а сквозь боковую поверхность  $-2\pi r l E$ . По теореме Гаусса при  $r > R$  имеем  $2\pi r l E = \tau l / \epsilon_0$ , откуда  $E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r}$ .



Если  $r < R$ , то замкнутая поверхность зарядов внутри не содержит, поэтому в этой области  $E = 0$ .



### 3.1.6. ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

#### 3.18 Работа перемещения заряда в электростатическом поле

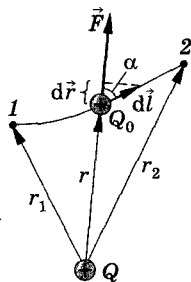
Работа при перемещении заряда  $Q_0$  из точки 1 в точку 2 в поле заряда  $Q$

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{QQ_0}{r_1} - \frac{QQ_0}{r_2} \right)$$

$$dA = \vec{F} d\vec{l} = F dl \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ_0}{r^2} dr$$

(учти, что  $dl \cos \alpha = dr$ ).

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dA = \frac{QQ_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{QQ_0}{r_1} - \frac{QQ_0}{r_2} \right).$$



Электростатическое поле — потенциально

$A_{12}$  не зависит от траектории перемещения, а определяется только положениями начальной 1 и конечной 2 точек.

#### 3.19 Теорема о циркуляции вектора $\vec{E}$

Элементарная работа сил поля по перенесению единичного заряда на пути  $d\vec{l}$

$$\vec{E} d\vec{l} = E_l dl$$

[ $E_l$  — проекция вектора  $\vec{E}$  на направление элементарного перемещения]

Циркуляция вектора  $\vec{E}$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L E_l dl$$

Интегрирование производится по любому замкнутому пути  $L$ .

Теорема о циркуляции вектора  $\vec{E}$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L E_l dl = 0$$

Равенство нулю означает, что электростатическое поле потенциально.

Формула  $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L E_l dl = 0$  справедлива только для электростатического поля.

### 3.1.7. ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

#### 3.20 Потенциальная энергия заряда

Потенциальная энергия заряда  $Q_0$  в поле заряда  $Q$  на расстоянии  $r$  от него

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ_0}{r}$$

Работа консервативных сил совершается за счет убыли потенциальной энергии, т. е.  $A_{12}$  можно представить как разность потенциальных энергий заряда  $Q_0$  в начальной и конечной точках поля заряда  $Q$ :

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ_0}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ_0}{r_2} = U_1 - U_2.$$

В формуле для  $A_{12}$  приняли, что при  $r \rightarrow \infty$  потенциал  $U = 0$ ,  $C = 0$ .

Потенциальная энергия заряда  $Q_0$  в поле, создаваемом системой  $n$  точечных зарядов

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = Q_0 \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

Равна сумме потенциальных энергий  $U_i$ , создаваемых каждым из зарядов в отдельности.

### 3.21 Потенциал. Принцип суперпозиции. Разность потенциалов

#### Потенциал электростатического поля

$$\varphi = \frac{U}{Q_0}$$

Физическая величина, определяемая потенциальной энергией единичного положительного заряда, помещенного в данную точку поля. Потенциал электростатического поля — энергетическая скалярная характеристика.

#### Единица потенциала

$$1 \text{ В} = 1 \text{ Дж/Кл}$$

1 В (вольт) — потенциал такой точки поля, в которой заряд в 1 Кл обладает потенциальной энергией 1 Дж.

#### Потенциал поля точечного заряда

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

[ $r$  — расстояние от данной точки до заряда  $Q$ , создающего поле;  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная]

#### Принцип суперпозиции (наложения) электростатических полей

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i}$$

Если поле создается несколькими зарядами, то потенциал поля системы зарядов равен алгебраической сумме потенциалов полей всех этих зарядов.

#### Работа сил электростатического поля при перемещении заряда $Q_0$ из точки 1 в точку 2

$$A_{12} = U_1 - U_2 = Q_0(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Равна произведению перемещаемого заряда на разность потенциалов в начальной и конечной точках **3.20**.

#### Разность потенциалов

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{Q_0}$$

Определяется работой, совершаемой силами поля при перемещении единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \, d\vec{l} = \int_1^2 E_l \, dl$$

Работа сил поля при перемещении заряда  $Q_0$  из точки 1 в точку 2 может быть записана в виде  $A_{12} = \int_1^2 Q_0 \vec{E} \, d\vec{l}$ , где

интегрирование можно производить вдоль любой линии, соединяющей точки 1 и 2, так как работа сил электростатического поля не зависит от траектории перемещения (электростатическое поле потенциально).

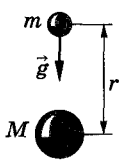
#### Еще одна формулировка потенциала электростатического поля

$$\varphi = \frac{A_\infty}{Q_0}$$

Физическая величина, определяемая работой сил поля по перемещению единичного положительного заряда при удалении его из данной точки в бесконечность.

Если перемещать заряд  $Q_0$  из произвольной точки за пределы поля, т. е. в бесконечность, где по условию потенциал равен нулю, то работа сил электростатического поля, согласно формуле  $A_{12} = Q_0(\varphi_1 - \varphi_2)$ ,  $A_\infty = Q_0\varphi$ .

### 3.22 Сравнение напряженности и потенциала для гравитационного и электростатического полей

Вид поля	Напряженность	Потенциал	
Поле тяготения (гравитационное поле)	$\vec{g} = \frac{\vec{P}}{m}$	$\varphi = \frac{\Pi}{m}$	
		$\varphi = -G \frac{M}{r}$	
Электростатическое поле	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_0}$	$\varphi = \frac{U}{Q_0}$	
		$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$	

[ $m$  — масса материальной точки в поле тяготения, создаваемом телом массой  $M$ ;  $\vec{F}_T$  — сила тяготения;  $\Pi$  — потенциальная энергия тела в поле тяготения;  $G$  — гравитационная постоянная;  $\vec{F}$  — сила, действующая со стороны заряда  $Q$  на заряд  $Q_0$ ;  $U$  — потенциальная энергия заряда  $Q_0$  в поле заряда  $Q$ ;  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная]

### 3.1.8. СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕННОСТЬЮ И ПОТЕНЦИАЛОМ. ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

#### 3.23 Напряженность как градиент потенциала

Связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi$$

Знак минус показывает, что вектор  $\vec{E}$  направлен в сторону *убывания* потенциала.

Работа по перемещению *единичного* точечного положительного заряда из одной точки в другую вдоль оси  $x$  при условии, что точки расположены бесконечно близко друг к другу и  $x_2 - x_1 = dx$ , равна  $E_x dx$ . Та же работа равна  $\varphi_1 - \varphi_2 = -d\varphi$ . Приравняв оба выражения, получим

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

где символ частной производной подчеркивает, что дифференцирование производится только по  $x$ . Повторив аналогичные рассуждения для осей  $y$  и  $z$ , имеем

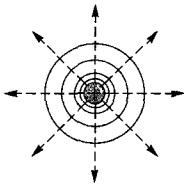
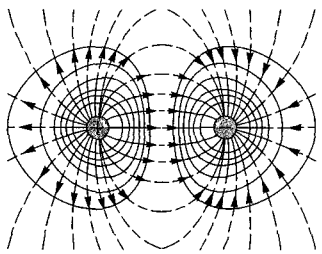
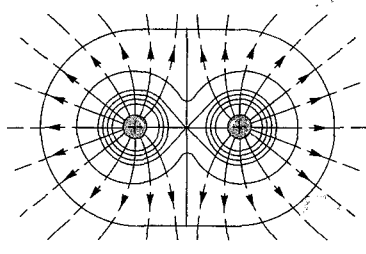
$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) \text{ или } \vec{E} = -\text{grad}\varphi,$$

( $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — единичные векторы координатных осей  $x, y, z$ ).

#### 3.24 Эквипотенциальные поверхности

Эквипотенциальные поверхности

Поверхности, во всех точках которых потенциал  $\varphi$  электростатического поля имеет одно и то же значение.

Точечный заряд	Разноименные точечные заряды	Одноименные точечные заряды
		

Потенциал точечного заряда  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$ , т. е. эквипотенциальные поверхности — сферы. Линии напряженности — радиальные прямые. Поэтому для точечного заряда линии напряженности перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям

На рисунках линии напряженности — штриховые линии и сечения эквипотенциальных поверхностей — сплошные линии.  
 Линии напряженности *всегда нормальны* к эквипотенциальным поверхностям. Действительно, все точки эквипотенциальной поверхности имеют одинаковый потенциал, поэтому работа по перемещению заряда вдоль этой поверхности равна нулю, т. е. электростатические силы, действующие на заряд, *всегда* направлены по нормальям к эквипотенциальным поверхностям.  
 Эквипотенциальных поверхностей вокруг каждого заряда и каждой системы зарядов можно провести бесчисленное множество. Однако их обычно проводят так, чтобы разности потенциалов между любыми двумя соседними эквипотенциальными поверхностями были одинаковы. Тогда густота эквипотенциальных поверхностей наглядно характеризует напряженность поля в разных точках. Там, где эти поверхности расположены гуще, напряженность поля больше

### 3.25 Сопоставление характеристик гравитационного и электростатических полей

Сравниваемые характеристики	Вид поля	
	гравитационное	электростатическое
Сила	$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ <b>1.62</b>	$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ Q_1 Q_2 }{r^2}$ <b>3.3</b>
Напряженность	$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$ <b>1.66</b>	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_0}$ <b>3.4</b>
Работа по перемещению тела или заряда	$A = m \left( \frac{GM}{R_2} - \frac{GM}{R_1} \right) = m(\varphi_1 - \varphi_2)$ <b>1.67</b>	$A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{QQ_0}{r_1} - \frac{QQ_0}{r_2} \right) = Q_0(\varphi_1 - \varphi_2)$ <b>3.18</b> <b>3.21</b>
Работа по замкнутому контуру	$\oint_L dA = 0$ <b>1.67</b>	$\oint_L dA = 0$ <b>3.18</b>
Потенциал	$\varphi = \frac{\Pi}{m}$ <b>1.68</b>	$\varphi = \frac{U}{Q_0}$ <b>3.21</b>
Связь между напряженностью и потенциалом	$\vec{g} = -\text{grad } \varphi$ <b>1.69</b>	$\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ <b>3.23</b>

### 3.1.9. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАЗНОСТИ ПОТЕНЦИАЛОВ ПО НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ

#### 3.26 Поле бесконечно заряженной бесконечной плоскости

Разность потенциалов между точками на расстояниях  $x_1$  и  $x_2$  от плоскости

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (x_2 - x_1)$$

$$d\varphi = -E dx, \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \text{3.13,}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (x_2 - x_1).$$

#### 3.27 Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей

Разность потенциалов между плоскостями с расстоянием  $d$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

$$d\varphi = -E dx, \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \text{3.14,}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d.$$

#### 3.28 Поле равномерно заряженной сферической поверхности с зарядом $Q$

Разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от центра сферы

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (r_1 > R, r_2 > R, r_2 > r_1)$$

$$d\varphi = -E dr, \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} Q \quad (r \geq R); \quad E = 0 \quad (r < R) \quad \text{3.15,}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} Q dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Потенциал поля вне сферической поверхности

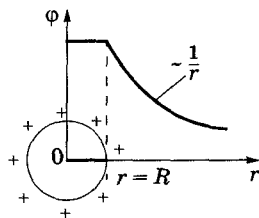
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Приняли в записанной выше формуле  $r_1 = r$  и  $r_2 = \infty$ .

Потенциал поля внутри сферической поверхности

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Внутри сферической поверхности потенциал всюду одинаков и равен потенциалу поверхности.



#### 3.29 Поле объемно заряженного шара радиуса $R$ с зарядом $Q$

Разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от центра шара

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (r_1 > R, r_2 > R, r_2 > r_1)$$

$$d\varphi = -E dr, \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} Q \quad (r \geq R) \quad \text{3.16,}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} Q dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Разность потенциалов между точками, лежащими внутри шара на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от центра шара

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (r_2^2 - r_1^2) \quad d\varphi = -E dr, \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} Q r \quad (r < R) \quad 3.16,$$

$$(r_1 < R, r_2 < R, r_2 > r_1) \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (r_2^2 - r_1^2).$$

### 3.30 Поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра радиуса $R$

Разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от оси заряженного цилиндра

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad d\varphi = -E dr, \quad E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \tau \quad (r \geq R) \quad 3.17,$$

$$(r_1 > R, r_2 > R, r_2 > r_1) \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

[  $\tau$  — линейная плотность заряда ]

## 3.1.10. ТИПЫ ДИЭЛЕКТРИКОВ. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ДИЭЛЕКТРИКОВ

### 3.31 Три типа диэлектриков

#### Диэлектрики с неполярными молекулами

Вещества, молекулы которых имеют симметричное строение, т. е. центры «тяжести» положительных и отрицательных зарядов в отсутствие внешнего электрического поля совпадают и, следовательно, дипольный момент  $\vec{p}$  молекулы равен нулю. *Молекулы* таких диэлектриков называются *неполярными*. Под действием внешнего электрического поля заряды неполярных молекул смещаются в противоположные стороны (положительные по полю, отрицательные против поля) и молекула приобретает дипольный момент.

**Примеры:**  $N_2, H_2, O_2, CO_2, CH_4, \dots$

#### Диэлектрики с полярными молекулами

Вещества, молекулы которых имеют асимметричное строение, т. е. центры «тяжести» положительных и отрицательных зарядов не совпадают. Таким образом, эти молекулы в отсутствие внешнего электрического поля обладают дипольным моментом. *Молекулы* таких диэлектриков называются *полярными*. При отсутствии внешнего поля, однако, дипольные моменты полярных молекул вследствие теплового движения ориентированы в пространстве хаотично и их результирующий момент равен нулю. Если такой диэлектрик поместить во внешнее поле, то силы этого поля будут стремиться повернуть диполи вдоль поля и возникает отличный от нуля результирующий дипольный момент.

**Примеры:**  $H_2O, NH_3, SO_2, CO, \dots$

#### Ионные диэлектрики

Вещества, молекулы которых имеют ионное строение. Ионные кристаллы представляют собой пространственные решетки с правильным чере-



дованием ионов разных знаков. В этих кристаллах нельзя выделить отдельные молекулы, а рассматривать кристаллы можно как систему двух вдвинутых одна в другую ионных подрешеток. При наложении на ионный кристалл электрического поля происходит некоторая деформация кристаллической решетки или относительное смещение подрешеток, приводящие к возникновению дипольных моментов.

Примеры: NaCl, KCl, KBr, ...

### 3.32 Поляризация диэлектриков и ее виды

#### Поляризация диэлектриков

Процесс ориентации диполей или появления под воздействием внешнего электрического поля ориентированных по полю диполей.

#### Три типа поляризации

##### Электронная (деформационная)

Поляризация диэлектрика с неполярными молекулами, заключающаяся в возникновении у атомов индуцированного дипольного момента за счет деформации электронных орбит.

##### Ориентационная (дипольная)

Поляризация диэлектрика с полярными молекулами, заключающаяся в ориентации имеющихся дипольных моментов молекул по полю. Тепловое движение препятствует полной ориентации молекул, но в результате совместного действия обоих факторов (электрическое поле и тепловое движение) возникает преимущественная ориентация дипольных моментов молекул по полю. Эта ориентация тем сильнее, чем больше напряженность электрического поля и ниже температура.

##### Ионная

Поляризация диэлектриков с ионными кристаллическими решетками, заключающаяся в смещении подрешетки положительных ионов вдоль поля, а отрицательных — против поля, приводящем к возникновению дипольных моментов.

### 3.1.11. НАПРЯЖЕННОСТЬ ПОЛЯ В ДИЭЛЕКТРИКЕ

#### 3.33 Количественное описание поляризации

#### Поляризованность

$$\vec{P} = \frac{\vec{P}_V}{V} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{V}$$

Дипольный момент единицы объема диэлектрика.

[ $\vec{P}_V = \sum_i \vec{p}_i$  — дипольный момент диэлектрика при его помещении во внешнее электрическое поле;  $V$  — объем диэлектрика;  $\vec{p}_i$  — дипольный момент молекулы]

#### Связь векторов $\vec{P}$ и $\vec{E}$

$$\vec{P} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$$

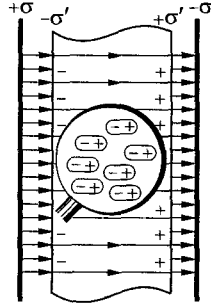
Эта линейная зависимость наблюдается для изотропных диэлектриков и не слишком больших  $\vec{E}$ .

[ $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная;  $\varepsilon$  — диэлектрическая восприимчивость вещества, характеризующая свойства диэлектрика;  $\varepsilon$  — безразмерная величина, как правило, составляет несколько единиц]

### 3.34 Описание поля в диэлектрике

#### Поляризация диэлектрика во внешнем электрическом поле

Диэлектрик, помещенный во внешнее однородное электрическое поле  $\vec{E}_0$  (создается двумя разноименно заряженными плоскостями), поляризуется: происходит смещение зарядов — положительных — по полю, отрицательных — против поля. На правой грани диэлектрика будет избыток положительного заряда с поверхностной плотностью  $+\sigma'$ , на левой — отрицательного заряда  $-\sigma'$ . Эти нескомпенсированные *заряды*, появляющиеся в результате поляризации диэлектрика, называются *связанными*;  $\sigma' < \sigma$ .



#### Результирующее поле внутри диэлектрика

$$E = E_0 - E'$$

Поле  $E'$  связанных зарядов направлено против внешнего поля  $E_0$  (поля, создаваемого *свободными* зарядами) и ослабляет его.

$$E = \frac{E_0}{1 + \alpha} = \frac{E_0}{\epsilon}$$

$E' = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$  (поле, созданное двумя заряженными плоскостями). Дипольный момент диэлектрика  $p_V = PV = PSd$ ;  $p_V = Q'd = \sigma'Sd$ , тогда  $PSd = \sigma'Sd$ , т. е.  $\sigma' = P$ . Подставив  $P = \alpha\epsilon_0 E$  и  $\sigma'$  в формулу

$$E = E_0 - E', \text{ получим } E = E_0 - \alpha E_0, \text{ откуда } E = \frac{E_0}{1 + \alpha}.$$

[ $S$  — площадь грани пластинки;  $d$  — ее толщина]

#### Диэлектрическая проницаемость среды

$$\epsilon = \frac{E_0}{E}$$

Безразмерная величина, показывающая, во сколько раз поле ослабляется диэлектриком, количественно характеризуя свойство диэлектрика поляризоваться в электрическом поле.

### 3.1.12. ТЕОРЕМА ГАУССА ДЛЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ДИЭЛЕКТРИКЕ

### 3.35 Электрическое смещение

#### Электрическое смещение для изотропной среды

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}; \vec{P} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}; \epsilon = 1 + \alpha; \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

[ $\epsilon_0$  — электрическая постоянная;  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды;  $\vec{E}$  — напряженность электрического поля;  $\alpha$  — диэлектрическая восприимчивость среды]

#### Необходимость введения электрического смещения

Вектор  $\vec{E}$ , переходя через границу диэлектриков, претерпевает скачкообразное изменение [3.34](#), создавая неудобства для расчета полей. Поэтому вводят вектор электрического смещения, который свободен от этих недостатков. Единица электрического смещения 1 Кл/м<sup>2</sup>.

#### Физический смысл вектора электрического смещения

Результирующее поле в диэлектрике описывается вектором  $\vec{E}$  (он зависит от свойств диэлектрика). Вектор  $\vec{D}$  описывает электростатическое

поле, создаваемое *свободными зарядами*. Связанные заряды, возникающие в диэлектрике, могут вызвать, однако, перераспределение свободных зарядов, создающих поле. Поэтому вектор  $\vec{D}$  характеризует электростатическое поле, создаваемое *свободными зарядами* (т. е. в вакууме), но при таком их распределении в пространстве, какое имеется *при наличии диэлектрика*.

### Линии электрического смещения

Линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением  $\vec{D}$ .

Направление и густота линий электрического смещения определяются так же, как и для линий вектора  $\vec{E}$  **3.6** и **3.10**.

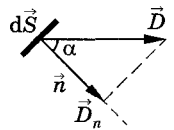
Линии вектора  $\vec{E}$  могут начинаться и заканчиваться на любых зарядах — свободных и связанных, в то время как линии вектора  $\vec{D}$  — только на свободных зарядах. Через области поля, где находятся связанные заряды, линии вектора  $\vec{D}$  проходят не прерываясь.

### 3.36 Поток вектора электрического смещения

Поток вектора электрического смещения сквозь площадку  $dS$

$$d\Phi_D = \vec{D} \cdot d\vec{S} = D_n dS$$

$d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$  — вектор, модуль которого равен  $dS$ , а направление совпадает с направлением  $\vec{n}$  к площадке.



Поток вектора электрического смещения сквозь замкнутую поверхность  $S$

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S D_n dS$$

Интеграл берется по замкнутой поверхности  $S$ . Поток вектора  $D$  — *алгебраическая величина* (зависит от конфигурации поля  $\vec{D}$  и от выбора направления нормали  $\vec{n}$ ).

Единицы потока вектора  $\vec{D}$

1 Кл

1 Кл (кулон) равен потоку электрического смещения, связанному с суммарным свободным зарядом 1 Кл.

### 3.37 Теорема Гаусса для поля в диэлектрике

Теорема Гаусса (в случае дискретного распределения зарядов)

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S D_n dS = \sum_{i=1}^n Q_i$$

Поток вектора смещения электростатического поля в *диэлектрике* сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности *свободных* электрических зарядов.

В такой форме теорема Гаусса справедлива для электростатического поля как для однородной и изотропной, так и для неоднородной и анизотропной сред.

Теорема Гаусса (в случае непрерывного распределения зарядов)

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S D_n dS = \oint_V \rho dV$$

Поток вектора смещения электростатического поля в *диэлектрике* сквозь произвольную замкнутую поверхность равен свободному заряду, заключенному в объеме, ограниченном этой поверхностью.

### 3.1.13. УСЛОВИЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕД

#### 3.38 Тангенциальные составляющие векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ на границе раздела

Граница раздела двух однородных изотропных диэлектриков при *отсутствии* на границе свободных зарядов.

Тангенциальные составляющие векторов  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$

$$E_{\tau_1} = E_{\tau_2}$$

Согласно теореме о циркуляции 3.19,

$$\oint_{ABCD} \vec{E} d\vec{l} = 0$$

ABCD

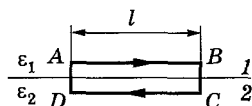
(ABCD — небольшой замкнутый контур вблизи границы раздела). Тогда  $E_{\tau_1} l - E_{\tau_2} l = 0$  (интегралы по участкам BC и DA ничтожно малы), откуда  $E_{\tau_1} = E_{\tau_2}$ .

Тангенциальные составляющие векторов  $\vec{D}_1$  и  $\vec{D}_2$

$$\frac{D_{\tau_1}}{D_{\tau_2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

Учти, что  $E_{\tau_1} = \frac{D_{\tau_1}}{\epsilon_0 \epsilon_1}$ ;  $E_{\tau_2} = \frac{D_{\tau_2}}{\epsilon_0 \epsilon_2}$ .

[ $\epsilon_0$  — электрическая постоянная;  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  — соответственно диэлектрические проницаемости первого и второго диэлектрика]



#### 3.39 Нормальные составляющие векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ на границе раздела

Граница раздела двух однородных изотропных диэлектриков при *отсутствии* на границе свободных зарядов.

Нормальные составляющие векторов  $\vec{D}_1$  и  $\vec{D}_2$

$$D_{n_1} = D_{n_2}$$

Согласно теореме Гаусса для поля в диэлектрике 3.37,

$$D_{n_1} \Delta S - D_{n_2} \Delta S = 0$$

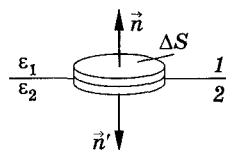
( $\vec{n}$  и  $\vec{n}'$  к основаниям построенного прямого цилиндра ничтожной высоты с одним основанием в одном диэлектрике, другом — во втором направлены противоположно), откуда  $D_{n_1} = D_{n_2}$ .

Нормальные составляющие векторов  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$

$$\frac{E_{n_1}}{E_{n_2}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

Учти, что  $D_{n_1} = \epsilon_0 \epsilon_1 E_{n_1}$ ,  $D_{n_2} = \epsilon_0 \epsilon_2 E_{n_2}$ .

[ $\epsilon_0$  — электрическая постоянная;  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  — соответственно диэлектрические проницаемости первого и второго диэлектрика]



### 3.1.14. СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКИ

#### 3.40 Свойства сегнетоэлектриков

Сегнетоэлектрики

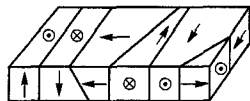
Диэлектрики, обладающие в определенном интервале температур спонтанной (самопроизвольной) поляризованностью, т. е. поляризованностью в отсутствие внешнего электрического поля.

**Примеры:** сегнетова соль  $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$  (от нее и получили свое название сегнетоэлектрики) и титанат бария  $\text{BaTiO}_3$ .

Строение сегнетоэлектриков

В отсутствие внешнего электрического поля сегнетоэлектрик — как бы мозаика из *доменов* — областей с различными направлениями поляризо-

ванности  $\vec{P}$  (направление  $\vec{P}$  на примере титаната бавария показано на рисунке стрелками и знаками  $\odot$ ,  $\oplus$ ). В смежных доменах эти направления разные, и дипольный момент диэлектрика равен нулю. Во внешнем поле происходит переориентация дипольных моментов доменов сегнетоэлектрика по полю, а возникшее при этом суммарное электрическое поле доменов будет поддерживать их некоторую ориентацию и после прекращения действия внешнего поля. Поэтому сегнетоэлектрики имеют аномально большие значения диэлектрической проницаемости (для сегнетовой соли, например,  $\epsilon_{\max} \approx 10^4$ ).



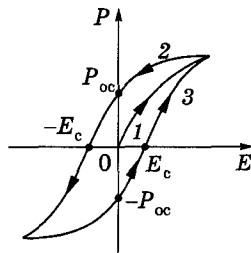
## Точка Кюри

Определенная температура для каждого сегнетоэлектрика, выше которой он становится обычным диэлектриком.

Сегнетоэлектрики имеют одну точку Кюри (исключение — сегнетовая соль ( $-18$  и  $+24$  °C)). Вблизи точки Кюри наблюдается резкий рост теплоемкости вещества. Превращение сегнетоэлектрика в обычный диэлектрик сопровождается фазовым переходом II рода [2, 107].

## Петля гистерезиса

Для сегнетоэлектриков связь между поляризованностью  $P$  и напряженностью  $E$  *нелинейная* и зависит от значений  $E$  в предшествующие моменты времени. С увеличением  $E$  внешнего поля  $P$  растет, достигая насыщения (кривая 1). Уменьшение  $P$  с уменьшением  $E$  происходит по кривой 2, и при  $E = 0$  сегнетоэлектрик сохраняет *остаточную поляризованность*  $P_{oc}$ . Чтобы ее уничтожить, надо приложить электрическое поле обратного направления ( $-E_c$ ).  $E_c$  — *коэрцитивная сила*. Если  $E$  изменять далее, то  $P$  изменяется по кривой 3 петли гистерезиса.



## 3.1.15. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

### 3.41 Типы проводников. Поле внутри проводника

#### Проводники

Тела, в которых электрический заряд может перемещаться по всему его объему.

#### первого рода

металлы — перенесение в них зарядов (свободных электронов) не сопровождается химическими превращениями.

#### второго рода

например, расплавленные соли, растворы кислот, — перенесение в них зарядов (положительных и отрицательных ионов) ведет к химическим изменениям.

#### Напряженность поля внутри проводника

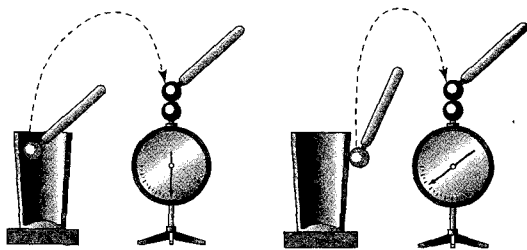
$$\vec{E} = 0$$

Если поместить проводник во внешнее электростатическое поле или его зарядить, то на заряды проводника будет действовать электростатическое поле, в результате чего они начнут перемещаться до тех пор, пока не установится равновесное распределение зарядов, при котором *электростатическое поле внутри проводника обращается в нуль*. Если бы это было не так, то заряды двигались бы без затраты энергии, что противоречит закону сохранения энергии.

## Распределение зарядов в проводниках

Заряды располагаются *на поверхности проводника*. Поверхностная плотность зарядов зависит от формы проводника и различия в разных его точках.

На рисунках показан заряженный полый металлический стакан.



### Доказательство распределения зарядов на поверхности проводника

Если проводнику сообщить некоторый заряд  $Q$ , то нескомпенсированные заряды располагаются *только на поверхности* проводника. Это следует непосредственно из теоремы Гаусса, согласно которой заряд  $Q$ , находящийся внутри проводника в некотором объеме, ограниченном произвольной замкнутой поверхностью, равен

$$Q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S D_n \cdot dS = 0,$$

так как во всех точках внутри поверхности  $D = 0$ .

## 3.42 Эквипотенциальность поверхности проводника

### Потенциал во всех точках внутри проводника

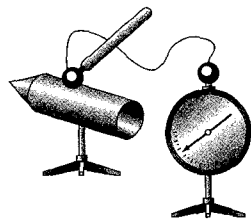
$$\varphi = \text{const}$$

Напряженность поля внутри проводника  $\vec{E} = 0$  3.41, а  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$  3.23, поэтому потенциал во всех точках внутри проводника постоянен: *поверхность проводника* в электростатическом поле является *эквипотенциальной*. Вектор  $\vec{E}$  направлен *по нормали к каждой точке поверхности проводника*. Если бы это было не так, то под действием касательной составляющей  $\vec{E}$  заряды начали бы перемещаться по поверхности проводника, что противоречит равновесному распределению зарядов.

*Поверхность проводника в электростатическом поле — экви­потенциальная поверхность.*

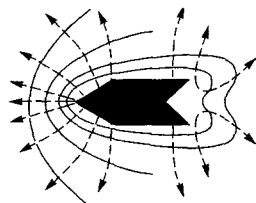
### Экспериментальное подтверждение экви­потенциальности поверхности проводника

Показан цилиндрический *заряженный* проводник с коническим выступом на одном основании и такой же впадиной на другом. Пробный шарик на изолирующей ручке соединен проволокой с электрометром. При перемещении шарика по наружной и внутренней поверхности проводника показания электрометра *одинаковы*.



### Линии напряженности (штриховые линии) и экви­потенциальные поверхности (сплошные линии) поля заряженного металлического цилиндра с выступом и впадиной

Так как вектор  $\vec{E}$  всегда нормален к экви­потенциальным поверхностям и густота экви­потенциальных поверхностей характеризует напря­женность поля в разных точках 3.24, то, зная расположение линий напряженности, можно построить экви­потенциальные поверхности, и наоборот.

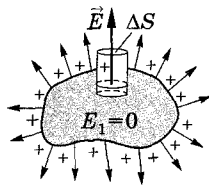


### 3.43 Связь между $E$ вблизи проводника и поверхностной плотностью зарядов $\sigma$

Формула, связывающая напряженность поля вблизи поверхности заряженного проводника с поверхностной плотностью зарядов  $\sigma$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}$$

Применим теорему Гаусса 3.37 к бесконечно малому цилиндру с основаниями  $\Delta S$ , пересекающему границу проводника — диэлектрик. Ось цилиндра ориентирована вдоль вектора  $\vec{E}$ . Поток вектора электрического смещения сквозь внутреннюю часть цилиндрической поверхности равен нулю, так как внутри проводника  $E_1$  (следовательно, и  $D_1$ ) равен нулю, поэтому поток вектора  $\vec{D}$  сквозь замкнутую цилиндрическую поверхность определяется только потоком сквозь наружное основание цилиндра. Этот поток ( $D\Delta S$ ) равен сумме зарядов ( $Q = \sigma\Delta S$ ), охватываемых поверхностью:  $D\Delta S = \sigma\Delta S$ , т. е.  $D = \sigma$ , откуда  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}$ .



Приведенная формула определяет напряженность электростатического поля вблизи поверхности проводника *любой формы*.

[ $\epsilon_0$  — электрическая постоянная;  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды, окружающей проводник]

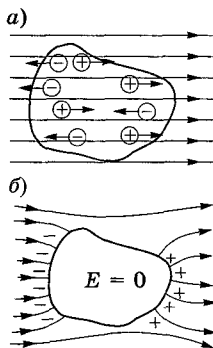
### 3.44 Электростатическая индукция

Электростатическая индукция

Явление перераспределения поверхностных зарядов на проводнике во внешнем электростатическом поле.

Механизм электростатической индукции

Если во внешнее электростатическое поле внести нейтральный проводник, то свободные заряды (электроны, ионы) перемещаются: положительные — по полю, отрицательные — против поля (рисунок а). На одном конце проводника будет наблюдаться избыток положительного заряда, на другом — избыток отрицательного. Эти заряды называются *индуцированными*. Процесс будет происходить до тех пор, пока напряженность поля внутри проводника станет равной нулю, а линии напряженности вне проводника — перпендикулярными его поверхности. Индуцированные заряды располагаются на внешней поверхности проводника.



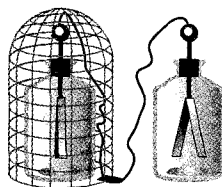
### 3.45 Электростатическая защита

Электростатическая защита

Экранирование тел (например, измерительных приборов) от влияния внешних электростатических полей.

Объяснение электростатической защиты

В состоянии равновесия заряды внутри проводника отсутствуют, поэтому внутри полости поле будет отсутствовать. Если проводник с полостью заземлить, то потенциал во всех точках — нулевой и полость изолирована от влияния внешних электростатических полей. Вместо сплошного проводника для защиты может быть использована металлическая сетка.





### 3.1.16. ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ. КОНДЕНСАТОРЫ

#### 3.46 Электроемкость уединенного проводника

##### Уединенный проводник

Проводник, удаленный от других проводников, тел и зарядов.

##### Электроемкость уединенного проводника

$$C = \frac{Q}{\varphi}$$

Определяется зарядом, сообщением которого проводнику изменяет его потенциал на единицу.

##### Единица электроемкости

$$1 \text{ Ф} = 1 \text{ Кл/В}$$

1 Ф (фарад) — емкость такого уединенного проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда 1 Кл.

##### Электроемкость уединенного шара

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R \quad \text{Потенциал шара } \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} Q; \quad C = \frac{Q}{\varphi}; \quad C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R.$$

[ $\epsilon_0$  — электрическая постоянная;  $Q$  — заряд шара;  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды;  $R$  — радиус шара]

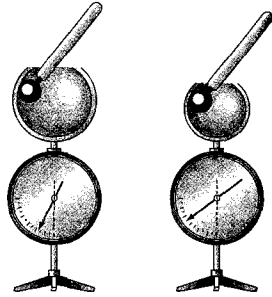
##### Зависимость электроемкости от размеров шара (опыт)

Двум шарам разных диаметров сообщают одинаковые заряды. Измерения показывают, что потенциалы шаров различны: для шара большего размера потенциал меньше, т. е. шар больших размеров обладает большей электроемкостью.

Каков должен быть радиус шара, для которого  $C = 1 \text{ Ф}$ ?

$$R = \frac{C}{4\pi\epsilon_0} \quad (\text{в вакууме}); \quad C = 1 \text{ Ф}; \quad R \approx 9 \cdot 10^6 \text{ км}$$

1400 раз больше радиуса Земли). Емкость Земли приблизительно равна 0,7 мФ.



#### 3.47 Электроемкость различных типов конденсаторов

##### Конденсатор

Система из двух проводников (обкладок) с одинаковыми по модулю, но противоположными по знаку зарядами, форма и расположение которых таковы, что поле сосредоточено в узком зазоре между обкладками.

##### Электроемкость конденсатора

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

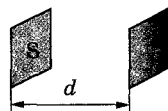
Физическая величина, равная отношению заряда  $Q$ , накопленного в конденсаторе, к разности потенциалов ( $\varphi_1 - \varphi_2$ ) между его обкладками.

##### Электроемкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\epsilon_0\epsilon S}{d}$$

Состоит из двух параллельных металлических пластин.

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2}, \quad Q = \sigma S, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma d}{\epsilon_0\epsilon} \quad \text{3.27}, \quad C = \frac{\epsilon_0\epsilon S}{d}.$$



[ $S$  — площадь пластин конденсатора;  $d$  — расстояние между ними;  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная;  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость (при наличии диэлектрика между обкладками);  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда;  $Q$  — заряд конденсатора;  $\varphi_1 - \varphi_2$  — разность потенциалов между обкладками]

## Емкость сферического конденсатора

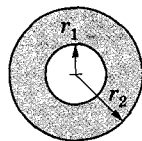
$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

Состоит из двух concentрических обкладок, разделенных сферическим слоем диэлектрика.

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2}; \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad \text{3.28,}$$

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

[ $\epsilon_0$  — электрическая постоянная;  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость;  $r_1$  и  $r_2$  — соответственно радиусы concentрических сфер;  $\varphi_1 - \varphi_2$  — разность потенциалов между обкладками;  $Q$  — заряд конденсатора]



## Емкость цилиндрического конденсатора

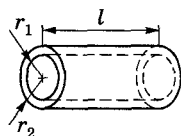
$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

Состоит из двух полых коаксиальных цилиндров, вставленных один в другой, между которыми находится слой диэлектрика.

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2},$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon l} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad \text{3.30,} \quad C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon}{\ln(r_2/r_1)}.$$

[ $\epsilon_0$  — электрическая постоянная;  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость;  $r_1$  и  $r_2$  — соответственно радиусы цилиндров;  $Q$  — заряд конденсатора;  $\varphi_1 - \varphi_2$  — разность потенциалов между обкладками;  $l$  — длина обкладок;  $\tau$  — линейная плотность заряда]



**Вывод.** Емкость конденсаторов любой формы прямо пропорциональна диэлектрической проницаемости диэлектрика, заполняющего пространство между обкладками. Поэтому применение в качестве прослойки сегнетоэлектриков значительно увеличивает емкость конденсаторов.

## 3.48 Последовательное и параллельное соединение конденсаторов

Соединение	Последовательное	Параллельное
Схема		
Сохраняющаяся величина	$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = Q$ $Q = \text{const}$	$\varphi_A - \varphi_B = \text{const}$
Суммируемая величина	разность потенциалов $\Delta\varphi = \sum_{i=1}^n \Delta\varphi_i$	заряд $Q = \sum_{i=1}^n Q_i$
Результирующая емкость	$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$	$C = \sum_{i=1}^n C_i$
Вывод формулы для результирующей емкости	Заряды всех обкладок конденсаторов равны по модулю, а разность потенциалов на зажимах батареи $\Delta\varphi = \sum_{i=1}^n \Delta\varphi_i, \quad \text{где } \Delta\varphi_i = \frac{Q}{C_i},$ $\Delta\varphi = \frac{Q}{C} = Q \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i},$ откуда $\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$	Разность потенциалов на обкладках конденсаторов одинакова и равна $(\varphi_A - \varphi_B)$ . Тогда $Q_1 = C_1(\varphi_A - \varphi_B),$ $Q_2 = C_2(\varphi_A - \varphi_B),$ $\dots \dots \dots$ $Q_n = C_n(\varphi_A - \varphi_B),$ $Q = \sum_{i=1}^n Q_i = (C_1 + C_2 + \dots + C_n)(\varphi_A - \varphi_B).$ Результирующая емкость батареи $C = Q/(\varphi_A - \varphi_B) = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i.$

### 3.1.17. ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ И УЕДИНЕННОГО ПРОВОДНИКА

#### 3.49 Энергия неподвижных точечных зарядов

##### Энергия двух неподвижных точечных зарядов

$$W = \frac{1}{2} (Q_1\varphi_{12} + Q_2\varphi_{21})$$

Два неподвижных точечных заряда  $Q_1$  и  $Q_2$  находятся на расстоянии  $r$  друг от друга. Каждый заряд в поле другого обладает потенциальной энергией:  $W_1 = Q_1\varphi_{12}$ ,  $W_2 = Q_2\varphi_{21}$ , где

$$\varphi_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r} \text{ и } \varphi_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r}, \text{ т. е.}$$

$$W_1 = W_2 = W = Q_1\varphi_{12} = Q_2\varphi_{21} = \frac{1}{2} (Q_1\varphi_{12} + Q_2\varphi_{21}).$$

[ $\varphi_{12}$  и  $\varphi_{21}$  — соответственно потенциалы, создаваемые зарядом  $Q_2$  в точке нахождения заряда  $Q_1$  и зарядом  $Q_1$  в точке нахождения заряда  $Q_2$ ]

##### Энергия системы неподвижных точечных зарядов

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i\varphi_i$$

[ $\varphi_i$  — потенциал, создаваемый в той точке, где находится заряд  $Q_i$ , всеми зарядами, кроме  $i$ -го]

#### 3.50 Энергия заряженного уединенного проводника

##### Работа, совершаемая при увеличении потенциала проводника от 0 до $\varphi$

$$A = \int_0^{\varphi} C\varphi \, d\varphi = \frac{C\varphi^2}{2}$$

Для увеличения заряда уединенного проводника (заряд  $Q$ , емкость  $C$ , потенциал  $\varphi$ ) на  $dQ$  необходимо совершить работу  $dA = \varphi \, dQ = C\varphi \, d\varphi$ .

##### Энергия заряженного уединенного проводника

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{Q\varphi}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

Равна работе, которую необходимо совершить, чтобы зарядить этот проводник.

### 3.1.18. ЭНЕРГИЯ ЗАРЯЖЕННОГО КОНДЕНСАТОРА. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

#### 3.51 Энергия заряженного конденсатора

##### Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2} = \frac{Q\Delta\varphi}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

[ $Q$  — заряд конденсатора;  $C$  — емкость конденсатора;  $\Delta\varphi$  — разность потенциалов между обкладками конденсатора]

##### Механическая (пондеромоторная) сила

$$F = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0\epsilon S}$$

Сила, с которой пластины конденсатора притягивают друг друга.

Расстояние  $x$  между пластинами необходимо изменить на  $dx$ . Сила совершает работу  $dA = F \, dx$  за счет уменьшения потенциальной энергии систем:

$F \, dx = -dW$ ,  $F = -\frac{dW}{dx}$ . Подставив в  $W = \frac{Q^2}{2C}$  значение  $C = \frac{\epsilon_0\epsilon S}{d}$ , получим

$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0\epsilon S} x$ . Тогда пондеромоторная сила  $F = -\frac{dW}{dx} = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0\epsilon S}$ .

Знак минус указывает на то, что  $F$  — сила притяжения.

## 3.52 Энергия электростатического поля

### Энергия электростатического поля

$$W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V$$

В формулу для энергии плоского конденсатора  $W = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2}$  подставим

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} \text{ и } \Delta\varphi = Ed, \text{ тогда } W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} Sd = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V.$$

### Объемная плотность энергии

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2}$$

Энергия единицы объема.

Эта формула справедлива только для *изотропного диэлектрика* (выполняется соотношение  $\vec{P} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$  (3.33)).

[ $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная;  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость;  $V = Sd$  — объем конденсатора;  $E$  — напряженность электростатического поля;  $\vec{P}$  — поляризованность;  $\varepsilon$  — диэлектрическая восприимчивость вещества]

### Локализация энергии в поле и носитель энергии — поле

Полученные формулы связывают энергию конденсатора *с зарядом* на его обкладках и *с напряженностью поля*. Где локализована энергия и что является ее носителем — заряды или поле? Электростатика изучает постоянные во времени поля неподвижных зарядов, т. е. в ней поля и обусловившие их заряды неотделимы друг от друга, поэтому ответить на поставленные вопросы не может. Переменные во времени электрические и магнитные поля могут существовать обособленно, независимо от возбуждавших их зарядов, и распространяются в пространстве в виде электромагнитных волн, *способных* переносить энергию. Это подтверждает основное положение *теории близкодействия* о том, что энергия локализована в поле и что носителем энергии является поле.

## 3.2. Постоянный электрический ток

### 3.2.1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

#### 3.53 Электрический ток

и условия для его возникновения и существования

#### Электрический ток

Любое упорядоченное (направленное) движение электрических зарядов. За направление тока *условно* принимают направление движения *положительных зарядов*.

#### Ток проводимости

Упорядоченное движение в веществе или вакууме свободных заряженных частиц — носителей тока.

**Примеры:** токи в металлах, электролитах, пучки электронов в вакууме и т. д.

#### Конвекционный ток

Упорядоченное движение электрических зарядов, осуществляемое перемещением в пространстве заряженного макроскопического тела.

## Условия для возникновения и существования электрического тока

Необходимо, с одной стороны, наличие свободных *носителей тока* — заряженных частиц, способных перемещаться упорядоченно, а с другой — наличие *электрического поля*, энергия которого, каким-то образом восполняясь, расходовалась бы на их упорядоченное движение.

### Постоянный ток

Ток, сила тока и направление которого не изменяются со временем.

## 3.54 Сила тока, плотность тока

### Сила тока

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Скалярная физическая величина, определяемая электрическим зарядом, проходящим через поперечное сечение проводника в единицу времени.

### Единица силы тока

$$1 \text{ A}$$

основная  
единица

1 А (ампер) — сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, создает между этими проводниками силу, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на каждый метр длины.

### Плотность тока

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}$$

Физическая величина, определяемая силой тока, проходящего через единицу площади поперечного сечения проводника, перпендикулярного направлению тока.

### Единица плотности тока

$$1 \text{ A/m}^2$$

1 А/м<sup>2</sup> (ампер на квадратный метр) — плотность электрического тока, при которой сила тока, равномерно распределенного по поперечному сечению проводника площадью 1 м<sup>2</sup>, равна 1 А.

### Связь плотности тока

#### со скоростью упорядоченного движения зарядов в проводнике

$$\vec{j} = ne \langle \vec{v} \rangle$$

Если концентрация носителей тока  $n$ , элементарный заряд носителя  $e$ , то за время  $dt$  через поперечное сечение  $S$  проводника переносится заряд  $dQ = ne \langle v \rangle S dt$ . Сила тока  $I = \frac{dQ}{dt} = ne \langle v \rangle S$ , плотность тока  $j = ne \langle v \rangle$ .

Плотность тока — *вектор*, его направление совпадает с направлением скорости  $\langle \vec{v} \rangle$  упорядоченного движения носителей тока.

### Сила тока — поток вектора $\vec{j}$

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Интегрирование производится по произвольной поверхности  $S$ .

[ $d\vec{S} = \vec{n} dS$  ( $\vec{n}$  — единичный вектор нормали к площадке  $dS$ , составляющей с вектором  $\vec{j}$  угол  $\alpha$ )]

## 3.2.2. СТОРОННИЕ СИЛЫ.

### ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА (ЭДС) И НАПРЯЖЕНИЕ

## 3.55 Сторонние силы

### Источник ЭДС (источник напряжения)

Устройства, способные создавать и поддерживать в цепи разность потенциалов за счет работы сил *неэлектростатического происхождения*.

Если в цепи на носители тока действуют только силы электростатического поля, то происходит перемещение носителей (они предполагаются по-

ложительными) от точек с бóльшим потенциалом к точкам с меньшим потенциалом. Это приведет к выравниванию потенциалов во всех точках цепи и к исчезновению электростатического поля. Поэтому для существования постоянного тока необходимо наличие в цепи источника ЭДС.

### Сторонние силы

*Силы неэлектростатического происхождения, действующие на заряды со стороны источников ЭДС.*

### Природа сторонних сил

*Может быть различной.* Например, в гальванических элементах они возникают за счет энергии химических реакций между электродами и электролитами; в генераторе — за счет механической энергии вращения ротора генератора и т. п. Роль источника ЭДС в электрической цепи, образно говоря, такая же, как роль насоса, который необходим для перекачивания жидкости в гидравлической системе.

◆ Под действием создаваемого поля сторонних сил электрические заряды движутся *внутри источника ЭДС против сил электростатического поля*, благодаря чему на концах цепи поддерживается разность потенциалов и в цепи течет постоянный электрический ток.

## 3.56 Электродвижущая сила (ЭДС)

### ЭДС, действующая в цепи

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{ст}}}{Q_0}$$

Физическая величина, определяемая работой, совершаемой сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда.

### ЭДС как циркуляция вектора напряженности сторонних сил

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}$$

Работа сторонних сил  $\vec{F}_{\text{ст}}$  по перемещению заряда  $Q_0$  на замкнутом участке цепи  $A = \oint \vec{F}_{\text{ст}} d\vec{l} = Q_0 \oint \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}$  ( $\vec{E}_{\text{ст}}$  — напряженность поля сторонних сил). Тогда  $\mathcal{E} = \oint \vec{E} d\vec{l}$ .

### ЭДС на участке 1—2

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}$$

Интеграл берется по длине участка цепи 1—2 (между сечениями цепи 1 и 2).

## 3.57 Напряжение

### Результирующая сила, действующая на заряд $Q_0$

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{ст}} + \vec{F}_e = Q_0(\vec{E}_{\text{ст}} + \vec{E})$$

[ $\vec{F}_{\text{ст}}$  — сторонние силы;  $\vec{F}_e$  — силы электростатического поля;  $\vec{E}_{\text{ст}}$  — напряженность поля сторонних сил;  $\vec{E}$  — напряженность электростатического поля]

### Работа результирующей силы на участке 1—2

$$A_{12} = Q_0 \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l} + Q_0 \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$$

Интеграл берется вдоль участка цепи 1—2.

Учли, что  $\int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l} = \mathcal{E}_{12}$  **3.56** и

или

$$A_{12} = Q_0 \mathcal{E}_{12} + Q_0(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$\int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2$  **3.21**.

## Напряжение на участке 1—2

$$U_{12} = \frac{A_{12}}{Q_0}$$

Физическая величина, определяемая работой, совершаемой суммарным полем электростатических (кулоновских) и сторонних сил при перемещении единичного положительного заряда на данном участке цепи.

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}$$

Напряжение на участке 1—2, содержащем источник ЭДС, равно сумме ЭДС источника и разности потенциалов на этом участке.

Напряжение — обобщенное понятие разности потенциалов: напряжение на концах участка цепи равно разности потенциалов, если участок не содержит источника тока.

## 3.2.3. СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРОВОДНИКОВ. ЗАКОН ОМА

### 3.58 Сопротивление и удельное сопротивление проводников

#### Сопротивление проводника ( $R$ )

Величина, характеризующая сопротивление проводника электрическому току.

#### Единица сопротивления

1 Ом

1 Ом (Ом) — сопротивление такого проводника, в котором при напряжении 1 В течет постоянный ток 1 А.

#### Сопротивление однородного линейного проводника

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

Сопротивление зависит от размеров, формы и материала проводника.

[ $\rho$  — удельное электрическое сопротивление;  $l$  — длина проводника;  $S$  — площадь его поперечного сечения]

#### Удельное электрическое сопротивление проводника

Физическая величина, определяемая электрическим сопротивлением однородного линейного проводника единичной длины и единичной площади поперечного сечения.

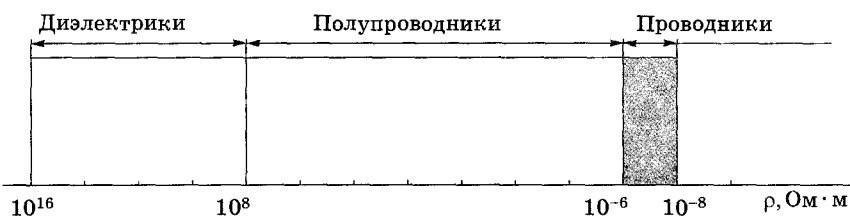
Служит характеристикой вещества, из которого изготовлен проводник.

#### Единица удельного сопротивления

1 Ом · м

1 Ом · м (ом-метр) — удельное электрическое сопротивление проводника площадью поперечного сечения 1 м<sup>2</sup> и длиной 1 м, имеющего сопротивление 1 Ом.

### 3.59 Область изменений $\rho$ для различных материалов



### 3.60 Удельное сопротивление некоторых проводников

Материал	$\rho$ , нОм · м	Материал	$\rho$ , нОм · м	Материал	$\rho$ , нОм · м
медь	17	вольфрам	55	железо	98
алюминий	26	никель	70	нихром	100



### 3.61 Проводимость и удельная проводимость проводников

#### Электрическая проводимость

$$G = \frac{1}{R}$$

Физическая величина, характеризующая способность участка электрической цепи проводить ток.

#### Единица проводимости

$$1 \text{ См}$$

1 См (сименс) — проводимость участка электрической цепи сопротивлением 1 Ом.

#### Удельная электрическая проводимость

$$\gamma = \frac{1}{\rho}$$

Физическая величина, определяемая проводимостью однородного линейного проводника единичной длины и единичной площади поперечного сечения.

#### Единица удельной проводимости

$$1 \text{ См/м}$$

1 См/м (сименс на метр) — удельная электрическая проводимость проводника, который при площади поперечного сечения  $1 \text{ м}^2$  и длине 1 м имеет электрическую проводимость 1 См.

### 3.62 Зависимость сопротивления от температуры. Сверхпроводимость

#### Зависимости $\rho(t)$ и $R(t)$

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$$

$[\rho$  и  $\rho_0$ ,  $R$  и  $R_0$  — соответственно удельные сопротивления и сопротивления проводника при  $t$  и  $0^\circ\text{C}$ ;  $\alpha$  — температурный коэффициент сопротивления]

$$R = R_0(1 + \alpha t)$$

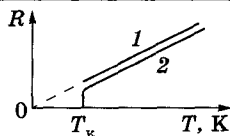
для чистых металлов (при не очень низких температурах)  $\alpha = \frac{1}{273} \text{ K}^{-1}$

#### Зависимость $R(t)$

$$R = R_0\alpha T$$

Качественный ход температурной зависимости сопротивления металла представлен на рисунке (кривая 1).

[ $T$  — термодинамическая температура]



#### Сверхпроводимость

Свойство некоторых проводников, заключающееся в том, что их электрическое сопротивление скачком падает до нуля (кривая 2 на рисунке) при охлаждении ниже определенной **критической температуры**  $T_k$ , характерной для данного проводника. Материал становится абсолютным проводником. Сверхпроводимость наблюдается при очень низких температурах. Например, для Al —  $T_k = 1,19 \text{ K}$ ; Hg —  $4,15 \text{ K}$ ; Nb —  $9,2 \text{ K}$ ; V —  $5,3 \text{ K}$ ;  $\text{V}_3\text{Si}$  —  $17 \text{ K}$ . В последнее время синтезированы материалы, в которых сверхпроводимость наблюдается при более высоких температурах (например,  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10}$  —  $110 \text{ K}$ ;  $\text{Te}_2\text{Ca}_2\text{Ba}_2\text{Cu}_3\text{O}_x$  —  $125 \text{ K}$ ).

### 3.63 Закон Ома для однородного участка цепи

#### Однородный участок цепи

Участок цепи, не содержащий источника ЭДС.

#### Закон Ома для однородного участка цепи

$$I = \frac{U}{R}$$

Сила тока в проводнике прямо пропорциональна приложенному напряжению и обратно пропорциональна сопротивлению проводника.

#### Закон Ома в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

Подставив  $R = \rho \frac{l}{S}$  в закон Ома, получим  $\frac{I}{S} = \frac{U}{\rho l}$ ,  $\frac{U}{l} = E$ ,  $\frac{I}{S} = j$ ,  $\frac{1}{\rho} = \gamma$ . Тогда  $j = \gamma E$  или в векторном виде  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ .

[ $E$  — напряженность электрического поля в проводнике;  $j$  — плотность тока;  $\gamma$  — удельная проводимость]

### Закон Ома для замкнутой цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$

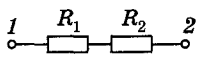
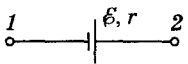
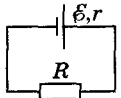
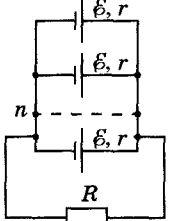
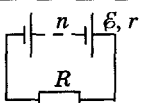
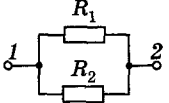
Сила тока в замкнутой цепи равна отношению ЭДС источника к суммарному сопротивлению всей цепи.

[ $R$  — сопротивление внешней цепи;  $r$  — внутреннее сопротивление источника ЭДС]

### 3.64 Последовательное и параллельное сопротивление проводников

Соединение	последовательное	параллельное
Сохраняющаяся величина	$I_1 = I_2 = \dots = I_n = I$ $I = \text{const}$	$U_1 = U_2 = \dots = U_n = U$ $U = \text{const}$
Суммируемая величина	напряжение $U = \sum_{i=1}^n U_i$	сила тока $I = \sum_{i=1}^n I_i$
Результирующее сопротивление	$R = \sum_{i=1}^n R_i$	$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$

### 3.65 Закон Ома для некоторых соединений элементов электрической цепи

Схема	Закон Ома	Схема	Закон Ома
	$I = \frac{U_{12}}{R_1 + R_2}$		$I = \frac{\mathcal{E} - U_{12}}{r}$
	$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$		$I = \frac{\mathcal{E}}{R + \frac{r}{n}}$
	$I = \frac{n\mathcal{E}}{R + nr}$		
	$I = \frac{U_{12}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$		

### 3.2.4. РАБОТА И МОЩНОСТЬ ТОКА. ЗАКОН ДЖОУЛЯ—ЛЕНЦА

#### 3.66 Работа и мощность тока

##### Работа тока

$$dA = UI dt$$

К участку цепи постоянного тока приложено напряжение  $U$ . За время  $dt$  через сечение проводника переносится заряд  $dQ = I dt$ . Силы электростатического поля и сторонние силы совершают работу  $dA = U dQ = UI dt$ .

##### Мощность, развиваемая током на участке цепи

$$P = UI = (\varphi_1 - \varphi_2)I + \mathcal{E}_{12}I$$

$$P = \frac{dA}{dt} = UI = (\varphi_1 - \varphi_2)I + \mathcal{E}_{12}I$$

(напряжение  $U = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}$ , 3.57).

##### Мощность, выделяемая во внешней цепи

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

Единица мощности — 1 ватт (Вт).  
[ $R$  — сопротивление проводника]

### 3.67 Закон Джоуля—Ленца и его дифференциальная форма

#### Закон Джоуля—Ленца

$$dQ = IU dt = I^2 R dt = \frac{U^2}{R} dt$$

Если ток проходит по *неподвижному* металлическому проводнику, то вся работа тока идет на его нагревание и по закону сохранения энергии  $dQ = dA$ . Используя выражение для работы тока **3.66**, получаем

$$dQ = IU dt = I^2 R dt = \frac{U^2}{R} dt.$$

#### Удельная тепловая мощность тока

$$w = \frac{dQ}{dV dt}$$

Количество теплоты, выделяющееся за единицу времени в единице объема проводника.

#### Закон Джоуля—Ленца в дифференциальной форме

$$w = jE = \gamma E^2$$

Выделим в проводнике элементарный цилиндрический объем  $dV = dS dt$  (ось цилиндра совпадает с направлением тока), сопротивление которого  $R = \rho \frac{dl}{dS}$ . По закону Джоуля—Ленца за время  $dt$  в этом объеме вы-

делится теплота  $dQ = I^2 R dt = \frac{\rho dl}{dS} (j dS)^2 dt = \rho j^2 dV dt$ . Учитывая, что  $w = \frac{dQ}{dV dt}$ ,  $j = \gamma E$  **3.63** и  $\gamma = \frac{1}{\rho}$  **3.61**, получаем  $w = jE = \gamma E^2$ .

### 3.2.5. ЗАКОН ОМА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УЧАСТКА ЦЕПИ (ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ОМА)

#### 3.68 Закон Ома для неоднородного участка цепи

##### Неоднородный участок цепи

Участок цепи, содержащий источник ЭДС.

##### Закон Ома для неоднородного участка цепи

$$IR = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}$$

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R}$$

Если ток проходит по *неподвижным* проводникам, образующим участок 1—2, то *работа  $A_{12}$  всех сил* (сторонних и электростатических), совершаемая над носителями тока, *по закону сохранения и превращения энергии равна теплоте*, выделяющейся на участке

$$A_{12} = Q, \quad A_{12} = Q_0 \mathcal{E}_{12} + Q_0 (\varphi_1 - \varphi_2), \quad Q = I^2 R t = IR(I t) = IR Q_0.$$

Тогда  $IR = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}$ .

[ $Q$  — теплота, выделяемая в проводнике сопротивлением  $R$ , за время  $t$ ;  $Q_0$  — перемещаемый заряд;  $\mathcal{E}_{12}$  — действующая на участке 1—2 ЭДС;  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  — разность потенциалов, приложенная на концах участка;  $\mathcal{E}_{12}$ , как и сила тока, — *величина скалярная*;  $\mathcal{E}_{12} > 0$ , если ЭДС способствует движению положительных зарядов,  $\mathcal{E}_{12} < 0$  — если ЭДС препятствует их движению]

#### Обобщенный закон Ома в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{ст})$$

На неоднородном участке цепи под действием электростатического поля  $\vec{E}$  и поля сторонних сил  $\vec{E}_{ст}$  возникает плотность тока  $\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{ст})$ . Эта формула — обобщение формулы  $j = \gamma E$  **3.63** для неоднородного участка цепи.

### 3.69 Анализ обобщенного закона Ома 3.68

Источник ЭДС в цепи отсутствует:  $\mathcal{E}_{12} = 0$

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R}$$

Закон Ома для однородного участка цепи 3.63.

Цепь замкнута:  $\varphi_1 = \varphi_2$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Закон Ома для замкнутой цепи 3.63

[ $R$  — сопротивление всей цепи]

Цепь разомкнута:  $I = 0$

$$\mathcal{E}_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$$

ЭДС в разомкнутой цепи равна разности потенциалов на ее концах.

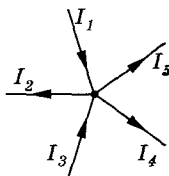
## 3.2.6. ПРАВИЛА КИРХГОФА ДЛЯ РАЗВЕТВЛЕННЫХ ЦЕПЕЙ

### 3.70 Два правила Кирхгофа

Узел электрической цепи

Любая точка разветвления цепи, в которой сходятся не менее трех проводников с током.

Ток, входящий в узел, считается положительным (токи  $I_1, I_3$ ), а ток, выходящий из узла, — отрицательным (токи  $I_2, I_4, I_5$ ).



Первое правило Кирхгофа

$$\sum_k I_k = 0$$

Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю.

Применение правила для рисунка:  $I_1 - I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0$ . Это правило — следствие закона сохранения электрического заряда 3.2: так как в случае постоянного тока ни в одной точке проводника и ни на одном его участке не должны накапливаться электрические заряды. Иначе токи не могли бы оставаться постоянными.

Второе правило Кирхгофа

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k \mathcal{E}_k$$

В любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма произведений сил токов  $I_i$  на сопротивление  $R_i$  соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме ЭДС  $\mathcal{E}_k$ , встречающихся в этом контуре.

Это правило можно получить, применяя обобщенный закон Ома к участкам разветвленной цепи.

### 3.71 Рекомендуемый порядок расчета цепей с применением правил Кирхгофа

Порядок расчета разветвленной цепи постоянного тока

◆ Выбрать произвольное направление токов на всех участках цепи; действительное направление токов определяется при решении задачи: если истинный ток получится положительным, то его направление было выбрано правильно, отрицательным — его истинное направление противоположно выбранному.

◆ Выбрать направление обхода контура и строго его придерживаться; произведение  $IR$  положительно, если ток на данном участке совпадает с направлением обхода, и наоборот; ЭДС, действующие по выбранному направлению обхода, считаются положительными, против — отрицательными.

◆ Составить столько уравнений, чтобы их число было равно числу искомых величин (в систему уравнений должны входить все сопротивления и ЭДС рассматриваемой цепи); каждый рассматриваемый контур должен содержать хотя бы один элемент, не содержащийся в предыдущих контурах, иначе получатся уравнения, являющиеся простой комбинацией уже составленных.

### 3.72 Примеры применения правил Кирхгофа

#### Измерительный мост Уитстона

Резисторы с сопротивлениями  $R_1, R_2, R_3$  и  $R_4$  образуют его «плечи». Между точками  $A$  и  $B$  моста включена батарея с ЭДС  $\mathcal{E}$  и сопротивлением  $r$ , между точками  $C$  и  $D$  включен гальванометр с сопротивлением  $R_G$ . Для узлов  $A, B$  и  $C$ , применяя первое правило Кирхгофа,

$$I_r - I_1 - I_4 = 0, \quad I_2 + I_3 - I_r = 0, \quad I_1 - I_2 - I_G = 0.$$

Для контуров  $ACBA, ACDA$  и  $CBDC$ , согласно второму правилу Кирхгофа,

$$I_r r + I_1 R_1 + I_2 R_2 = \mathcal{E}, \quad I_1 R_1 + I_G R_G - I_4 R_4 = 0,$$

$$I_2 R_2 - I_3 R_3 - I_G R_G = 0.$$

Изменяя известные сопротивления  $R_2, R_3$  и  $R_4$ , можно добиться, чтобы ток через гальванометр был равен нулю ( $I_G = 0$ ). Тогда из записанных уравнений имеем

$$I_1 = I_2, \quad I_3 = I_4, \quad I_1 R_1 = I_4 R_4, \quad I_2 R_2 = I_3 R_3.$$

$$\text{Отсюда } \frac{R_1}{R_4} = \frac{R_2}{R_3}, \text{ или } R_1 = \frac{R_2 R_4}{R_3}. \quad (1)$$

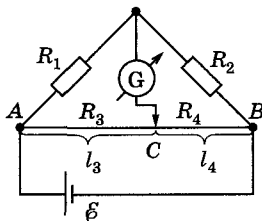
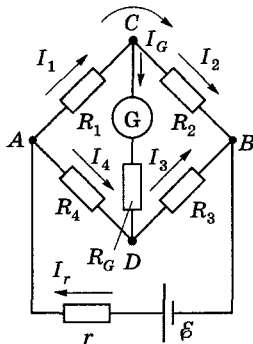
В случае равновесного моста ( $I_G = 0$ ) при определении искомого сопротивления  $R_1$  ЭДС батареи, сопротивления батареи и гальванометра роли не играют.

#### Реохордный мост Уитстона

Разновидность измерительного моста Уитстона, где два резистора с сопротивлениями  $R_3$  и  $R_4$  заменены длинной однородной проволокой (реохорд) с большим удельным сопротивлением, так что отношение  $\frac{R_3}{R_4}$  можно заменить отношением  $\frac{l_3}{l_4}$ .

$$\text{Тогда, используя (1), получаем } R_1 = R_2 \frac{l_4}{l_3}.$$

Длины  $l_3$  и  $l_4$  легко измеряются по шкале,  $R_2$  всегда известно. Поэтому полученное уравнение позволяет определить неизвестное сопротивление  $R_1$ .



### 3.3. Электрические токи в металлах, вакууме и газах

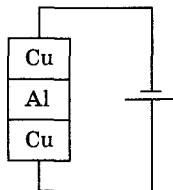
#### 3.3.1. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МЕТАЛЛОВ

##### 3.73 Природа носителей тока в металлах

Носители тока в металлах — свободные электроны (электроны, слабо связанные с ионами кристаллической решетки металла). Это представление основывается на электронной теории проводимости металлов (разработана Друдом и Лоренцем), а также на ряде классических опытов, подтверждающих ее положения.

##### Опыт Рикке

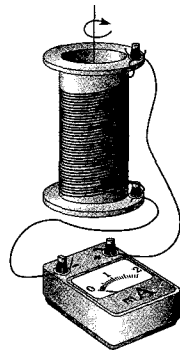
В течение года электрический ток пропускался через три последовательно соединенных с тщательно отшлифованными торцами металлических цилиндра (Cu, Al, Cu) одинакового радиуса. Никаких, даже микроскопических, следов переноса вещества не обнаружилось: следовательно, ионы в металлах не участвуют в переносе электричества, а перенос заряда в металлах осуществляется частицами, которые являются общими для всех металлов. Такими частицами могли быть открытые Д. Томсоном (1897 г.) электроны.



##### Опыты Стюарта и Толмена (идея Мандельштама и Папалекси)

Катушка с большим числом витков, замкнутая на чувствительный гальванометр, приводилась в быстрое вращение вокруг своей оси, а затем резко тормозилась.

Если в металле имеются подвижные, слабо связанные с решеткой носители тока, то при резком торможении проводника эти частицы должны по инерции смещаться вперед, как смещаются вперед пассажиры, стоящие в вагоне при его торможении. Результатом смещения зарядов должен быть импульс тока, что и наблюдалось; по направлению тока можно определить знак носителей тока, а зная размеры и сопротивление проводника, можно вычислить удельный заряд носителей. Оказалось, что значения удельного заряда и массы носителей тока и электронов, движущихся в вакууме, совпадали. Таким образом, было окончательно доказано, что носителями электрического тока в металлах являются свободные электроны.



##### 3.74 Средние скорости теплового и упорядоченного движения электронов

##### Свободные электроны в металлах

Существование свободных электронов в металлах можно объяснить следующим образом: при образовании кристаллической решетки металла (в результате сближения изолированных атомов) валентные электроны, сравнительно слабо связанные с атомными ядрами, отрываются от атомов металла, становятся «свободными» и могут перемещаться по всему объему. Таким образом, в узлах кристаллической решетки располагаются ионы металла, а между ними хаотически движутся свободные элект-

роны, образуя своеобразный *электронный газ*, обладающий, согласно электронной теории металлов, *свойствами идеального газа*.

### Сопоставление средних скоростей теплового ( $\langle u \rangle$ ) и упорядоченного ( $\langle v \rangle$ ) движения электронов

Электроны проводимости при своем движении сталкиваются с ионами решетки, в результате чего устанавливается термодинамическое равновесие между электронным газом и решеткой. По теории Друде—Лоренца электроны обладают такой же энергией теплового движения, как и молекулы одноатомного газа. Средняя скорость *теплового движения* электронов  $\langle u \rangle = \sqrt{8kT/(\pi m_e)} = 1,1 \cdot 10^5$  м/с (при  $T = 300$  К). Тепловое движение электронов, являясь хаотическим, не может привести к возникновению тока.

При наложении внешнего электрического поля на металлический проводник кроме теплового движения электронов возникает их упорядоченное движение, т. е. возникает электрический ток. Среднюю скорость  $\langle v \rangle$  упорядоченного движения электронов можно оценить по формуле  $j = ne \langle v \rangle$  (при  $j = 10^7$  А/м<sup>2</sup> (допустимая плотность тока для медных проводников)),  $n = 8 \cdot 10^{28}$  м<sup>-3</sup>,  $\langle v \rangle = 7,8 \cdot 10^{-4}$  м/с. Следовательно,  $\langle v \rangle \ll \langle u \rangle$ , т. е. даже при очень больших плотностях тока средняя скорость упорядоченного движения электронов, обуславливающего электрический ток, значительно меньше скорости их теплового движения. Поэтому при вычислениях результирующую скорость ( $\langle v \rangle + \langle u \rangle$ ) можно заменять скоростью теплового движения  $\langle u \rangle$ .

## 3.3.2. НЕКОТОРЫЕ ЗАКОНЫ ПО КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ И ЕЕ ТРУДНОСТИ

### 3.75 Законы Ома и Джоуля—Ленца

Дифференциальная форма закона Ома из классической теории электропроводности металлов

Со стороны электрического поля ( $E = \text{const}$ ) в проводнике заряд  $e$  испытывает действие силы  $F = eE$  и приобретает ускорение  $a = \frac{eE}{m}$ . Скорость электрона к концу свободного пробега  $v_{\text{max}} = \frac{eE \langle t \rangle}{m}$  ( $\langle t \rangle$  — среднее время между двумя последовательными соударениями электрона с ионами решетки).

Средняя скорость направленного движения электрона  $\langle v \rangle = \frac{eE \langle t \rangle}{2m}$  (по теории Друде в конце свободного пробега скорость электрона равна нулю, так как электрон отдает всю энергию ионам решетки). Среднее время свободного пробега  $\langle t \rangle = \frac{\langle l \rangle}{\langle v \rangle}$  (учли, что  $\langle v \rangle \ll \langle u \rangle$  3.74).  $\langle v \rangle = \frac{eE \langle l \rangle}{2m \langle u \rangle}$ .

Плотность тока в металлическом проводнике  $j = ne \langle v \rangle = \frac{ne^2 \langle l \rangle}{2m \langle u \rangle} E = \gamma E$ , получен закон Ома в дифференциальной форме 3.63, где  $\gamma = \frac{ne^2 \langle l \rangle}{2m \langle u \rangle}$ .



## Дифференциальная форма закона Джоуля—Ленца из классической теории электропроводности металлов

Дополнительная энергия, приобретаемая электроном к концу свободного пробега

$$\langle E_k \rangle = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{e^2 \langle l \rangle^2}{2m \langle u \rangle^2} E^2,$$

идет на нагревание металла. Число столкновений электрона за 1 с с узлами решетки  $\langle z \rangle = \frac{\langle l \rangle}{\langle u \rangle}$ . Если  $n$  — концентрация электронов, то энергия, передаваемая решетке в единице объема в единицу времени,

$$w = n \langle z \rangle \langle E_k \rangle = \frac{ne^2 \langle l \rangle}{2m \langle u \rangle} E^2.$$

Коэффициент пропорциональности равен  $\gamma$  (см. выше), а сама формула — закон Джоуля—Ленца в дифференциальной форме **3.67**.

### 3.76 Закон Видемана—Франца. Трудности классической теории

#### Носители тока и теплоты

Металлы обладают как большой электропроводностью, так и высокой теплопроводностью. Это объясняется тем, что носителями тока и теплоты в металлах являются одни и те же частицы — свободные электроны, которые, перемещаясь в металле, переносят не только электрический заряд, но и присущую им энергию хаотического (теплого) движения, т. е. осуществляют перенос теплоты.

#### Закон Видемана—Франца

$$\frac{\lambda}{\gamma} = \beta T$$

Отношение теплопроводности к удельной проводимости для всех металлов при одной и той же температуре одинаково и увеличивается пропорционально температуре ( $\beta = 3 \left(\frac{k}{e}\right)^2$ ).

[ $\lambda$  — коэффициент теплопроводности **2.34**;  $\gamma$  — удельная проводимость;  $e$  — заряд электрона;  $k$  — постоянная Больцмана]

#### Недостатки классической теории электропроводности металлов

◆ Температурная зависимость сопротивления.  $\langle u \rangle \sim \sqrt{T}$ ,  $R \sim \frac{1}{\gamma}$ , следовательно,  $R \sim \sqrt{T}$ , что противоречит опыту ( $R \sim T$ ).

◆ Оценка средней длины свободного пробега электронов в металлах.

Чтобы по формуле  $\gamma = \frac{ne^2 \langle l \rangle}{2m \langle u \rangle}$  **3.75** получить  $\gamma$ , совпадающие с опытными значениями, надо принимать  $\langle l \rangle$  значительно больше истинных, иными словами, предполагать, что электрон проходит без соударений с ионами решетки сотни междоузельных расстояний, что не согласуется с теорией Друде—Лоренца.

3. Теплоемкость металлов. Теплоемкость металла складывается из теплоемкости его кристаллической решетки и теплоемкости электронного газа. Поэтому атомная (т. е. рассчитанная на 1 моль) теплоемкость металла должна быть значительно большей, чем атомная теплоемкость диэлектриков, у которых нет свободных электронов. Согласно закону Дюлонга и Пти, теплоемкость одноатомного кристалла равна  $3R$ , тепло-

емкость одноатомного электронного газа равна  $\frac{3}{2}R$ . Тогда атомная теплоемкость металлов должна быть близка к  $4,5R$ . Однако опыт доказывает, что она равна  $3R$ , т. е. для металлов, так же как и для диэлектриков, хорошо выполняется закон Дюлонга и Пти. Следовательно, наличие электронов проводимости практически не сказывается на значении теплоемкости, что не объясняется классической электронной теорией.

### 3.3.3. РАБОТА ВЫХОДА ЭЛЕКТРОНОВ ИЗ МЕТАЛЛА. ЭМИССИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ

#### **3.77** Работа выхода электронов из металла

##### Работа выхода

Наименьшая энергия, которую нужно затратить для удаления электрона из металла в вакуум.

##### Возможные причины наличия работы выхода

◆ Если электрон по какой-то причине удаляется из металла, то в том месте, которое электрон покинул, возникает избыточный положительный заряд и электрон притягивается к индуцированному им самим положительному заряду.

◆ Отдельные электроны, покидая металл, удаляются от него на расстояния порядка атомных и создают тем самым над поверхностью металла «электронное облако», плотность которого быстро убывает с расстоянием. Это облако вместе с наружным слоем положительных ионов решетки образует *двойной электрический слой*, поле которого подобно полю плоского конденсатора. Толщина этого слоя равна нескольким межатомным расстояниям ( $10^{-10}$ — $10^{-9}$  м). Он не создает электрического поля во внешнем пространстве, но препятствует выходу свободных электронов из металла.

##### Единица работы выхода

1 эВ

1 эВ (электрон-вольт; *внесистемная единица*) равен работе, совершаемой силами поля при перемещении элементарного заряда (заряда, равного заряду электрона) при прохождении им разности потенциалов в 1 В:

$$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.}$$

Работа выхода зависит от химической природы металлов и от чистоты их поверхности и колеблется в пределах нескольких электрон-вольт (например, у калия  $A = 2,2$  эВ, у платины  $A = 6,3$  эВ). Подобрав определенным образом покрытие поверхности, можно значительно уменьшить работу выхода. Например, если нанести на поверхность вольфрама ( $A = 4,5$  эВ) слой оксида щелочно-земельного металла (Ca, Sr, Ba), то работа выхода снижается до 2 эВ.

#### **3.78** Эмиссионные явления

##### Электронная эмиссия

Испускание электронов веществом при сообщении ему в результате внешних воздействий энергии, достаточной для преодоления работы выхода.

### Термоэлектронная эмиссия

Испускание электронов нагретыми металлами.

Концентрация свободных электронов в металлах достаточно высока, поэтому даже при средних температурах вследствие распределения электронов по скоростям (по энергиям) некоторые электроны обладают энергией, достаточной для преодоления работы выхода. С повышением температуры число электронов, кинетическая энергия теплового движения которых больше работы выхода, растет и явление термоэлектронной эмиссии становится заметным.

### Фотоэлектронная эмиссия

Эмиссия электронов из металла под действием света, а также коротковолнового электромагнитного излучения (например, рентгеновского).

Основные закономерности этого явления будут разобраны при рассмотрении фотоэлектрического эффекта **5.108** **5.109**.

### Вторичная электронная эмиссия

Испускание электронов поверхностью металлов, полупроводников или диэлектриков при бомбардировке их пучком электронов.

Вторичный электронный поток состоит из электронов, отраженных поверхностью (упруго и неупруго отраженные электроны), и «истинно» вторичных электронов — электронов, выбитых из металла, полупроводника или диэлектрика первичными электронами.

### Коэффициент вторичной электронной эмиссии

$$\delta = \frac{n_2}{n_1}$$

Отношение числа вторичных электронов  $n_2$  к числу первичных  $n_1$ , вызвавших эмиссию.

Коэффициент  $\delta$  зависит от природы материала поверхности, энергии бомбардирующих частиц и их угла падения на поверхность. У полупроводников и диэлектриков  $\delta$  больше, чем у металлов. Это объясняется тем, что в металлах, где концентрация электронов проводимости велика, вторичные электроны, часто сталкиваясь с ними, теряют свою энергию и не могут выйти из металла. В полупроводниках и диэлектриках же из-за малой концентрации электронов проводимости столкновения вторичных электронов с ними происходят гораздо реже и вероятность выхода вторичных электронов из эмиттера возрастает в несколько раз.

### Автоэлектронная (холодная) эмиссия

Эмиссия электронов с поверхности металлов под действием сильного внешнего электрического поля.

Этот тип эмиссии можно наблюдать в откачанной трубке, конфигурация электродов которой (катод — острие, анод — внутренняя поверхность трубки) позволяет при напряжениях примерно  $10^3$  В получать электрические поля напряженностью примерно  $10^7$  В/м. При постепенном повышении напряжения уже при напряженности поля у поверхности катода примерно  $10^5 \div 10^6$  В/м возникает слабый ток, обусловленный электронами, испускаемыми катодом. Сила этого тока увеличивается с повышением напряжения на трубке. Токи возникают при холодном катоде, поэтому описанное явление называется также *холодной эмиссией*. Объяснение механизма этого явления возможно лишь на основе квантовой теории.

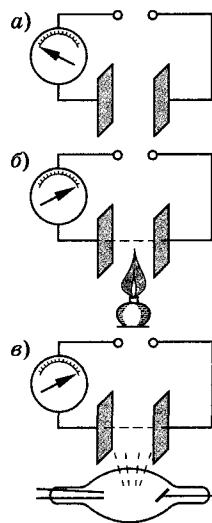
### 3.3.4. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ГАЗАХ

#### 3.79 Проводимость газов

##### Опытное подтверждение проводимости газов

Газы, поскольку состоят из нейтральных молекул, при не слишком высоких температурах и при давлениях, близких к атмосферному, являются хорошими изоляторами. Например, разорвав цепь источника ЭДС с помощью воздушного зазора (рисунок *а*), амперметр показывает отсутствие тока в цепи.

Газ становится проводником электричества, если некоторая часть его молекул *ионизируется*, т. е. произойдет расщепление нейтральных атомов и молекул на ионы и свободные электроны. Для этого газ надо подвергнуть действию *ионизатора*. Если, например, к воздушному промежутку поднести пламя газовой горелки (рисунок *б*) или облучать его рентгеновским излучением (рисунок *в*), то в обоих случаях амперметр регистрирует ток.



##### Ионизация газов

Расщепление нейтральных атомов и молекул газа на ионы и свободные электроны.

##### Возможные виды ионизаторов

Сильный нагрев (столкновения быстрых молекул становятся настолько сильными, что они расщепляются на ионы), короткое электромагнитное излучение (ультрафиолетовое, рентгеновское и  $\gamma$ -излучения), корпускулярное излучение (потоки электронов, протонов,  $\alpha$ -частиц) и т. д.

##### Энергия ионизации

Энергия, которую надо затратить, чтобы из молекулы (атома) выбить электрон (для различных веществ  $4 \div 25$  эВ).

##### Процесс рекомбинации

Процесс, *обратный* ионизации: положительные и отрицательные ионы, положительные ионы и электроны, встречаясь, воссоединяются между собой с образованием нейтральных атомов и молекул.

#### 3.80 Вольт-амперная характеристика газового разряда

##### Газовый разряд

Прохождение электрического тока через газы.

##### Параметры, определяющие характер газового разряда

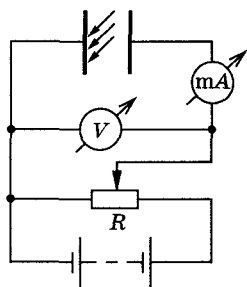
Химический состав газа, его температура и давление, размеры, конфигурация и материал электродов, приложенное напряжение, плотность газа.

##### Несамостоятельный газовый разряд

Разряд, существующий только под действием внешних ионизаторов.

## Схема типичной установки для изучения газового разряда

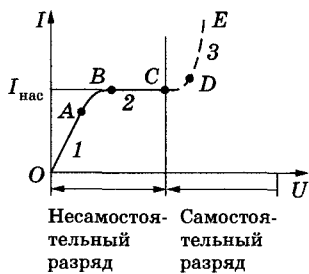
Цепь содержит газовый промежуток, подвергающийся непрерывному, постоянному по интенсивности воздействию ионизатора (например, рентгеновским излучением). В результате действия ионизатора газ приобретает некоторую электропроводность и в цепи течет ток.



## Вольт-амперная характеристика газового разряда

Зависимость тока в цепи, содержащей газовый промежуток от приложенного напряжения.

На участке  $OA$  выполняется закон Ома, затем сила тока растет, но медленно, а затем прекращается совсем (участок  $BC$ ). Участок  $BC$  соответствует **току насыщения** (ионы и электроны, создаваемые внешним ионизатором за единицу времени, за это же время достигают электродов). Ток  $I_{\text{нас}}$  определяется мощностью ионизатора. Ток насыщения, таким образом, является мерой ионизирующего действия ионизатора. Если в режиме  $OC$  прекратить действие ионизатора, то прекращается и разряд (в этой области разряд — несамостоятельный).



## 3.81 Самостоятельный газовый разряд

### Самостоятельный газовый разряд

Разряд в газе, сохраняющийся после прекращения действия внешнего ионизатора.

### Механизм возникновения самостоятельного газового разряда

При **больших напряжениях** между электродами газового промежутка ток сильно возрастает (участки  $CD$  и  $DE$ , см. рисунок 3.80). Возникающие под действием внешнего ионизатора электроны, сильно ускоренные электрическим полем, сталкиваясь с нейтральными молекулами газа, ионизируют их, в результате чего образуются вторичные электроны и положительные ионы. Последние движутся к катоду, а электроны — к аноду. Вторичные электроны вновь ионизируют молекулы газа, и, следовательно, общее количество электронов и ионов будет возрастать по мере продвижения электронов к аноду лавинообразно. Это является причиной увеличения электрического тока на участке  $CD$ . Описанный процесс называется **ударной ионизацией**.

Для поддержания самостоятельного разряда **только** ударной ионизации недостаточно. Возможны еще следующие процессы: ускоренные полем положительные ионы выбивают из катода электроны; выбивание электронов из катода под действием фотонов; фотон, поглощенный молекулой, ионизирует ее и так далее, т. е. происходит «воспроизводство» электронных лавин.

## 3.82 Типы самостоятельного разряда

### Глеющий разряд

Возникает при низких давлениях. Если к электродам, впаянным в стеклянную трубку длиной 30—50 см, приложить постоянное напряжение в

несколько сотен вольт, постепенно откачивая из трубки воздух, то при давлении  $\approx 5,3\text{--}6,7$  кПа возникает разряд в виде светящегося извилистого шнура красноватого цвета, идущего от катода к аноду. При дальнейшем понижении давления шнур утолщается, и при давлении  $\approx 13$  Па непосредственно к катоду прилегает тонкий светящийся слой — *первое катодное свечение*, затем следует темный слой — *катодное темное пространство*, переходящее в дальнейшем в светящийся слой — *тлеющее свечение*, имеющее резкую границу со стороны катода, постепенно исчезающую со стороны анода. Оно возникает из-за рекомбинации электронов с положительными ионами. С тлеющим свечением граничит темный промежуток — *фарадеево темное пространство*, за которым следует столб ионизированного светящегося газа — *положительный столб*.

◆ Свечение положительного столба имеет характерный для каждого газа цвет, поэтому его используют в газосветных трубках для светящихся надписей и реклам. В лампах дневного света (более экономичных, чем лампы накаливания) излучение тлеющего разряда, происходящее в парах ртути, поглощается нанесенным на внутреннюю поверхность трубки флуоресцирующим веществом (люминофором), начинающим под воздействием поглощенного излучения светиться. Спектр свечения при соответствующем подборе люминофоров близок к спектру солнечного излучения. Тлеющий разряд используется для катодного напыления металлов. Вещество катода в тлеющем разряде вследствие бомбардировки положительными ионами, сильно нагреваясь, переходит в парообразное состояние. Помещая вблизи катода различные предметы, их можно покрыть равномерным слоем металла.

## Искровой разряд

Возникает при больших напряженностях электрического поля ( $\approx 3 \cdot 10^6$  В/м) в газе, находящемся под давлением порядка атмосферного. Искра имеет вид ярко светящегося тонкого канала, сложным образом изогнутого и разветвленного.

Объяснение искрового разряда дается на основе *стримерной теории*, согласно которой возникновению ярко светящегося канала искры предшествует появление слабосветящихся скоплений ионизованного газа — *стримеров*. Стримеры возникают не только в результате образования электронных лавин посредством ударной ионизации, но и в результате фотонной ионизации газа. Из-за выделения большого количества энергии газ в искровом промежутке нагревается до очень высокой температуры (примерно  $10^4$  К), что приводит к его свечению. Быстрый нагрев газа ведет к повышению давления и возникновению ударных волн, объясняющих звуковые эффекты при искровом разряде — характерное потрескивание в слабых разрядах и мощные раскаты грома в случае молнии, являющейся примером мощного искрового разряда между грозовым облаком и Землей или между двумя грозовыми облаками.

Искровой разряд используется для воспламенения горючей смеси в двигателях внутреннего сгорания и предохранения электрических линий передачи от перенапряжений (искровые разрядники), для электроискровой точной обработки металлов (резание, сверление). Его используют в спектральном анализе для регистрации заряженных частиц (искровые счетчики).

## Дуговой разряд

Возникает: а) если после зажигания искрового разряда от мощного источника постепенно уменьшать расстояние между электродами; б) минуя стадию искры, если электроды (например, угольные) сблизить до соприкосновения, а потом развести. При атмосферном давлении тем-

пература катода приблизительно равна 3900 К. По мере горения дуги угольный катод заостряется, а на аноде образуется углубление — *кратер*, являющийся наиболее горячим местом дуги. По современным представлениям, дуговой разряд поддерживается за счет высокой температуры катода из-за интенсивной термоэлектронной эмиссии, а также термической ионизации молекул, обусловленной высокой температурой газа.

◆ Дуговой разряд находит широкое применение для сварки и резки металлов, получения высококачественных сталей (дуговая печь) и освещения (прожекторы, проекционная аппаратура). Дуга, возникающая в ртутном паре, является мощным источником ультрафиолетового излучения и используется в медицине (на пример, кварцевые лампы). Дуговой разряд при низких давлениях в парах ртути используется в ртутных выпрямителях для выпрямления переменного тока.

### Коронный разряд

Возникает при высоком давлении в резко неоднородном поле вблизи электродов с большой кривизной поверхности (например, острия). Когда напряженность поля вблизи острия достигает 30 кВ/см, то вокруг него возникает свечение, имеющее вид короны, чем и вызвано название этого вида разряда. В естественных условиях корона возникает под влиянием атмосферного электричества у вершин мачт (на этом основано действие молниеотводов), деревьев. Вредное действие короны вокруг проводов высоковольтных линий передач проявляется в возникновении вредных токов утечки. Для их снижения провода высоковольтных линий делают толстыми. Коронный разряд, являясь прерывистым, становится также источником радиопомех.

◆ Используется коронный разряд в электрофильтрах, применяемых для очистки промышленных газов от примесей. Газ, подвергаемый очистке, движется снизу вверх в вертикальном цилиндре, по оси которого расположена коронирующая проволока. Ионы, имеющиеся в большом количестве во внешней части короны, оседают на частицах примеси и увлекаются полем к внешнему некоронирующему электроду и на нем оседают. Коронный разряд применяется при нанесении порошковых и лакокрасочных покрытий.

## 3.83 Плазма и ее свойства

### Плазма

Сильно ионизованный газ, в котором концентрации положительных и отрицательных зарядов практически одинаковы.

### Высокотемпературная плазма

Плазма, возникающая при сверхвысоких температурах.

### Газоразрядная плазма

Плазма, возникающая при газовом разряде.

### Степень ионизации плазмы ( $\alpha$ )

Отношение числа ионизованных частиц к полному их числу в единице объема плазмы.

В зависимости от величины  $\alpha$  говорят о *слабо* ( $\alpha$  составляет доли процента), *умеренно* ( $\alpha$  — несколько процентов) и *полностью* ( $\alpha$  близко к 100%) ионизованной плазме.

### Газоразрядная плазма — неравновесная (неизотермическая)

Заряженные частицы (электроны, ионы) газоразрядной плазмы, находясь в ускоряющем электрическом поле, обладают различной средней кинетической энергией. Это означает, что температура  $T_e$  электронного



газа одна, а ионного  $T_{и}$  — другая, причем  $T_e > T_{и}$ . Несоответствие этих температур указывает на то, что газоразрядная плазма является *неравновесной*, поэтому она называется также *неизотермической*. Убыль числа заряженных частиц в процессе рекомбинации в газоразрядной плазме восполняется ударной ионизацией электронами, ускоренными электрическим полем. Прекращение действия электрического поля приводит к исчезновению газоразрядной плазмы.

### Высокотемпературная плазма — равновесная (изотермическая)

В данном случае при определенной температуре убыль числа заряженных частиц восполняется в результате термической ионизации. В такой плазме наблюдается равенство средних кинетических энергий составляющих плазму различных частиц. В состоянии подобной плазмы находятся звезды, звездные атмосферы, Солнце. Их температура достигает десятков миллионов градусов.

### Свойства плазмы

Высокая степень ионизации газа, в пределе — полная ионизация; равенство нулю результирующего пространственного заряда (концентрация положительных и отрицательных частиц в плазме практически одинакова); большая электропроводность, причем ток в плазме создается в основном электронами как наиболее подвижными частицами; свечение; сильное взаимодействие с электрическим и магнитным полями; колебания электронов в плазме с большой частотой ( $\approx 10^8$  Гц), вызывающие общее вибрационное состояние плазмы; «коллективное» — одновременное взаимодействие громадного числа частиц (в обычных газах частицы взаимодействуют друг с другом попарно). Эти свойства определяют качественное своеобразие плазмы, позволяющее считать ее *особым, четвертым, состоянием вещества*.

## 3.4. Магнитное поле

### 3.4.1. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

#### 3.84 Обнаружение магнитного поля

##### Магнитное поле

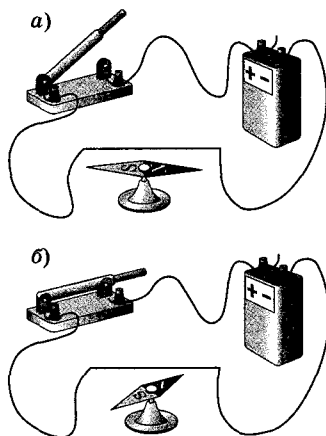
Силовое поле в пространстве, окружающем токи и постоянные магниты.

##### Как обнаруживается магнитное поле?

Наличие магнитного поля обнаруживается по силовому действию на внесенные в него проводники с током или постоянные магниты.

##### Классический опыт Эрстеда

Название «магнитное поле» связывают с ориентацией магнитной стрелки под действием поля, создаваемого током: Эрстед (1820 г.) обнаружил, что магнитная стрелка, расположенная параллельно проводнику (рисунок *а*), стремится расположиться перпендикулярно проводнику с током (рисунок *б*). При изменении направления тока в проводнике перпендикулярно к проводнику повернется противоположный конец магнитной стрелки.



**Характерная особенность магнитного поля**

Магнитное поле создается только движущимися зарядами и действует только на движущиеся в этом поле электрические заряды. Электрическое поле создается и действует как на неподвижные, так и на движущиеся заряды.

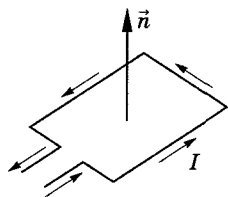
**Характер воздействия магнитного поля на ток**

Зависит от формы проводника, по которому течет ток, от расположения проводника и от направления тока. Чтобы охарактеризовать магнитное поле, надо рассмотреть его действие на *определенный* ток.

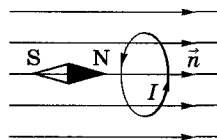
**Замкнутый плоский контур с током (рамка с током)**

Контур, размеры которого малы по сравнению с расстоянием до токов, образующих магнитное поле. Используется для исследования магнитного поля.

Ориентация контура в пространстве характеризуется направлением нормали к контуру. Направление нормали определяется **правилом правого винта**: за положительное направление нормали принимается направление поступательного движения винта, головка которого вращается в направлении тока, текущего в рамке.

**Выбор направления магнитного поля**

За направление магнитного поля в данной точке принимается направление, вдоль которого располагается положительная нормаль к свободно подвешенной рамке с током (см. рисунок), или направление, совпадающее с направлением силы, действующей на северный полюс магнитной стрелки, помещенный в данную точку. Так как оба полюса магнитной стрелки лежат в близких точках поля, то силы, действующие на оба полюса, равны друг другу. Следовательно, на магнитную стрелку действует пара сил, поворачивающая ее так, чтобы ось стрелки, соединяющая южный полюс с северным, совпала с направлением поля.

**3.86** Основные характеристики магнитного поля**Вращающий момент сил на рамку с током в магнитном поле**

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}]$$

Рамка с током испытывает ориентирующее действие поля, поэтому на нее в магнитном поле действует пара сил.  $\vec{M}$  зависит как от свойств поля в данной точке, так и от свойств рамки.

[ $\vec{p}_m$  — магнитный момент рамки с током;  $\vec{B}$  — вектор магнитной индукции;  $\alpha$  — угол между нормалью к плоскости контура и вектором  $\vec{B}$ ; модуль вектора вращающего момента  $M = p_m B \sin \alpha$ ]

**Магнитный момент рамки с током**

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}$$

Направление  $\vec{p}_m$  совпадает с направлением положительной нормали.

[ $S$  — площадь поверхности контура (рамки);  $\vec{n}$  — единичный вектор нормали к поверхности рамки; модуль вектора магнитного момента  $p_m = IS$ ]

## Магнитная индукция в данной точке однородного магнитного поля

$$B^* = \frac{M_{\max}}{P_m}$$

Если в данную точку магнитного поля помещать рамки с различными магнитными моментами, то на них действуют различные вращающие моменты, однако отношение  $\frac{M_{\max}}{P_m}$  ( $M_{\max}$  — максимальный вращающий момент) для всех контуров одно и то же и поэтому может служить характеристикой магнитного поля.

Магнитная индукция определяется максимальным вращающим моментом, действующим на рамку с магнитным моментом, равным единице, когда нормаль к рамке перпендикулярна направлению поля.

## 3.87 Линии магнитной индукции

### Линии магнитной индукции

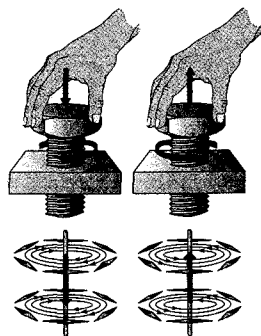
Линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора  $\vec{B}$ .

Линии магнитной индукции всегда замкнуты и охватывают проводники с током. Этим они отличаются от линий напряженности электростатического поля, которые являются разомкнутыми.

### Направление линий магнитной индукции

Их направление задается *правилом правого винта*: головка винта, закручиваемого по направлению тока, вращается в направлении линий магнитной индукции.

Вблизи прямолинейного проводника с током магнитные стрелки устанавливаются по касательной к окружности, очерченной вокруг проводника. Направление линий магнитной индукции указывается северным полюсом магнитной стрелки.



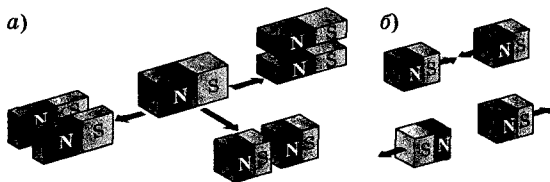
### Наблюдение магнитных полей

Линии магнитной индукции можно «проявить» с помощью железных опилок, намагничивающихся в исследуемом поле и ведущих себя подобно маленьким магнитным стрелкам. На рисунке для примера показаны линии магнитной индукции поля прямого тока.

## 3.88 Полосовые магниты и их линии магнитной индукции

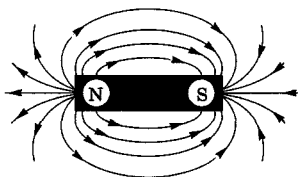
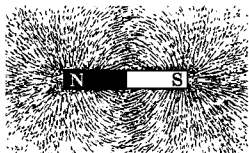
Разрезав магнит, мы получим два новых магнита, северный и южный, полюсы которых ориентированы так же, как в исходном магните.

Одноименные магнитные полюсы отталкиваются, разноименные — притягиваются.



\* Следует отметить, что вектор  $\vec{B}$  может быть определен из закона Ампера 3.93 и из выражения для силы Лоренца 3.98.

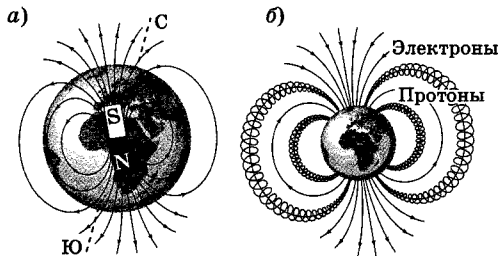
На рисунках изображены линии магнитной индукции полосового магнита; они выходят из северного полюса и входят в южный. Вначале казалось, что здесь наблюдается полная аналогия с линиями напряженности электростатического поля и полюсы магнитов играют роль магнитных «зарядов» (магнитных монополей). Опыты показали, что, разрезая магнит на части, его полюсы разделить нельзя, т. е. в отличие от электрических зарядов свободные магнитные «заряды» не существуют, поэтому линии магнитной индукции не могут обрываться на полюсах. В дальнейшем было установлено, что внутри полосовых магнитов имеется магнитное поле, аналогичное полю внутри соленоида, и линии магнитной индукции этого магнитного поля являются продолжением линий магнитной индукции вне магнита. Таким образом, линии магнитной индукции магнитного поля постоянных магнитов являются также замкнутыми.



### 3.89 Магнитное поле Земли

Магнитное поле Земли подобно полю магнита (рисунок *a*). Под действием этого поля заряженные частицы в радиационных поясах движутся по спиральям.

Поскольку северный полюс магнитной стрелки указывает на север, соответствующий магнитный полюс Земли оказывается южным магнитным полюсом (так как северный полюс одного магнита притягивается к южному полюсу другого [3.88](#)). Магнитные полюса Земли не совпадают с положением географических полюсов, находящихся на оси вращения Земли.



### 3.90 Поле макро- и микротоков

#### Гипотеза Ампера

В любом теле существуют микроскопические токи, обусловленные движением электронов в атомах и молекулах. Эти микроскопические молекулярные токи создают свое магнитное поле и могут поворачиваться в магнитных полях макротоков. Например, если вблизи какого-то тела поместить проводник с током (макроток), то под действием его магнитного поля микротоки во всех атомах определенным образом ориентируются, создавая в теле дополнительное магнитное поле.

#### Вектор магнитной индукции $\vec{B}$

Характеризует *результатирующее* магнитное поле, создаваемое всеми макро- и микротоками, т. е. при одном и том же токе и прочих равных условиях вектор  $\vec{B}$  в различных средах будет иметь разные значения.

#### Вектор напряженности $\vec{H}$

Описывает магнитное поле макротоков.

## Связь $\vec{B}$ и $\vec{H}$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

Эта связь справедлива для однородной изотропной среды.

[ $\mu_0$  — магнитная постоянная 3.95;  $\mu$  — безразмерная величина — *магнитная проницаемость среды*, показывающая, во сколько раз магнитное поле макроточек  $H$  усиливается за счет поля микроточек среды]

## 3.4.2. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ. ЗАКОН БИО—САВАРА—ЛАПЛАСА

### 3.91 Принцип суперпозиции

#### Принцип суперпозиции магнитных полей

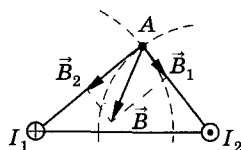
$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i$$

Магнитная индукция результирующего поля, создаваемого несколькими токами или движущимися зарядами, равна векторной сумме магнитных индукций полей, создаваемых каждым током или движущимся зарядом в отдельности.

**Пример применения принципа суперпозиции.** На рисунке в точке  $A$  определена индукция  $\vec{B}$  магнитного поля, создаваемого двумя проводниками с токами  $I_1$  (направлен перпендикулярно чертежу от нас) и  $I_2$  (направлен перпендикулярно чертежу к нам)

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

(их направления указаны на рисунке).



### 3.92 Закон Био—Савара—Лапласа и его применение к расчету полей

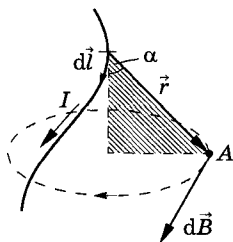
#### Закон Био—Савара—Лапласа

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu I [d\vec{l}, \vec{r}]}{4\pi r^3}$$

Определяет в точке  $A$  индукцию поля  $d\vec{B}$ , создаваемую элементом проводника  $d\vec{l}$  с током  $I$  на расстоянии  $r$  от него.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu I dl \sin \alpha}{4\pi r^2}$$

[ $d\vec{l}$  — вектор, по модулю равный длине  $dl$  элемента проводника и совпадающий по направлению с током;  $\vec{r}$  — радиус-вектор, проведенный из элемента  $d\vec{l}$  проводника в точку  $A$  поля;  $r$  — модуль радиуса-вектора  $\vec{r}$ ;  $\mu_0$  — магнитная постоянная 3.95;  $\mu$  — магнитная проницаемость среды]



#### Направление вектора $d\vec{B}$

Вектор  $d\vec{B}$  перпендикулярен  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$  и направлен по касательной к линии магнитной индукции. Направление  $d\vec{B}$  определяется по *правилу правого винта*: направление вращения головки винта дает направление  $d\vec{B}$ , если поступательное движение винта соответствует направлению тока в элементе.

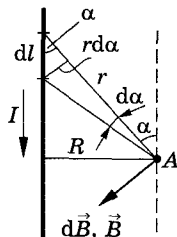
#### Применение закона: магнитное поле прямого тока

Ток течет по тонкому прямому проводу бесконечной длины. В качестве постоянной интегрирования выберем угол  $\alpha$ . Из рисунка имеем  $r = \frac{R}{\sin \alpha}$ ,  $dl = \frac{r d\alpha}{\sin \alpha}$ .

Подставив эти значения в формулу  $d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu I dl \sin \alpha}{4\pi r^2}$ ,

получим  $d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R} \sin \alpha d\alpha$ . Угол  $\alpha$  для всех элементов прямого провода изменяется от 0 до  $\pi$ . Получаем

$$B = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R^2} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 \mu 2I}{4\pi R}$$



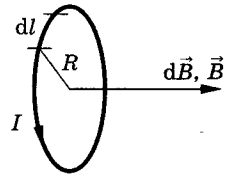
## Применение закона:

### магнитное поле в центре кругового проводника с током

Как следует из рисунка, сложение векторов  $d\vec{B}$  можно заменить сложением их модулей:

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{R^2} dl \quad (\text{учли, что } r = R, \sin \alpha = 1),$$

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{R^2} \int dl = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R^2} 2\pi R = \mu_0 \mu \frac{I}{2R}.$$



## 3.4.3. ЗАКОН АМПЕРА. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТОКОВ

### 3.93 Закон Ампера

Закон Ампера

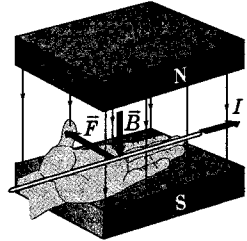
$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}]$$

Модуль силы Ампера

$$dF = IBdl \sin \alpha$$

Определяет силу  $d\vec{F}$ , с которой магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$  действует на элемент проводника с током  $I$ ,  $\alpha$  — угол между  $d\vec{l}$  и  $\vec{B}$ .

Направление силы Ампера определяется по *правилу левой руки*: если ладонь левой руки расположить так, чтобы в нее входил вектор  $\vec{B}$ , а четыре вытянутых пальца расположить по направлению тока в проводнике, то отогнутый большой палец покажет направление силы Ампера (см. рисунок).



### 3.94 Взаимодействие параллельных токов

Два параллельных проводника с токами  $I_1$  и  $I_2$  находятся на расстоянии  $R$  друг от друга (см. рисунок). Направление силы  $d\vec{F}_1$ , с которой магнитное поле  $\vec{B}_1$  (создается проводником с током  $I_1$ ) действует на участок  $dl$  второго тока, определяется по правилу левой руки (также определяется и направление силы  $d\vec{F}_2$ ).

$$B_1 = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1}{R} \quad \text{3.92.}$$

$d\vec{F}_1 = I_2 B_1 dl$  (поле  $\vec{B}_1$  действует на элемент  $dl$  второго тока, угол  $\alpha$  между  $d\vec{l}$  и  $\vec{B}_1$  прямой). Подставив в эту формулу  $B_1$ , получим

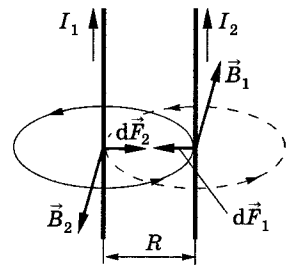
$$dF_1 = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl.$$

Рассуждая аналогично, имеем

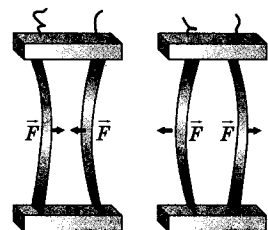
$$dF_2 = I_1 B_2 dl = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl;$$

$$dF_1 = dF_2 = dF = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl.$$

Проводники с токами одинакового направления притягиваются, с токами разного направления — отталкиваются.



Токи одинакового направления  
Токи разного направления



### 3.4.4. МАГНИТНАЯ ПОСТОЯННАЯ.

#### ЕДИНИЦЫ МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ $B$ И НАПРЯЖЕННОСТИ $H$

### 3.95 Магнитная постоянная

#### Сила взаимодействия на единицу длины проводника

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R}$$

Два параллельных проводника с током находятся в вакууме ( $\mu = 1$ ).

Сила взаимодействия между ними  $dF = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R}$  **3.94**.

[ $R$  — расстояние между параллельными проводниками с токами  $I_1$  и  $I_2$ ;  $\mu_0$  — магнитная постоянная]

#### Магнитная постоянная

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/м}^2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$$

Согласно определению ампера, при  $I_1 = I_2 = 1 \text{ А}$

и  $R = 1 \text{ м}$  имеем  $\frac{dF}{dl} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Н/м}$ .

Значение  $\mu_0$  получается при подстановке этих величин в формулу для силы взаимодействия на единицу длины проводника.

### 3.96 Единицы магнитной индукции и напряженности магнитного поля

#### Формула, определяющая единицу $B$

$$B = \frac{1 dF}{I dl}$$

Если элемент проводника  $dl$  с током  $I$  перпендикулярен  $\vec{B}$ , то закон Ампера **3.93** запишется в виде  $dF = IB dl$ .

#### Единица магнитной индукции

$$1 \text{ Тл} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}$$

1 Тл (тесла) — магнитная индукция такого однородного магнитного поля, которое действует с силой 1 Н на каждый метр длины прямолинейного проводника, расположенного перпендикулярно направлению индукции  $\vec{B}$  поля, если по этому проводнику течет ток 1 А.

#### Формула, определяющая единицу $H$

$$H = \frac{B}{\mu_0}$$

Получается из формулы  $B = \mu_0 \mu H$  **3.96** (для вакуума  $\mu = 1$ ).

#### Единица напряженности магнитного поля

$$1 \text{ А/м}$$

1 А/м (ампер на метр) — напряженность такого поля, магнитная индукция которого в вакууме равна  $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Тл}$ .

### 3.4.5. ДВИЖУЩИЕСЯ ЗАРЯДЫ И МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

### 3.97 Магнитное поле движущегося заряда

Магнитная  
индукция

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Q[\vec{v}\vec{r}]}{r^3}$$

Модуль  
магнитной индукции

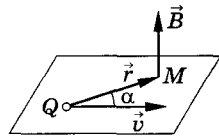
$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Qv}{r^2} \sin \alpha$$

Магнитное поле  $\vec{B}$  точечного заряда  $Q$ , движущегося с нерелятивистской скоростью  $\vec{v} = \text{const}$  в точке наблюдения  $M$  (см. рисунок).

[ $\vec{r}$  — радиус-вектор, проведенный из заряда  $Q$  к точке наблюдения;  $\alpha$  — угол между  $\vec{v}$  и  $\vec{r}$ ]



Вектор  $\vec{B}$  направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы  $\vec{v}$  и  $\vec{r}$ , а именно: его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от  $\vec{v}$  к  $\vec{r}$ . Записанный закон определяет магнитную индукцию положительного заряда, движущегося со скоростью  $\vec{v}$ . Если движется отрицательный заряд, то  $Q$  надо заменить на  $-Q$ . Скорость  $\vec{v}$  — относительная скорость, т. е. скорость относительно наблюдателя. Вектор  $\vec{B}$  в рассматриваемой системе отсчета зависит как от времени, так и от положения точки  $M$  наблюдения. Поэтому следует подчеркнуть относительный характер магнитного поля движущегося заряда.



### 3.98 Действие магнитного поля на движущийся заряд

Сила Лоренца

$$\vec{F}_L = Q [\vec{v}\vec{B}]$$

Модуль силы Лоренца

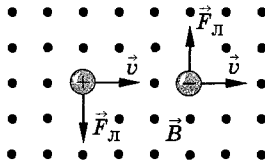
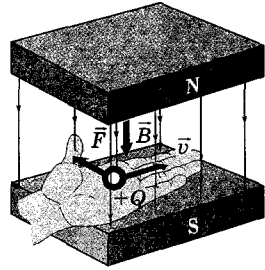
$$F_L = QvB \sin \alpha$$

Сила, с которой магнитное поле действует на движущиеся заряды.

Направление силы Лоренца определяется с помощью *правила левой руки*: если ладонь левой руки расположить так, чтобы в нее входил вектор  $\vec{B}$ , а четыре вытянутых пальца направить вдоль вектора  $\vec{v}$  (для  $Q > 0$  направления  $I$  и  $\vec{v}$  совпадают, для  $Q < 0$  — противоположны), то отогнутый большой палец покажет направление силы, действующей на *положительный заряд*.

Сила Лоренца перпендикулярна векторам  $\vec{B}$  и  $\vec{v}$ . На рисунке показаны направления сил, с которыми магнитное поле действует на *движущиеся* заряженные частицы. *Сила Лоренца не совершает работы*. Магнитное поле *не действует на покоящийся электрический заряд*. В этом существенное отличие магнитного поля от электрического. *Магнитное поле действует только на движущиеся в нем заряды.*

[ $Q$  — электрический заряд, движущийся со скоростью  $\vec{v}$  в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ ;  $\alpha$  — угол между  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ ]



Формула Лоренца

$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q [\vec{v}\vec{B}]$$

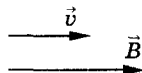
Определяет силу, если на движущийся заряд одновременно действуют магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$  и электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}$ .

### 3.99 Движение заряженных частиц в магнитном поле

Частица движется в магнитном поле

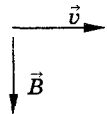
вдоль линии магнитной индукции

Угол  $\alpha$  между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$  равен 0 или  $\pi$ . Тогда сила Лоренца  $F_L = QvB \sin \alpha = 0$  3.98. Частица движется *равномерно и прямолинейно*.



перпендикулярно вектору  $\vec{B}$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $F_L = QvB$  (постоянна по модулю и нормальна к траектории частицы). Частица будет двигаться *по окружности*.



### Радиус окружности

$$r = \frac{m v}{Q B}$$

Определяется из условия  $QvB = \frac{mv^2}{r}$ .

### Период вращения частицы

$$T = \frac{2\pi m}{B Q}$$

Время, за которое частица совершает один полный оборот.

$$T = \frac{2\pi r}{v}, \quad r = \frac{m v}{Q B}, \quad T = \frac{2\pi m}{B Q}.$$

[ $Q$  — заряд частицы;  $m$  — масса частицы]

### под углом к вектору $\vec{B}$

Движение частицы в данном случае можно представить в виде суперпозиции:

1) равномерного прямолинейного движения вдоль поля со скоростью  $v_{\parallel} = v \cos \alpha$ ;

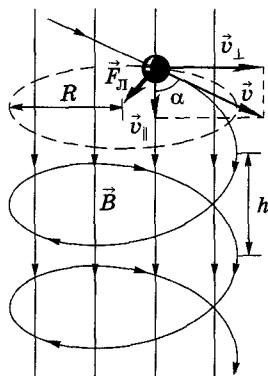
2) равномерного движения со скоростью  $v_{\perp} = v \sin \alpha$  по окружности в плоскости, перпендикулярной полю. В результате сложения обоих движений возникает движение по винтовой линии, ось которой параллельна магнитному полю.

Шаг винтовой линии

$$h = v_{\parallel} T = v T \cos \alpha$$

( $T = \frac{2\pi r}{v}$  — период вращения частицы).

$$r = \frac{m v}{Q B}. \quad \text{Тогда } h = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{B Q}.$$



## 3.100 Эквивалентность магнитных свойств элемента тока и движущегося заряда

Магнитное поле	Действие магнитного поля
элемента проводника $d\vec{l}$ с током $I$ $d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} \quad \text{3.92}$	на элемент проводника $d\vec{l}$ с током $I$ $d\vec{F} = I [d\vec{l}, \vec{B}] \quad \text{3.93}$
заряда $Q$ , движущегося со скоростью $\vec{v} = \text{const}$ $\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Q [\vec{v}, \vec{r}]}{r^3} \quad \text{3.97}$	на заряд $Q$ , движущийся со скоростью $\vec{v} = \text{const}$ $\vec{F} = Q [\vec{v}, \vec{B}] \quad \text{3.98}$

Сравнивая приведенные выражения, видим, что движущийся заряд по своим магнитным свойствам эквивалентен элементу тока:  $I d\vec{l} = Q \vec{v}$ .

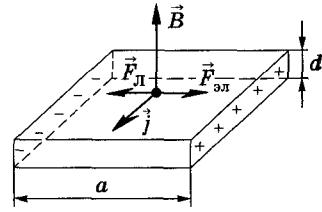
## 3.101 Эффект Холла

### Эффект Холла

Возникновение поперечного электрического поля в проводнике (или полупроводнике) с током при помещении его в магнитное поле.

Это явление обусловлено действием силы Лоренца на носители тока.

Металлическая пластинка с током плотностью  $\vec{j}$  помещается в магнитное поле  $\vec{B}$ , перпендикулярное  $\vec{j}$ . Электроны испытывают действие силы Лоренца  $\vec{F}_L$ , направление которой, согласно правилу левой руки, задано на рисунке. Таким образом, у левого края пластинки возникнет повышенная концентрация электронов (он зарядится отрицательно), а у правого — их недостаток (он зарядится положительно). В результате этого между краями пластинки возникнет дополнительное поперечное электрическое поле, направленное справа налево.



**Холловская разность потенциалов**

$$\Delta\varphi = \frac{1}{en} \frac{IB}{d} = R \frac{IB}{d}$$

Когда напряженность  $E_B$  поперечного поля достигнет такой величины, что его действие на заряды будет уравнивать силу Лоренца, установится стационарное распределение зарядов в поперечном направлении.

Тогда

$$eE_B = e \frac{\Delta\varphi}{a} = evB, \text{ или } \Delta\varphi = vBa.$$

Учитывая, что сила тока  $I = jS = nevS$ , получаем холловскую разность потенциалов

$$\Delta\varphi = \frac{I}{nead} Ba = \frac{1}{en} \frac{IB}{d} = R \frac{IB}{d}.$$

[ $a$  — ширина пластинки;  $d$  — толщина пластинки;  $n$  — концентрация электронов;  $v$  — средняя скорость упорядоченного движения электронов;  $S$  — площадь поперечного сечения пластинки;  $R = \frac{1}{en}$  — *постоянная Холла*]

**Постоянная Холла  $R = \frac{1}{en}$**

Зависит от вещества. По измеренному значению постоянной Холла можно: 1) определить концентрацию носителей тока в проводнике (при известном характере проводимости и заряде носителей); 2) судить о природе проводимости полупроводников (см. 6.4.3 и 6.4.4), так как знак постоянной Холла совпадает со знаком заряда  $e$  носителей тока.

**3.4.6. ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРА  $\vec{B}$  МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВАКУУМЕ**

**3.102 Теорема о циркуляции вектора  $\vec{B}$**

**Циркуляция вектора  $\vec{B}$**

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_t dl$$

Вводится аналогично циркуляции вектора напряженности электростатического поля 3.19.

[ $d\vec{l}$  — вектор элементарной длины контура, направленный вдоль обхода контура;  $B_t = B \cos \alpha$  — составляющая вектора  $\vec{B}$  в направлении касательной к контуру (с учетом выбранного направления обхода);  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$ ]

**Теорема о циркуляции вектора  $\vec{B}$**

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_t dl = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_k$$

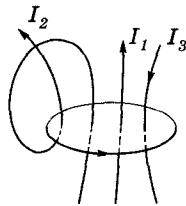
Циркуляция вектора  $\vec{B}$  по произвольному замкнутому контуру равна произведению магнитной постоянной  $\mu_0$  на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром.

## Учет токов, охватываемых контуром

Каждый ток учитывается столько раз, сколько раз он охватывается контуром. Положительным считается ток, направление которого связано с направлением обхода по контуру *правилом правого винта*; ток противоположного направления — отрицательный. Для токов на рисунке:

$$\sum_{i=1}^n I_k = I_1 + 2I_2 - I_3.$$

◆ Приведенная теорема о циркуляции вектора  $\vec{B}$  справедлива только для поля в вакууме, поскольку для поля в веществе надо учитывать молекулярные токи.



## 3.103 Магнитное поле прямого тока. Сравнение теорем о циркуляции

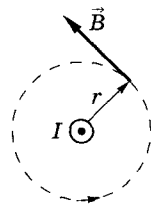
Применение теоремы о циркуляции вектора  $\vec{B}$  для расчета магнитного поля прямого тока

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Замкнутый контур представим себе в виде окружности радиуса  $r$ . В каждой точке этого контура вектор  $B$  по модулю одинаков и направлен по касательной к окружности.

$$\oint_L B_i dl = \oint_L B dl = B \oint_L dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I,$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{3.92.}$$



Сравнение теорем о циркуляции векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L E_l dl = 0$$

Между ними существует *принципиальное различие*. Циркуляция вектора  $\vec{E}$  электростатического поля всегда равна нулю, т. е. электростатическое поле является *потенциальным*. Циркуляция вектора  $\vec{B}$  магнитного поля не равна нулю. Такое поле называется *вихревым*.

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_k$$

## 3.4.7. МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ СОЛЕНОИДА И ТОРОИДА

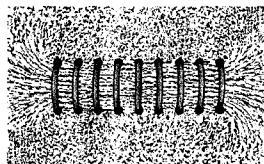
### 3.104 Магнитное поле соленоида

Соленоид

Свернутый в спираль изолированный проводник, по которому течет электрический ток.

Опытное наблюдение магнитного поля соленоида

На рисунке приведены линии магнитной индукции соленоида, «проявленные» с помощью железных опилок. Опыт показывает, что магнитное поле сосредоточено внутри соленоида (поле однородно), а полем вне соленоида (особенно если он бесконечно длинный) можно пренебречь.



Магнитная индукция поля внутри соленоида (в вакууме)

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

Выберем замкнутый прямоугольный контур  $ABCD$  (см. рисунок). Интеграл по  $ABCD$  можно представить в виде четырех интегралов: по  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$ . На участках  $AB$  и  $CD$  контур перпендикулярен

линиям магнитной индукции и  $B_l = 0$ . На участке вне соленоида  $B = 0$ . На участке  $DA$  циркуляция вектора  $\vec{B}$  равна  $Bl$  (контур совпадает с линией магнитной индукции); следовательно,

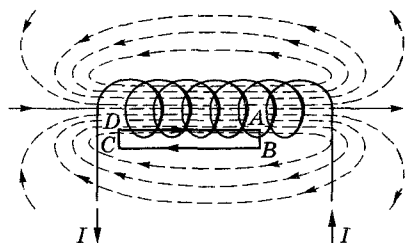
$$\int_{DA} B_l dl = Bl = \mu_0 NI,$$

откуда магнитная индукция поля

$$(в вакууме) B = \frac{\mu_0 NI}{l}.$$

Вывод этой формулы не совсем корректен (линии магнитной индукции замкнуты, и интеграл по внешнему участку магнитного поля строго нулю не равен). Корректно рассчитать поле внутри соленоида можно, применяя закон Био—Савара—Лапласа 3.92, в результате получается та же формула.

[ $\mu_0$  — магнитная постоянная;  $l$  — длина соленоида;  $N$  — число витков соленоида;  $I$  — сила тока]



### 3.105 Магнитное поле тороида

#### Тороид

Кольцевая катушка с витками, намотанными на сердечник, имеющий форму тора, по которой течет ток.

#### Магнитная индукция поля внутри тороида (в вакууме)

$$B = \mu_0 \frac{NI}{2\pi r}$$

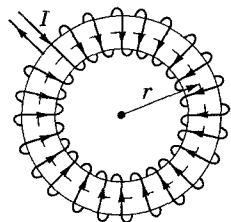
Магнитное поле, как показывает опыт, сосредоточено внутри тороида, вне его поле отсутствует. Линии магнитной индукции в данном случае, как следует из соображений симметрии, есть окружности, центры которых расположены по оси тороида. В качестве контура выбирают одну такую окружность радиуса  $r$ . По теореме о циркуляции

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI,$$

т. е. магнитная индукция *внутри* тороида (в вакууме)

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}.$$

[ $\mu_0$  — магнитная постоянная;  $N$  — число витков тороида;  $I$  — сила тока]



### 3.4.8. ПОТОК ВЕКТОРА МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ. ТЕОРЕМА ГАУССА ДЛЯ ПОЛЯ $\vec{B}$

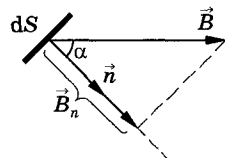
#### 3.106 Поток вектора магнитной индукции

Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток) сквозь площадку  $dS$

$$d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_n dS$$

Скалярная физическая величина.

$B_n = B \cos \alpha$  — проекция вектора  $\vec{B}$  на направление нормали  $\vec{n}$  к площадке  $dS$  ( $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{n}$  и  $\vec{B}$ ),  $d\vec{S} = dS \vec{n}$  — вектор, модуль которого равен  $dS$ , а направление совпадает с направлением нормали  $\vec{n}$  к площадке.



## Знак потока магнитной индукции

Поток вектора  $\vec{B}$  может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от знака  $\cos \alpha$  (определяется выбором положительного направления нормали  $\vec{n}$ ). Поток вектора  $\vec{B}$  связывают с контуром, по которому течет ток. В таком случае положительное направление нормали к контуру нами уже определено § 3.85: оно связывается с током правилом правого винта. Следовательно, магнитный поток, создаваемый контуром через поверхность, ограниченную им самим, всегда положителен.

## Магнитный поток сквозь произвольную поверхность $S$

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B_n \, dS$$

Интеграл берется по произвольной поверхности  $S$ .

$$\Phi_B = BS$$

Эта формула — для однородного поля и плоской поверхности, расположенной перпендикулярно вектору  $\vec{B}$ . Тогда  $B_n = B = \text{const}$ .

## Единица магнитного потока

$$1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot \text{м}^2$$

1 Вб (вебер) — магнитный поток, проходящий через плоскую поверхность площадью  $1 \text{ м}^2$ , расположенную перпендикулярно однородному магнитному полю, индукция которого равна 1 Тл.

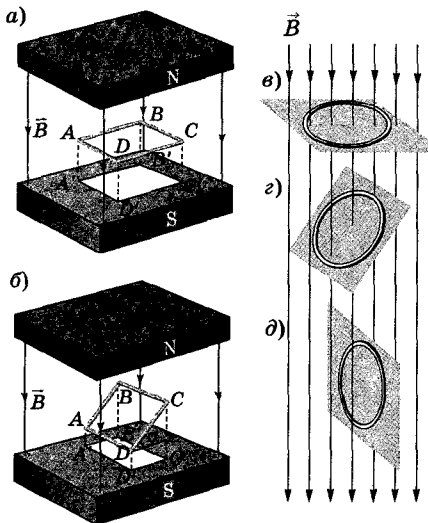
## 3.107 Наглядная интерпретация магнитного потока

Магнитный поток характеризует магнитное поле, пронизывающее поверхность.

Магнитный поток сквозь контур  $ABCD$  равен произведению магнитной индукции  $B$  на площадь контура  $S$ :  $\Phi = BS$  (рисунки  $a$ ,  $e$ ).

Если контур  $ABCD$  наклонен к линиям магнитной индукции, то он охватывает меньший магнитный поток. В данном случае эффективная площадь  $A'B'C'D'$  равна  $S \cos \alpha$ , а поток  $\Phi' = BS \cos \alpha$  (рисунок  $b$ , а также рисунок  $z$ ).

Если контур расположен параллельно линиям магнитной индукции (рисунок  $d$ ), то поток сквозь этот контур равен нулю.



## 3.108 Теорема Гаусса для поля $\vec{B}$ . Поток вектора $\vec{B}$ сквозь соленоид

### Теорема Гаусса для поля $\vec{B}$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_S B_n \, dS = 0$$

Поток вектора магнитной индукции сквозь произвольную замкнутую поверхность равен нулю.

Эта теорема отражает факт отсутствия магнитных зарядов, вследствие чего линии магнитной индукции не имеют ни начала, ни конца и являются замкнутыми.

## Сравнение теорем Гаусса для полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n Q_i$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \oint_S B_n dS = 0$$

Между ними имеется *принципиальное различие*. Электростатическое поле создается зарядами, а магнитные заряды отсутствуют.

### Поток вектора магнитной индукции сквозь соленоид

$$\Phi = \mu_0 \mu \frac{N^2 I S}{l}$$

Магнитная индукция однородного поля внутри соленоида с сердечником  $B = \frac{\mu_0 \mu N I}{l}$  **3.104**. Магнитный поток сквозь один виток соленоида  $\Phi_1 = B S$  **3.106**. Полный магнитный поток, сцепленный со всеми витками соленоида

$$\Phi = \Phi_1 N = N B S = \mu_0 \mu \frac{N^2 I S}{l}$$

[ $\mu$  — магнитная проницаемость сердечника;  $\mu_0$  — магнитная постоянная;  $N$  — число витков соленоида;  $S$  — площадь витка соленоида;  $l$  — длина соленоида;  $I$  — сила тока]

## 3.4.9. РАБОТА ПО ПЕРЕМЕЩЕНИЮ ПРОВОДНИКА И КОНТУРА С ТОКОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

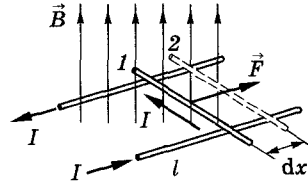
### 3.109 Работа по перемещению проводника с током

#### Вычисление работы

Проводник длиной  $l$  (он может свободно перемещаться) с током  $I$  находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости контура. Сила Ампера  $F = I B l$  **3.93**. Под ее действием проводник переместился на  $dx$  из положения 1 в 2. Работа, совершаемая магнитным полем,

$$dA = F dx = I B l dx = I B dS = I d\Phi.$$

[ $dS = l dx$  — площадь, пересекаемая проводником при его перемещении в магнитном поле;  $B dS = d\Phi$  — поток вектора магнитной индукции, пронизывающий эту площадь]



#### Работа по перемещению проводника с током

$$dA = I d\Phi$$

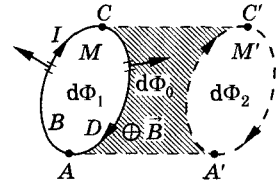
Равна произведению силы тока на магнитный поток, *пересеченный движущимся проводником*.

### 3.110 Работа по перемещению контура с током

#### Вычисление работы

Работа  $dA$  сил Ампера при рассматриваемом перемещении контура равна сумме работ по перемещению проводников  $ABC$  ( $dA_1$ ) и  $CDA$  ( $dA_2$ ), т. е.  $dA = dA_1 + dA_2$ . Так как  $dA = I d\Phi$ , то  $dA_2 = I(d\Phi_0 + d\Phi_2)$  и  $dA_1 = -I(d\Phi_0 + d\Phi_1)$ , откуда  $dA = I(d\Phi_2 - d\Phi_1)$ .

[ $d\Phi_0$  — поток, пересекаемый проводником  $CDA$  при движении сквозь заштрихованную поверхность;  $d\Phi_2$  — поток, пронизывающий контур в конечном положении; знак минус — силы образуют с направлением перемещения тупые углы]



$$dA = I(d\Phi_2 - d\Phi_1)$$

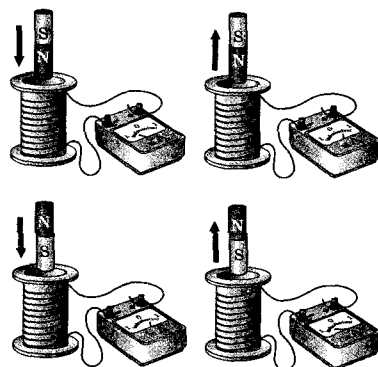
Равна произведению силы тока в контуре на изменение магнитного потока, сцепленного с контуром.

### 3.5. Электромагнитная индукция

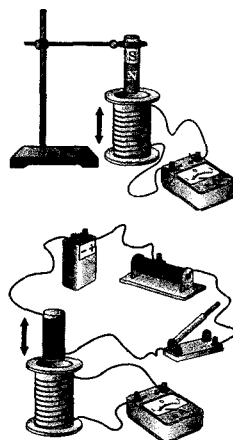
#### 3.5.1. ЯВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ. ЗАКОН ФАРАДЕЯ

##### 3.111 Опыты Фарадея

**Опыт I.** Если в замкнутый на гальванометр соленоид вдвигать или выдвигать постоянный магнит, то в моменты его вдвигания или выдвигания наблюдается отклонение стрелки амперметра (возникает индукционный ток); направления отклонения стрелки при вдвигании и выдвигании магнита противоположны. Отклонение стрелки амперметра тем больше, чем больше скорость движения магнита относительно катушки. При изменении полюсов магнита направления отклонения стрелки изменится. Для получения индукционного тока магнит можно оставлять неподвижным, тогда нужно относительно магнита передвигать соленоид.



**Опыт II.** Концы одной из катушек, вставленных одна в другую, присоединяются к амперметру, а через другую катушку пропускается ток. Отклонение стрелки амперметра наблюдается в моменты включения или выключения тока, в моменты его увеличения или уменьшения или при перемещении катушек друг относительно друга. Направления отклонений стрелки амперметра также противоположны при включении и выключении тока, его увеличении и уменьшении, сближении и удалении катушек.



##### 3.112 Выводы из опытов Фарадея. Электромагнитная индукция

- ◆ Удалось в контуре возбудить ток с помощью магнитного поля.
- ◆ Индукционный ток возникает всегда, когда происходит изменение сцепленного с контуром потока магнитной индукции. Например, при повороте в однородном магнитном поле замкнутого проводящего контура в нем также возникает индукционный ток. В данном случае индукция магнитного поля вблизи проводника остается постоянной, а меняется только поток магнитной индукции сквозь контур.
- ◆ Значение индукционного тока совершенно не зависит от способа изменения потока магнитной индукции, а определяется лишь скоростью его изменения (в опытах Фарадея также доказывается, что отклонение



стрелки амперметра (сила тока) тем больше, чем больше скорость движения магнита, или скорость изменения силы тока, или скорость движения катушек).

## Электромагнитная индукция

Явление, заключающееся в том, что в замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции, охватываемого этим контуром, возникает электрический ток, получивший название *индукционного*.

### 3.113 Закон Фарадея (закон электромагнитной индукции)

#### ЭДС электромагнитной индукции

Обобщая результаты опытов, Фарадей показал, что всякий раз, когда происходит изменение сцепленного с контуром потока магнитной индукции, в контуре возникает индукционный ток; возникновение индукционного тока указывает на наличие в цепи электродвижущей силы, называемой *электродвижущей силой электромагнитной индукции*.

#### Закон Фарадея

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

ЭДС  $\mathcal{E}_i$  электромагнитной индукции в контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную этим контуром.

Этот закон *универсален*: ЭДС  $\mathcal{E}_i$  не зависит от способа изменения магнитного потока.

Знак минус показывает, что увеличение потока ( $\frac{d\Phi}{dt} > 0$ ) вызывает ЭДС  $\mathcal{E}_i < 0$ , т. е. поле индукционного тока направлено навстречу потоку; уменьшение потока ( $\frac{d\Phi}{dt} < 0$ ) вызывает  $\mathcal{E}_i > 0$ , т. е. направления потока и поля индукционного тока совпадают. Знак минус в законе Фарадея определяется правилом Ленца — общим правилом для нахождения направления индукционного тока **3.114**.

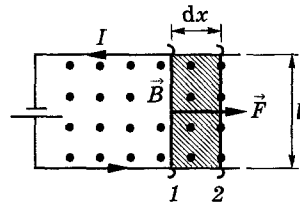
#### Вывод закона Фарадея из закона сохранения энергии

Проводник с током  $I$  помещен в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости контура, и может свободно перемещаться. Сила Ампера производит работу  $dA = I d\Phi$  **3.109**, где  $d\Phi$  — пересеченный проводником магнитный поток.

Согласно закону сохранения энергии, работа источника тока за время  $dt$  ( $\mathcal{E}I dt$ ) будет складываться из работы на джоулеву теплоту ( $I^2R dt$ ) и работы по перемещению проводника в магнитном поле ( $I d\Phi$ ):  $\mathcal{E}I dt = I^2R dt + I d\Phi$  ( $R$  — полное сопротивление контура):

$$I = \frac{\mathcal{E} - \frac{d\Phi}{dt}}{R},$$

где  $-\frac{d\Phi}{dt} = \mathcal{E}_i$  и есть *закон Фарадея*.



#### Размерность $\left[ \frac{d\Phi}{dt} \right]$

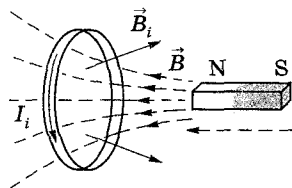
$$\left[ \frac{d\Phi}{dt} \right] = \frac{Вб}{с} = \frac{Тл \cdot м^2}{с} = \frac{Н \cdot м^2}{А \cdot м \cdot с} = \frac{Дж}{А \cdot с} = \frac{А \cdot В \cdot с}{А \cdot с} = В.$$

### 3.114 Правило Ленца

#### Правило Ленца

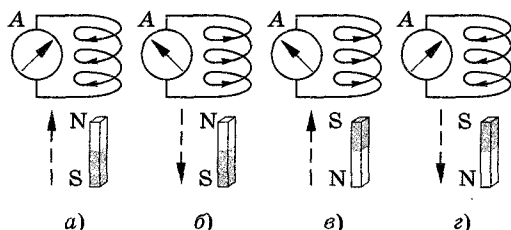
Индукционный ток в контуре имеет всегда такое направление, что создаваемое им магнитное поле препятствует *изменению магнитного потока*, вызвавшего этот индукционный ток.

При приближении магнита к замкнутому проводнику  $\frac{d\Phi}{dt} > 0$ .  $\vec{B}_i$  — магнитная индукция поля индукционного тока  $I_i$ , причем направление  $\vec{B}_i$  и направление индукционного тока подчиняются правилу правого винта.



#### Применение правила Ленца

На рисунках указаны направления индукционных токов в катушке при приближении к ней северного (рисунок а) и южного (рисунок в) полюсов полосового магнита и при удалении от нее северного (рисунок б) и южного (рисунок г) полюсов.



### 3.115 ЭДС индукции в неподвижных проводниках

#### Возбуждение электрического поля с помощью переменного магнитного поля

Согласно закону Фарадея, возникновение ЭДС электромагнитной индукции возможно и в случае неподвижного контура, находящегося в *переменном* магнитном поле. Однако сила Лоренца на неподвижные заряды не действует, поэтому в данном случае ею нельзя объяснить возникновение ЭДС индукции. Максвелл для объяснения ЭДС индукции в неподвижных проводниках предположил, что всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле  $\vec{E}_B$ , которое и является причиной возникновения индукционного тока в проводнике.

#### Циркуляция вектора $\vec{E}_B$

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = \epsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Циркуляция  $\vec{E}_B$  по любому неподвижному контуру  $L$  проводника представляет собой ЭДС электромагнитной индукции.

### 3.116 Вращение рамки в магнитном поле

#### Цель изучения вращения рамки в магнитном поле

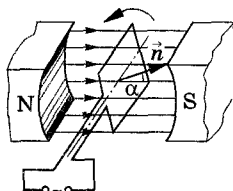
Вращение плоской рамки в однородном магнитном поле раскрывает принцип действия *генераторов*, применяемых для преобразования механической энергии в энергию электрического тока.

#### Магнитный поток, сцепленный с рамкой

Рамка вращается в однородном магнитном поле ( $B = \text{const}$ ) с угловой скоростью  $\omega = \text{const}$ . Магнитный поток, сцепленный с рамкой площадью  $S$ , в любой момент времени  $t$

$$\Phi = B_n S = BS \cos \alpha = BS \cos \omega t.$$

[ $\alpha = \omega t$  — угол поворота рамки в момент времени  $t$ ]



## Переменная ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin \omega t$$

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega t$$

Возникает при вращении рамки. Максимальные значения, достигаемые  $\mathcal{E}_i$ ,  $\mathcal{E}_{\max} = BS\omega$ .

При равномерном вращении рамки в однородном магнитном поле в ней возникает переменная ЭДС, изменяющаяся по гармоническому закону. Вращая ряд витков, соединенных последовательно, тем самым увеличивается  $S$ . Переменное напряжение снимается с помощью щеток, изображенных на рисунке.

## Обратимость процесса превращения механической энергии в электрическую

Если по рамке, помещенной в магнитное поле, пропускать электрический ток, то в соответствии с выражением  $M = [\vec{p}_m \vec{B}]$  на нее будет действовать вращающий момент и рамка начнет вращаться. На этом принципе основана работа электродвигателей, предназначенных для превращения электрической энергии в механическую.

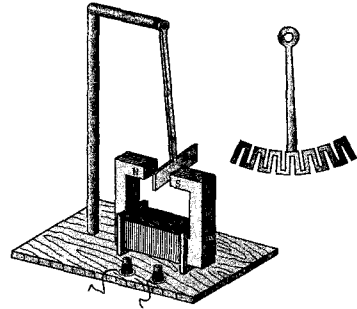
## 3.117 Вихревые токи (токи Фуко)

### Вихревые токи (токи Фуко)

Индукционные токи, возникающие в массивных сплошных проводниках, помещенных в переменное магнитное поле, и замкнутые в толще проводника.

### Справедливость правила Ленца для вихревых токов

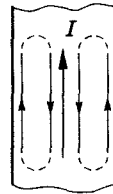
Магнитное поле токов Фуко направлено так, чтобы противодействовать изменению магнитного потока, индуцирующего вихревые токи. Если между полюсами невключенного электромагнита массивный медный маятник совершает практически незатухающие колебания, то при включении тока он испытывает сильное торможение и очень быстро останавливается. Это объясняется тем, что возникшие токи Фуко имеют такое направление, что действующие на них со стороны магнитного поля силы тормозят движение маятника. Если же в маятнике сделать радиальные вырезы, то вихревые токи ослабляются и торможения почти нет.



### Вихревые токи в проводах с переменным током

На рисунке показано направление вихревых токов при возрастании и убывании первичного тока в проводнике. В обоих случаях направление вихревых токов таково, что они противодействуют изменению первичного тока внутри проводника и способствуют его изменению вблизи поверхности. Таким образом, вследствие возникновения вихревых токов быстропеременный ток оказывается распределенным по сечению провода неравномерно — он как бы вытесняется на поверхность проводника. Это явление получило название *скин-эффекта* (от англ. skin — кожа) или *поверхностного эффекта*. Так как токи высокой частоты практически текут в тонком поверхностном слое, то провода для них делают полыми.

а)  $\frac{dI}{dt} > 0$       б)  $\frac{dI}{dt} < 0$



## 3.5.2. ИНДУКТИВНОСТЬ КОНТУРА. САМОИНДУКЦИЯ

### 3.118 Индуктивность

Индуктивность — физическая величина, характеризующая магнитные свойства электрической цепи.

#### Индуктивность контура

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

Определяется магнитным потоком, сцепленным с контуром, когда ток, создающий этот поток, равен единице.

Электрический ток, текущий в замкнутом контуре, создает вокруг себя магнитное поле, индукция которого по закону Био—Савара—Лапласа **3.12** пропорциональна току. Сцепленный с контуром магнитный поток  $\Phi$  поэтому пропорционален току  $I$  в контуре:  $\Phi = LI$  (коэффициент пропорциональности  $L$  и есть *индуктивность контура*).

Индуктивность контура в общем случае зависит только от геометрической формы контура, его размеров и магнитной проницаемости той среды, в которой он находится. В этом смысле индуктивность контура — аналог электрической емкости уединенного проводника, которая также зависит только от формы проводника, его размеров и диэлектрической проницаемости среды **3.46**.

#### Единица индуктивности

$$1 \text{ Гн} = 1 \text{ Вб/А}$$

1 Гн (генри) — индуктивность такого контура, магнитный поток самоиндукции которого при токе в 1 А равен 1 Вб.

#### Индуктивность соленоида

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l}$$

Полный магнитный поток сквозь соленоид (*потокосцепление*)

$$\Phi = NBS = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l} S.$$

Подставив эту формулу в  $L = \frac{\Phi}{I}$ , получим  $L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l}$ .

[ $N$  — число витков соленоида;  $l$  — его длина,  $S$  — площадь;  $\mu$  — магнитная проницаемость сердечника;  $\mu_0$  — магнитная постоянная]

### 3.119 Самоиндукция

Самоиндукция — возникновение ЭДС индукции в проводящем контуре при изменении в нем силы тока.

#### ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}$$

Закон Фарадея **3.113** применительно к самоиндукции  $\mathcal{E}_s = -\frac{d}{dt}(LI)$ . Если контур не деформируется и магнитная проницаемость среды не изменяется, то  $L = \text{const}$ .

Знак минус обусловлен правилом Ленца **3.114**; и показывает, что наличие индуктивности в контуре приводит к *замедлению изменения* тока в нем.

#### Электрическая инертность контура

Из закона Фарадея для самоиндукции следует: если ток со временем возрастает ( $\frac{dI}{dt} > 0$ ),  $\mathcal{E}_s < 0$ , т. е. ток самоиндукции направлен навстречу току, обусловленному внешним источником, и замедляет его возрастание. Если ток со временем убывает ( $\frac{dI}{dt} < 0$ ),  $\mathcal{E}_s > 0$ , т. е. индукционный ток имеет

такое же направление, как и убывающий ток в контуре, и замедляет его убывание.

Контур, обладая индуктивностью, приобретает электрическую инертность, заключающуюся в том, что любое изменение тока тормозится тем сильнее, чем больше индуктивность контура

### 3.5.3. ТОКИ ПРИ РАЗМЫКАНИИ И ЗАМЫКАНИИ ЦЕПИ

#### 3.120 Размыкание цепи

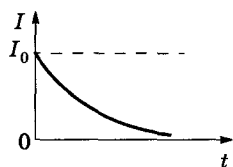
##### Экстратоки самоиндукции

Дополнительные токи за счет возникновения ЭДС самоиндукции при всяком изменении силы тока в цепи. Они направлены противоположно току, создаваемому источником. При выключении источника тока экстратоки имеют такое же направление, что и ослабевающий ток. Следовательно, наличие индуктивности в цепи приводит к замедлению исчезновения или установления тока в цепи.

##### Ток при размыкании цепи

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

В цепи течет постоянный ток  $I_0 = \mathcal{E}/R$  ( $\mathcal{E}$  — ЭДС источника тока,  $R$  — сопротивление).



В момент времени  $t = 0$  отключим источник тока, возникает ЭДС самоиндукции, препятствующая уменьшению тока. Ток в цепи определяется законом

Ома  $I = \frac{\mathcal{E}_s}{R}$ , или  $IR = -L \frac{dI}{dt}$ . Разделив переменные и проинтегрировав, получим  $I = I_0 e^{-Rt/L} = I_0 e^{-t/\tau}$ . Сила тока при размыкании цепи убывает по экспоненциальному закону.

##### Время релаксации

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Из формулы  $I = I_0 e^{-t/\tau}$  следует, что  $\tau$  — время, за которое сила тока уменьшается в  $e$  раз.

##### Оценка ЭДС самоиндукции при размыкании цепи

$$\mathcal{E}_s = \frac{R}{R_0} \mathcal{E} e^{\frac{Rt}{L}}$$

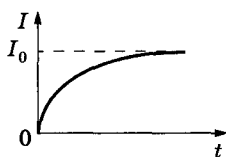
Подставив  $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$  в формулу  $I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$ , получим  $I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{Rt}{L}}$ . ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt} = \frac{R}{R_0} \mathcal{E} e^{\frac{Rt}{L}}$ , т. е. при резком размыкании контура, содержащего индуктивность,  $R \gg R_0$ . Тогда  $\mathcal{E}_s \gg \mathcal{E}$ . Поэтому контур, содержащий индуктивность, нельзя резко размыкать.

#### 3.121 Замыкание цепи

##### Ток при замыкании цепи

$$I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

При замыкании цепи наряду с  $\mathcal{E}$  возникает ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}$ , препятствующая возрастанию тока. По закону Ома  $IR = \mathcal{E} + \mathcal{E}_s$ , или  $IR = \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt}$ . Решение этого



уравнения  $I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ , где  $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$  — установившийся ток (при  $t \rightarrow \infty$ ). Скорость нарастания тока определяется тем же временем релаксации  $\tau = \frac{L}{R}$ , что и убывание тока. Установление тока происходит тем быстрее, чем меньше индуктивность цепи и больше ее сопротивление.

### 3.5.4. ВЗАИМНАЯ ИНДУКЦИЯ. ТРАНСФОРМАТОРЫ

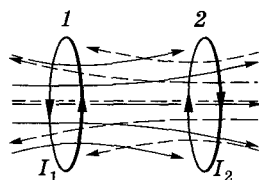
#### 3.122 Взаимная индукция

##### Взаимная индукция

Явление возникновения ЭДС в одном из контуров при изменении силы тока в другом.

##### Взаимная индуктивность контуров

Два контура 1 и 2 с токами  $I_1$  и  $I_2$  расположены близко друг к другу. При протекании в контуре тока  $I_1$  магнитный поток (его поле изображено сплошными линиями) пронизывает контур 2:



$$\Phi_{21} = L_{21}I_1$$

( $L_{21}$  — коэффициент пропорциональности).

$$\text{Аналогично } \Phi_{12} = L_{12}I_2.$$

Взаимная индуктивность контуров  $L_{12} = L_{21} = L$  зависит от геометрической формы, размеров, взаимного расположения контуров и от магнитной проницаемости окружающей контуры среды.

##### ЭДС взаимной индукции

$$\mathcal{E}_{i1} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L \frac{dI_2}{dt}$$

[ $\mathcal{E}_{i1}$  — ЭДС, индуцируемая в первом контуре при изменении силы тока  $I_2$  (она равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока  $\Phi_{12}$ , созданного током во втором контуре и пронизывающего первый);  $\mathcal{E}_{i2}$  — ЭДС, индуцируемая во втором контуре при изменении силы тока  $I_1$ ]

$$\mathcal{E}_{i2} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -L \frac{dI_1}{dt}$$

##### Взаимная индуктивность двух катушек, намотанных на общий тороидальный сердечник

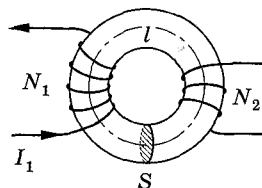
$$L = \mu_0 \mu \frac{N_1 N_2}{l} S$$

Магнитный поток сквозь один виток второй катушки **3.106**:

$$\Phi_2 = BS = \mu_0 \mu \frac{N_1 I_1}{l} S.$$

Полный магнитный поток (потокосцепление) сквозь  $N_2$  витков вторичной обмотки

$$\Phi = \Phi_2 N_2 = \mu_0 \mu \frac{N_1 N_2}{l} S I_1.$$



Поток  $\Phi$  создается током  $I_1$ , поэтому  $L = \frac{\Phi}{I_1} = \mu_0 \mu \frac{N_1 N_2}{l} S.$

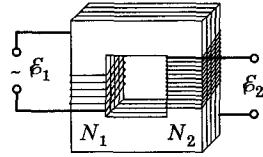
### 3.123 Трансформаторы

#### Трансформатор

Устройство, применяемое для повышения или понижения напряжения переменного тока.

#### Устройство трансформатора

Трансформатор состоит из двух обмоток, одна из которых называется *первичной* (число витков  $N_1$ ), вторая — *вторичной* (число витков  $N_2$ ). Обе обмотки укреплены на общем замкнутом железном сердечнике.



#### Принцип работы трансформатора

Работа трансформатора основана на явлении взаимной индукции. Переменный ток  $I_1$  первичной катушки (она подсоединена к источнику переменного напряжения с ЭДС  $\mathcal{E}_1$ ) создает в сердечнике трансформатора переменный магнитный поток  $\Phi$ . Изменение этого потока вызывает во *вторичной обмотке появление ЭДС взаимной индукции, а в первичной — ЭДС самоиндукции.*

Ток  $I_1$  первичной обмотки определяется, согласно закону Ома:

$$\mathcal{E}_1 - \frac{d}{dt}(N_1\Phi) = I_1 R_1.$$

Падение напряжения  $I_1 R_1$  на сопротивлении  $R_1$  первичной обмотки мало по сравнению с каждой из двух ЭДС, поэтому  $\mathcal{E}_1 \approx N_1 \frac{d\Phi}{dt}$ . ЭДС взаимной индукции во вторичной обмотке  $\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}$ . Сравнение обеих ЭДС показывает, что  $\mathcal{E}_2 = -\frac{N_2}{N_1} \mathcal{E}_1$  (знак минус указывает на то, что ЭДС в обеих обмотках противоположны по фазе).

#### Коэффициент трансформации

$$k = \frac{N_2}{N_1}$$

Это отношение показывает, во сколько раз ЭДС во вторичной обмотке трансформатора больше (или меньше), чем в первичной.

#### Мощности тока в обеих обмотках трансформатора

$$\mathcal{E}_2 I_2 \approx \mathcal{E}_1 I_1$$

Это соотношение записывается на основе закона сохранения энергии (потери  $\approx 2\%$ ), связанными с выделением джоулевой теплоты и появлением вихревых токов, пренебрегли).

#### Типы трансформаторов

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

Если  $N_2 > N_1$  — *трансформатор повышающий* (увеличивает переменную ЭДС и понижает ток); если  $N_2 < N_1$  — *трансформатор понижающий* (уменьшает ЭДС и повышает ток).

### 3.5.5. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

#### 3.124 Энергия магнитного поля, связанная с контуром

##### Работа по созданию магнитного потока в контуре

$$A = \frac{LI^2}{2}$$

С контуром индуктивностью  $L$ , по которому течет ток  $I$ , связан магнитный поток  $\Phi = LI$ . Для изменения магнитного потока на  $d\Phi$  ( $d\Phi = L dI$ ) надо совершить работу  $dA = I d\Phi = LI dI$ . Работа  $A$  по созданию магнитного потока  $\Phi$  равна

$$A = \int_0^I LI dI = \frac{LI^2}{2}.$$

## Энергия магнитного поля, связанная с контуром

$$W = \frac{LI^2}{2}$$

Магнитное поле появляется и исчезает вместе с появлением и исчезновением тока в проводнике. Поэтому энергия магнитного поля равна работе, которая затрачивается током на создание этого поля.

### 3.125 Магнитное поле соленоида. Объемная плотность энергии

Энергия магнитного поля как функция характеризующих его величины (на примере соленоида)

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} V = \frac{BH}{2} V$$

В формулу для энергии  $W = \frac{LI^2}{2}$  3.124, подставив выражение для индуктивности соленоида  $L = \mu_0\mu \frac{N^2 S}{l}$  3.116 и учитывая, что  $I = \frac{Bl}{\mu_0\mu N}$  3.104 и  $B = \mu_0\mu H$  3.90, получим  $W = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} V = \frac{BH}{2} V$  ( $Sl = V$  — объем соленоида).

Объемная плотность энергии

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}$$

Энергия единицы объема.

Магнитное поле соленоида однородно и сосредоточено внутри соленоида, поэтому энергия распределена в нем с постоянной объемной плотностью  $w$ .

Сравнение объемных плотностей энергий электростатического и магнитного полей

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2},$$

$$w = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}$$

Эти формулы аналогичны, если электрические величины заменить магнитными.

[ $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная;  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость;  $E$  — напряженность электростатического поля;  $D$  — электрическое смещение;  $\mu_0$  — магнитная постоянная;  $\mu$  — магнитная проницаемость;  $H$  — напряженность магнитного поля;  $B$  — магнитная индукция]

### 3.126 Электромеханическая аналогия

Поступательное движение	Вращательное движение	Электромагнитные величины
Смещение $x$	Угловое смещение $\varphi$	Заряд $Q$
Скорость $v = \frac{dx}{dt}$	Угловая скорость $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$	Сила тока $I = \frac{dQ}{dt}$
Ускорение $a = \frac{d^2x}{dt^2}$	Угловое ускорение $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$	Скорость изменения тока $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2}$
Масса $m$	Момент инерции $J$	Индуктивность $L$
Сила $F$	Момент силы $M$	Напряжение $U$
Импульс $mv$	Момент импульса $J\omega$	Поток магнитной индукции $LI$
Работа $F dx$	Работа $M d\varphi$	Работа $U dQ$
Мощность $Fv$	Мощность $M\omega$	Мощность $UI$
Кинетическая энергия $\frac{mv^2}{2}$	Кинетическая энергия $\frac{J\omega^2}{2}$	Энергия магнитного поля $\frac{LI^2}{2}$



### 3.127 Аналогия при сопоставлении электрического и магнитного полей

Электрическое поле	Формула	Магнитное поле	Формула
Точечный заряд	$Q$ <span style="float: right;">3.3</span>	Элемент проводника с током	$I dl$ <span style="float: right;">3.4</span>
Взаимодействие точечных зарядов	$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ Q_1 Q_2 }{r^2}$ <span style="float: right;">3.5</span>	Взаимодействие токов	$F = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{r} dl$ <span style="float: right;">3.6</span>
Электрическая постоянная	$\epsilon_0$ <span style="float: right;">3.3</span>	Магнитная постоянная	$\mu_0$ <span style="float: right;">3.4</span>
Силовая характеристика электрического поля	$E = \frac{F}{Q_0}$ <span style="float: right;">3.4</span>	Силовая характеристика магнитного поля	$B = \frac{M_{\max}}{P_m}$ <span style="float: right;">3.5</span>
Однородное электрическое поле	$\vec{E} = \text{const}$ <span style="float: right;">3.6</span>	Однородное магнитное поле	$\vec{B} = \text{const}$ <span style="float: right;">3.5</span>
Принцип суперпозиции	$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$ <span style="float: right;">3.7</span>	Принцип суперпозиции	$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i$ <span style="float: right;">3.6</span>
Линии напряженности вектора $\vec{E}$	<span style="float: right;">3.6</span>	Линии магнитной индукции	<span style="float: right;">3.5</span>
Поляризованность	$P = \frac{\vec{p}_V}{V} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{V}$ <span style="float: right;">3.33</span>	Намагниченность	$\vec{j} = \frac{\vec{p}_i}{V} = \frac{\sum \vec{p}_a}{V}$ <span style="float: right;">3.4</span>
Емкость уединенного проводника	$C = \frac{Q}{\phi}$ <span style="float: right;">3.46</span>	Индуктивность катушки	$L = \frac{\Phi}{I}$ <span style="float: right;">3.5</span>
Энергия заряженного конденсатора	$W = \frac{C(\Delta\phi)^2}{2}$ <span style="float: right;">3.51</span>	Энергия катушки с током	$W = \frac{LI^2}{2}$ <span style="float: right;">3.6</span>
Диэлектрическая проницаемость	$\epsilon$ <span style="float: right;">3.34</span>	Магнитная проницаемость	$\mu$ <span style="float: right;">3.4</span>
Объемная плотность энергии	$w = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2}$ <span style="float: right;">3.52</span>	Объемная плотность энергии	$w = \frac{W}{V} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}$ <span style="float: right;">3.6</span>
Поток вектора $\vec{E}$ сквозь поверхность $S$	$\Phi_E = \int_S \vec{E} d\vec{S} = \int_S E_n dS$ <span style="float: right;">3.10</span>	Поток вектора $\vec{B}$ сквозь поверхность $S$	$\Phi_B = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B_n dS$ <span style="float: right;">3.11</span>
Циркуляция вектора $\vec{E}$	$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L E_l dl$ <span style="float: right;">3.19</span>	Циркуляция вектора $\vec{B}$	$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl$ <span style="float: right;">3.18</span>

## 3.6. Магнитные свойства вещества

### 3.6.1. МАГНИТНЫЕ МОМЕНТЫ ЭЛЕКТРОНОВ И АТОМОВ

#### 3.128 Орбитальные магнитный и механический моменты электрона

Все вещества обладают определенными магнитными свойствами. Для объяснения этого необходимо рассмотреть действие магнитного поля на атомы и молекулы вещества. В основу рассмотрения положена гипотеза Ампера [3.90], согласно которой в любом теле существуют *микроскопические токи*, обусловленные движением электронов в атомах и молекулах. Согласно представлениям классической физики, принимается, что электрон в атоме движется по круговой орбите.

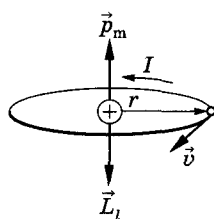
#### Орбитальный магнитный момент электрона

$$\vec{p}_m = IS\vec{n},$$

$$p_m = IS = evS$$

Наличие  $\vec{p}_m$  обусловлено тем, что электрон, движущийся по круговой орбите, эквивалентен *круговому току*. Если электрон движется по часовой стрелке, то ток направлен против часовой стрелки и вектор  $\vec{p}_m$  в соответствии с *правилом правого винта* направлен перпендикулярно плоскости орбиты электрона, как указано на рисунке.

[ $I = ev$  — сила тока;  $v$  — частота вращения электрона по орбите;  $S$  — площадь орбиты]



#### Орбитальный механический момент электрона

$$L_l = mvr = 2m\upsilon S$$

Наличие  $\vec{L}_l$  обусловлено тем, что электрон движется по круговой орбите, поэтому он обладает механическим моментом импульса [3.55]. Направление  $\vec{L}_l$  определяется по *правилу правого винта* (см. рисунок).

[ $v = \omega r = 2\pi\nu r$  — скорость движения электрона по орбите;  $\omega$  — круговая частота;  $\nu$  — частота вращения электрона по орбите;  $r$  — радиус орбиты;  $S = \pi r^2$  — площадь орбиты]

#### Связь между векторами $\vec{p}_m$ и $\vec{L}_l$

$$\vec{p}_m = -\frac{e}{2m}\vec{L}_l = g\vec{L}_l$$

Знак минус обусловлен противоположным направлением векторов (см. рисунок);  $g$  — *гиромангнитное отношение орбитальных моментов*.

#### Гиромангнитное отношение орбитальных моментов

$$g = -\frac{e}{2m}$$

Запись со знаком «минус» указывает, что направления моментов противоположны;  $g$  определяется через универсальные постоянные, а потому справедливо для любой орбиты (хотя  $v$  и  $r$  для разных орбит различны).

#### 3.129 Собственный механический момент электрона (спин)

#### Экспериментальное определение гиромангнитного отношения (опыты Эйнштейна и де Гааза)

Наблюдали поворот свободно подвешенного на тончайшей кварцевой нити железного стержня при его намагничении во внешнем магнитном поле (по обмотке соленоида пропускался переменный ток с частотой, равной частоте крутильных колебаний стержня). При исследовании вынужденных крутильных колебаний стержня определялось гиромангнитное отношение, которое оказалось равным  $-e/m$ . Таким образом, знак носителей, обуславливающих молекулярные токи, совпадал со знаком заряда электрона,

а гиромагнитное отношение оказалось в два раза бóльшим, чем введенная ранее величина  $g$  3.128. Согласно этому результату, было предположено, а затем доказано, что электрон наряду с орбитальным моментом обладает еще и *собственным механическим моментом импульса*.

### Собственный механический момент импульса (спин) электрона

$$\vec{L}_{ls}$$

Считалось, что спин обусловлен вращением электрона вокруг своей оси, что привело к целому ряду противоречий. Сейчас установлено, что спин — неотъемлемое свойство электрона, подобно его заряду и массе.

### Собственный (спиновой) магнитный момент электрона

$$\vec{p}_{ms}$$

$\vec{p}_{ms}$  соответствует спину электрона  $\vec{L}_{ls}$ , он пропорционален  $\vec{L}_{ls}$  и направлен в противоположную сторону.

### Связь между векторами $\vec{p}_{ms}$ и $\vec{L}_{ls}$

$$\vec{p}_{ms} = g_s \vec{L}_{ls}$$

[ $g$  — гиромагнитное отношение спиновых моментов]

### Проекция $\vec{p}_{ms}$ на направление $\vec{B}$

$$p_{msB} = \pm \frac{e\hbar}{2m} = \pm \mu_B$$

Может принимать только одно из записанных значений.  
 $\mu_B$  — магнетон Бора.

### Магнетон Бора

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$$

Единица магнитного момента электрона.

[ $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  — постоянная Планка]

## 3.130 Магнитный момент атомов

Складывается из магнитных моментов входящих в его состав электронов и магнитного момента ядра (обусловлен магнитными моментами входящих в ядро протонов и нейтронов). Однако магнитные моменты ядер в тысячи раз меньше магнитных моментов электронов, поэтому ими пренебрегают.

### Общий магнитный момент атома (молекулы)

$$\vec{p}_a = \sum \vec{p}_m + \sum \vec{p}_{ms}$$

Равен векторной сумме магнитных моментов (орбитальных и спиновых), входящих в атом (молекулу) электронов.

## 3.6.2. ПАРА- И ДИАМАГНЕТИКИ

### 3.131 Парамагнетики

#### Магнетик

Всякое вещество, способное под действием магнитного поля приобретать магнитный момент (намагничиваться).

#### Парамагнетики

Молекулы парамагнетиков обладают магнитным моментом. Однако вследствие теплового движения молекул их магнитные моменты ориентированы беспорядочно. При внесении парамагнетика во внешнее магнитное поле устанавливается *преимущественная* ориентация магнитных моментов атомов *по полю* (полной ориентации препятствует тепловое движение атомов). Таким образом, *парамагнетик* намагничивается, создавая собственное магнитное поле, *совпадающее по направлению с внешним полем и усиливающее его*. Этот эффект называется *парамагнитным*.

**Примеры:** редкоземельные элементы, Pt, Al, ...

## Диамagnetики

Молекулы диамagnetиков не обладают магнитным моментом. Во внешнем магнитном поле индуцируются элементарные круговые токи. Так как этот микроток индуцирован внешним магнитным полем, то, согласно правилу Ленца, у атома появляется составляющая магнитного поля, направленная противоположно внешнему полю. Наведенные составляющие магнитных полей атомов (молекул) складываются и образуют *собственное магнитное поле вещества, ослабляющее внешнее магнитное поле*. Таким образом, *диамagnetик* намагничивается, создавая собственное магнитное поле, *направленное против внешнего поля и ослабляющее его*. Этот эффект называется *диамagnetизмом*.

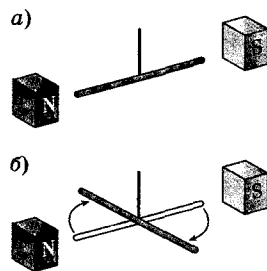
**Примеры:** большинство органических соединений, смолы, углерод, Bi, Ag, Au, Cu, ...

## Общие выводы

Из механизма диамagnetизма следует, что он *свойственен всем веществам*. Если магнитный момент атомов велик, то парамагнитные свойства преобладают над диамagnetическими и вещество является парамагнетиком; если магнитный момент атомов мал, то преобладают диамagnetические свойства и вещество является диамagnetиком.

## Намагничивание парамагнетика и диамagnetика во внешнем магнитном поле

На капроновой нити между полюсами мощного электромагнита подвешен цилиндр один раз из парамагнетика, рисунок *a* (например, Al), другой раз из диамagnetика, рисунок *b* (например, Bi). После включения тока в обмотках электромагнита цилиндр из парамагнетика поворачивается и устанавливается вдоль линий магнитной индукции, а цилиндр из диамagnetика устанавливается перпендикулярно линиям магнитной индукции и притягивается к ближайшему полюсу.



## 3.6.3. НАМАГНИЧЕННОСТЬ. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

### 3.132 Намагниченность

$$\vec{J} = \frac{\vec{p}_m}{V} = \frac{\sum \vec{p}_a}{V}$$

Магнитный момент единицы объема магнетика.

$[\vec{p}_m = \sum \vec{p}_a$  — магнитный момент магнетика при его помещении во внешнее магнитное поле;  $V$  — объем магнетика;  $\vec{p}_a$  — магнитный момент молекулы]

Связь между векторами  $\vec{J}$  и  $\vec{H}$

$$\vec{J} = \chi \vec{H}$$

Эта линейная зависимость между намагниченностью и напряженностью поля, вызывающего намагничивание, соблюдается в случае несильных полей.

Магнитная восприимчивость вещества

$$\chi$$

Безразмерная величина; для диамagnetиков  $\chi < 0$  (поле молекулярных токов противоположно внешнему), для парамагнетиков —  $\chi > 0$  (поле молекулярных токов совпадает с внешним).

для парамагнетиков

$$10^{-6} < \chi < 10^{-2}$$

**Примеры:** O<sub>2</sub> (жидк)  $3,6 \cdot 10^{-3}$  | Al  $2,4 \cdot 10^{-5}$  | O<sub>2</sub> (газ)  $1,5 \cdot 10^{-6}$

для диамagnetиков

$$10^{-9} < \chi < 10^{-4}$$

**Примеры:** N<sub>2</sub> (газ)  $-6,75 \cdot 10^{-9}$  | H<sub>2</sub>O  $-7 \cdot 10^{-6}$  | Cu  $-1 \cdot 10^{-5}$

### 3.133 Магнитное поле в веществе

#### Вектор магнитной индукции результирующего поля в магнетике

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$$

$\vec{B}_0$  — вектор магнитной индукции внешнего поля (поля, создаваемого намагничивающим током в вакууме),  $\vec{B}'$  — вектор магнитной индукции поля намагниченного вещества (поля, создаваемого молекулярными токами).

$[\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$  ( $\vec{H}$  — вектор напряженности, характеризующий магнитное поле макротоков);  $\vec{B}' = \mu_0 \vec{J}$  ( $\vec{J}$  — намагниченность);  $\vec{J} = \chi \vec{H}$  3.132]

#### Магнитное поле в веществе

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi) \vec{H}$$

Получается после подстановки  $\vec{B}_0$ ,  $\vec{B}'$  и  $\vec{J}$  в  $\vec{B}$ .

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

Это выражение постулировалось ранее 3.90.

#### Магнитная проницаемость вещества

$$\mu = 1 + \chi$$

Для парамагнетиков  $\mu > 1$ , но незначительно 3.132.

Для диамагнетиков  $\mu < 1$ , но незначительно 3.132.

### 3.134 Теорема о циркуляции векторов $\vec{B}$ и $\vec{H}$

#### Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$

(закон полного тока для магнитного поля в веществе)

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_i dl = \mu_0(I + I')$$

Циркуляция вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  по произвольному замкнутому контуру  $L$  равна алгебраической сумме токов проводимости и молекулярных токов, охватываемых этим контуром, умноженной на магнитную постоянную.

[ $I$  и  $I'$  — соответственно алгебраические суммы макротоков (токов проводимости) и микротоков (молекулярных токов), охватываемых произвольным замкнутым контуром  $L$ . Таким образом, вектор  $\vec{B}$  характеризует результирующее поле, созданное как макроскопическими токами в проводниках (токами проводимости), так и микроскопическими токами в магнетиках, поэтому линии вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  не имеют источников и являются замкнутыми]

#### Теорема о циркуляции вектора $\vec{J}$

$$\oint_L \vec{J} d\vec{l} = I'$$

Циркуляция вектора намагниченности по произвольному замкнутому контуру  $L$  равна алгебраической сумме молекулярных токов, охватываемых этим контуром.

#### Теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I$$

Циркуляция вектора  $\vec{H}$  по произвольному замкнутому контуру  $L$  равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром.

Чтобы получить  $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I$ , следует подставить  $\oint_L \vec{J} d\vec{l} = I'$  в закон полного

тока  $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = I + I'$ . Имеем  $\oint_L \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = I$ , где выражение  $\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \vec{H}$ .

### 3.6.4. УСЛОВИЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ МАГНЕТИКОВ

#### 3.135 Нормальные составляющие векторов $\vec{B}$ и $\vec{H}$ на границе раздела

Граница раздела двух однородных магнетиков *при отсутствии* на границе тока проводимости.

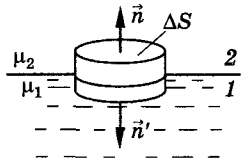
Нормальные составляющие векторов  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$

$$B_{n_1} = B_{n_2}$$

Согласно теореме Гаусса 3.108,

$$B_{n_2} \Delta S - B_{n_1} \Delta S = 0$$

(нормали  $\vec{n}$  и  $\vec{n}'$  к основаниям прямого цилиндра ничтожной высоты с одним основанием в одном магнетике, другим — во втором направлены противоположно), откуда  $B_{n_1} = B_{n_2}$ .



Нормальные составляющие векторов  $\vec{H}_1$  и  $\vec{H}_2$

$$\frac{H_{n_1}}{H_{n_2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Учти, что  $B_{n_1} = \mu_0 \mu_1 H_{n_1}$ ,  $B_{n_2} = \mu_0 \mu_2 H_{n_2}$ .

[ $\mu_0$  — магнитная постоянная;  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — соответственно магнитные проницаемости первого и второго магнетиков]

#### 3.136 Тангенциальные составляющие векторов $\vec{B}$ и $\vec{H}$ на границе раздела

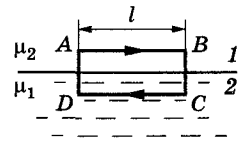
Граница раздела двух однородных магнетиков *при отсутствии* на границе тока проводимости.

Тангенциальные составляющие векторов  $\vec{H}_1$  и  $\vec{H}_2$

$$H_{\tau_1} = H_{\tau_2}$$

Согласно теореме о циркуляции вектора  $\vec{H}$  3.132,

$\oint \vec{H} d\vec{l} = 0$  ( $ABCD$  — небольшой замкнутый контур вблизи границы раздела), поскольку токи на границе раздела отсутствуют.  $H_{\tau_2} l - H_{\tau_1} l = 0$  (знаки интегралов по  $AB$  и  $CD$  разные, так как пути интегрирования противоположны, а интегралы по участкам  $BC$  и  $DA$  ничтожно малы). Поэтому  $H_{\tau_1} = H_{\tau_2}$ .



Тангенциальные составляющие векторов  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$

$$\frac{B_{\tau_1}}{B_{\tau_2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Учти, что  $H_{\tau_1} = \frac{B_{\tau_1}}{\mu_0 \mu_1}$ ,  $H_{\tau_2} = \frac{B_{\tau_2}}{\mu_0 \mu_2}$ .

[ $\mu_0$  — магнитная постоянная;  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — соответственно магнитные проницаемости первого и второго магнетиков]

### 3.6.5. ФЕРРОМАГНЕТИКИ И ИХ СВОЙСТВА

#### 3.137 Ферромагнетики и их описание

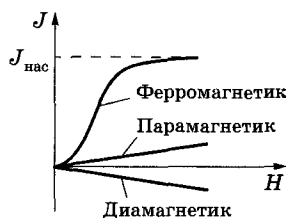
Ферромагнетики

Вещества, обладающие спонтанной намагниченностью, которая подвержена сильному влиянию внешних факторов — изменению температуры, магнитного поля, деформации.

**Примеры:** железо, кобальт, никель, их сплавы, ...

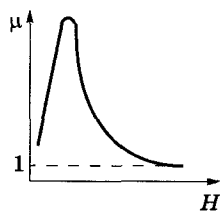
## Зависимость намагниченности от напряженности магнитного поля для слабо- и сильномагнитных веществ

В отличие от диа- и парамагнетиков (*слабомагнитных веществ*), для которых  $J$  от  $H$  линейна, для ферромагнетиков (*сильномагнитных веществ*) эта зависимость сложная: вначале с возрастанием  $H$  намагниченность  $J$  растет сначала быстро, затем медленнее, достигая магнитного насыщения  $J_{\text{нас}}$ .



## Зависимость магнитной проницаемости ферромагнетика от напряженности магнитного поля

Существенная особенность ферромагнетиков — не только большие значения  $\mu$  (например, для железа — 5000, для сплава супермаллоэ — 800 000!), но и зависимость  $\mu$  от  $H$ . Вначале  $\mu$  растет с увеличением  $H$ , затем, достигая максимума, начинает уменьшаться, стремясь в случае сильных полей к 1 ( $\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = 1 + \frac{J}{H}$ , поэтому при  $J = J_{\text{нас}} = \text{const}$  с ростом  $H$  отношение  $\frac{J}{H} \rightarrow 0$ , а  $\mu \rightarrow 1$ ).



## Точка Кюри

Определенная температура для каждого ферромагнетика, при которой он теряет свои магнитные свойства. При нагревании образца выше точки Кюри ферромагнетик превращается в обычный парамагнетик. Переход вещества из ферромагнитного состояния в парамагнитное, происходящий в точке Кюри, не сопровождается поглощением или выделением теплоты, т. е. в точке Кюри происходит фазовый переход II рода [2.107](#).

## Некоторые значения точек Кюри

никель . . . . . 631 К	железо . . . . . 1042 К	кобальт . . . . 1400 К
------------------------	-------------------------	------------------------

## Роль доменов в механизме ферромагнетизма

Спонтанное намагничение находится в кажущемся противоречии с тем, что многие ферромагнитные материалы даже при температурах ниже точки Кюри не намагничены. По современным представлениям, ферромагнетик ниже точки Кюри разбивается на большое число малых макроскопических областей — *доменов*, самопроизвольно намагниченных до насыщения.

При отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты отдельных доменов ориентированы хаотически и компенсируют друг друга, поэтому результирующий магнитный момент ферромагнетика равен нулю и ферромагнетик не намагничен. Внешнее магнитное поле ориентирует по полю магнитные моменты не отдельных атомов, как это имеет место в случае парамагнетиков, а *целых областей спонтанной намагниченности*, причем домены поворачиваются по полю скачком.

## Природа элементарных носителей ферромагнетизма

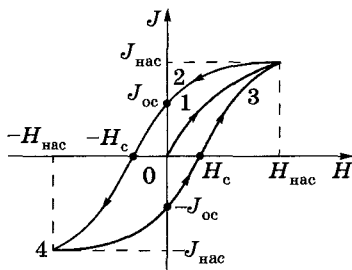
Установлено, что магнитные свойства ферромагнетиков определяются *спиновыми магнитными моментами электронов* (прямым экспериментальным указанием этого служит опыт Эйнштейна и де Гааза [3.129](#)). Установлено также, что ферромагнитными свойствами могут обладать только кристаллические вещества, в атомах которых имеются недостроенные внутренние электронные оболочки с нескомпенсированными

спинами. В подобных кристаллах могут возникать силы, которые вынуждают спиновые магнитные моменты электронов ориентироваться *параллельно друг другу*, что и приводит к возникновению областей спонтанного намагничивания. Эти силы, называемые *обменными силами*, имеют квантовую природу — они обусловлены волновыми свойствами электронов.

### 3.138 Магнитный гистерезис

#### Петля гистерезиса

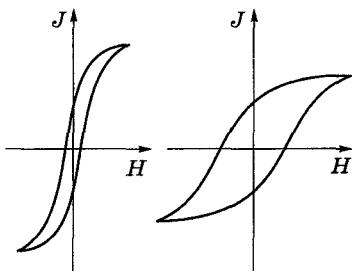
Для ферромагнетика зависимость  $J$  от  $H$  *нелинейная* и зависит от предыстории намагничивания. Если намагнитить ферромагнетик до насыщения (кривая 1), то уменьшение  $J$  с уменьшением  $H$  происходит по кривой 2, а при  $H = 0$  ферромагнетик сохраняет *остаточное намагничение*  $J_{oc}$ . С наличием  $J_{oc}$  связано существование *постоянных магнитов*. Намагничивание обращается в нуль под действием поля  $H_c$ , имеющего направление, противоположное полю, вызвавшему намагничивание. Напряженность  $H_c$  называется *коэрцитивной силой*. При дальнейшем изменении  $H$  намагниченность изменяется в соответствии с замкнутой петлей, называемой *петлей гистерезиса*.



#### Мягкие и жесткие ферромагнетики

Деление — по разным гистерезисным петлям. *Мягкие ферромагнетики* характеризуются малой коэрцитивной силой  $H_c$  (узкой петлей гистерезиса), *жесткие* — большой  $H_c$  (широкой петлей гистерезиса).

Жесткие ферромагнетики (например, углеродистые и вольфрамовые стали) применяются для изготовления постоянных магнитов, а мягкие (например, мягкое железо, сплав железа с никелем) — для изготовления сердечников трансформаторов.



## 3.7. Элементы теории Максвелла для электромагнитного поля

### 3.7.1. ВИХРЕВОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

#### 3.139 Идея Максвелла о возбуждении электрического поля переменным магнитным полем

##### Предыстория идеи Максвелла

Из закона Фарадея [3.113](#)  $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$  следует, что *любое* изменение сцепленного с контуром потока магнитной индукции приводит к возникновению электродвижущей силы индукции и вследствие этого появляется индукционный ток. Следовательно, возникновение ЭДС электромагнитной индукции возможно и в *неподвижном* контуре, находящемся в переменном магнитном поле. Однако ЭДС в любой цепи возникает только тогда, когда в ней на носители тока действуют *сторонние силы* — силы неэлект-



ростатического происхождения **3.58**. Поэтому встает вопрос о природе сторонних сил в данном случае. Опыт показывает, что сторонние силы не связаны ни с тепловыми, ни с химическими процессами в контуре; их возникновение также нельзя объяснить силами Лоренца, так как они на неподвижные заряды не действуют.

### Гипотеза Максвелла

Всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле, которое и является причиной возникновения индукционного тока в контуре.

Согласно представлениям Максвелла, контур, в котором появляется ЭДС, играет второстепенную роль, являясь своего рода лишь «прибором», обнаруживающим это поле.

## 3.140 Циркуляция вектора напряженности вихревого электрического поля

### Циркуляция вектора $\vec{E}_B$

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

По Максвеллу, изменяющееся во времени магнитное поле порождает поле электрическое  $\vec{E}_B$ , циркуляция которого **3.140**

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = \oint_L E_{Bt} dl = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Учитывая, что  $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$  **3.106** и поверхность и контур неподвижны,

можно записать  $\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$ .

[ $E_{Bt}$  — проекция вектора  $\vec{E}_B$  на направление  $d\vec{l}$ ; символ частной производной подчеркивает тот факт, что интеграл  $\int_S \vec{B} d\vec{S}$  является функцией только от времени]

### Сравнение циркуляции векторов $\vec{E}_Q$ и $\vec{E}_B$

$$\oint_L \vec{E}_Q d\vec{l} = 0$$

Между рассматриваемыми полями ( $\vec{E}_B$  и  $\vec{E}_Q$ ) имеется принципиальное различие: циркуляция вектора  $\vec{E}_B$  в отличие от циркуляции вектора  $\vec{E}_Q$  не равна нулю.

**Вывод.** Электрическое поле  $\vec{E}_B$ , возбуждаемое переменным магнитным полем, как и само магнитное поле **3.103**, является вихревым. Электростатическое поле  $\vec{E}_Q$  (его циркуляция равна нулю **3.99**) — потенциальное.

[ $\vec{E}_Q$  — вектор напряженности электростатического поля]

## 3.7.2. ТОК СМЕЩЕНИЯ

### 3.141 Введение понятия тока смещения

#### Идея о симметрии во взаимозависимости электрического и магнитного полей

Согласно Максвеллу, если всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле, то должно существовать и обратное явление: всякое изменение электрического поля должно вызывать появление в окружающем пространстве вихревого магнитного поля.

## Ток смещения

$$I_{\text{см}} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$$

Введен Максвеллом для установления количественных соотношений между изменяющимся электрическим полем и вызываемым им магнитным полем.

По Максвеллу, в цепи переменного тока, содержащей конденсатор, переменное электрическое поле в конденсаторе в каждый момент времени создает такое магнитное поле, как если бы между обкладками конденсатора существовал ток смещения, равный току в подводящих проводах. Тогда можно утверждать, что токи проводимости  $I$  и смещения  $I_{\text{см}}$  равны:  $I_{\text{см}} = I$ . Ток проводимости вблизи обкладок конденсатора

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \sigma dS = \int_S \frac{\partial \sigma}{\partial t} dS = \int_S \frac{\partial D}{\partial t} dS$$

(поверхностная плотность заряда  $\sigma$  на обкладках равна электрическому смещению  $D$  в конденсаторе). Подынтегральное выражение можно рассматривать как частный случай скалярного произведения  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$ , когда

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  и  $d\vec{S}$  взаимно параллельны. Поэтому для общего случая можно записать

$$I = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} = I_{\text{см}}.$$

## 3.142 Плотность тока смещения

### Плотность тока смещения

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Сила тока сквозь произвольную поверхность  $S$  может быть определена как поток вектора плотности тока **3.55**:  $I = \int_S \vec{j} d\vec{S}$ . Тогда **3.141**  $I = I_{\text{см}} = \int_S \vec{j}_{\text{см}} d\vec{S}$ .

Сравнив это выражение с  $I_{\text{см}} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$ , получим  $\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ .

[ $\vec{D}$  — вектор электрического смещения в конденсаторе]

### Плотность тока смещения в диэлектрике

$$\vec{j}_{\text{см}} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Электрическое смещение  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ . Дифференцируя, получим плотность тока смещения в диэлектрике.

### Плотность тока поляризации

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Обусловлена упорядоченным движением электрических зарядов в диэлектрике (смещение зарядов в неполярных молекулах или поворот диполей в полярных молекулах). Возбуждение магнитного поля токами поляризации правомерно, так как токи поляризации по своей природе не отличаются от токов проводимости.

### Плотность тока смещения в вакууме

$$\epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$$

Обусловлена *только* изменением электрического поля во времени, но также возбуждает магнитное поле. Это принципиально новое утверждение Максвелла. Даже в вакууме всякое изменение во времени электрического поля приводит к возникновению в окружающем пространстве магнитного поля.

### 3.143 Замкнутость цепей переменного тока

#### Плотность полного тока

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt}$$

По Максвеллу, полный ток всегда замкнут, т. е. на концах проводника обрывается лишь ток проводимости, а в диэлектрике (вакууме) между концами проводника имеется ток смещения, который замыкает ток проводимости.

$[\vec{j}_{\text{полн}}$  — плотность полного тока;  $\vec{j}$  — плотность тока проводимости;  $\frac{d\vec{D}}{dt}$  — плотность тока смещения]

#### Полный ток

$$I_{\text{полн}} = \int_S \vec{j}_{\text{полн}} d\vec{S}$$

Определяется как поток вектора плотности полного тока.

**Выводы, сделанные Максвеллом.** Введя понятия тока смещения и полного тока, Максвелл по-новому подошел к рассмотрению замкнутости цепей переменного тока. *Полный ток в них всегда замкнут*, т. е. на концах проводника обрывается лишь ток проводимости, а в диэлектрике (вакууме) между концами проводника имеется ток смещения, который замыкает ток проводимости.

Из всех физических свойств, присущих току проводимости, Максвелл приписал току смещения лишь одно — *способность создавать в окружающей среде магнитное поле*.

### 3.144 Обобщенная теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$

#### Теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I \quad \text{3.144}$$

Циркуляция вектора  $\vec{H}$  по произвольному замкнутому контуру  $L$  равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром.

#### Полный ток

$$I_{\text{полн}} = \int_S \vec{j}_{\text{полн}} d\vec{S} \quad \text{3.143}$$

Поверхность  $S$  натянута на замкнутый контур  $L$ .

#### Обобщенная теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) d\vec{S}$$

Максвелл обобщил теорему о циркуляции вектора  $\vec{H}$ , введя в ее правую часть полный ток.

### 3.7.3. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

#### 3.145 Уравнения Максвелла в интегральной форме

##### Полная система уравнений Максвелла в интегральной форме

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}; \quad \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = - \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}; \quad \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

Величины, входящие в уравнения Максвелла, не являются независимыми и связаны так:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \gamma \vec{E}.$$

$[\vec{E}$  — напряженность электрического поля;  $\vec{D}$  — электрическое смещение;  $\vec{B}$  — магнитная индукция;  $\vec{H}$  — напряженность магнит-

ного поля;  $\vec{j}$  — плотность тока проводимости;  $\frac{\partial D}{\partial t}$  — плотность тока смещения;  $\rho$  — объемная плотность заряда;  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  — соответственно электрическая и магнитная постоянные;  $\epsilon$  и  $\mu$  — соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости;  $\gamma$  — удельная проводимость вещества]

### Физический смысл уравнений

Источниками электрического поля могут быть либо электрические заряды, либо изменяющиеся во времени магнитные поля, а магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися электрическими зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями. Уравнения Максвелла не симметричны относительно электрического и магнитного полей. Это связано с тем, что в природе существуют электрические заряды, но нет зарядов магнитных.

## 3.146 Уравнения Максвелла для стационарных полей

### Стационарные поля

$$\vec{E} = \text{const}; \quad \vec{B} = \text{const}$$

### Полная система уравнений Максвелла для стационарных полей

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0; \quad \oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q;$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I; \quad \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

Источниками электрического поля в данном случае являются только электрические заряды, источниками магнитного — только токи проводимости. В этом случае электрические и магнитные поля независимы друг от друга, что и позволяет изучать отдельно *постоянные* электрическое и магнитное поля.

## 3.145 Дифференциальная форма уравнений Максвелла

### Полная система уравнений Максвелла в дифференциальной форме

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \text{div } \vec{D} = \rho$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме характеризуют поле в каждой точке пространства. Физический смысл уравнений Максвелла в дифференциальной форме тот же, что и уравнений Максвелла в интегральной.

### Теоремы векторного анализа, используемые при переходе от интегральной формы уравнений 3.145 к дифференциальной

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S}$$

**Теорема Стокса:** зная ротор вектор  $\vec{A}$  в каждой точке некоторой поверхности  $S$ , можно вычислить циркуляцию этого вектора по контуру  $L$ , ограничивающему  $S$ .

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{A} dV$$

**Теорема Гаусса:** зная дивергенцию вектора  $\vec{A}$  в каждой точке пространства, можно вычислить поток этого вектора через произвольную замкнутую поверхность  $S$  конечных размеров.

## 3.148 Применение уравнений Максвелла и некоторые следствия из них

### Какая из форм уравнений Максвелла — интегральная или дифференциальная — наиболее предпочтительна?

Если заряды и токи распределены в пространстве непрерывно, то обе формы уравнений Максвелла — интегральная и дифференциальная —

эквивалентны. Однако если имеются *поверхности разрыва* — поверхности, на которых свойства среды или полей меняются скачкообразно, то интегральная форма уравнений является более общей.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме предполагают, что все величины в пространстве и времени изменяются непрерывно. Чтобы достичь математической эквивалентности обеих форм уравнений Максвелла, дифференциальную форму дополняют *граничными условиями*, которым должно удовлетворять электромагнитное поле на границе раздела двух сред.

$$D_{n1} = D_{n2}, \quad E_{\tau1} = E_{\tau2} \quad \text{3.39} \quad \text{3.38};$$

$$B_{n1} = B_{n2}, \quad H_{\tau1} = H_{\tau2} \quad \text{3.13} \quad \text{3.13}.$$

(первое и последнее уравнения отвечают случаям, когда на границе раздела нет ни свободных зарядов, ни токов проводимости).

### Некоторые следствия теории Максвелла

Из уравнений Максвелла следует, что переменное магнитное поле всегда связано с порождаемым им электрическим полем, а переменное электрическое поле всегда связано с порождаемым им магнитным, т. е. электрическое и магнитное поля неразрывно связаны друг с другом — они образуют единое *электромагнитное поле*.

Теория Максвелла, являясь обобщением основных законов электрических и магнитных явлений, не только смогла объяснить уже известные экспериментальные факты, что также является важным ее следствием, но и предсказала новые явления. Одним из важных выводов этой теории явилось существование магнитного поля токов смещения **3.14**, что позволило Максвеллу предсказать существование *электромагнитных волн* — переменного электромагнитного поля, распространяющегося в пространстве с конечной скоростью. В дальнейшем было доказано, что скорость распространения свободного электромагнитного поля (не связанного с зарядами и токами) в вакууме равна скорости света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. Этот вывод и теоретическое исследование свойств электромагнитных волн привели Максвелла к созданию электромагнитной теории света, согласно которой свет представляет собой также электромагнитные волны.

## 4. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

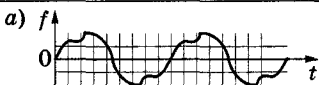

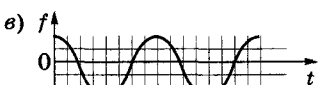
### 4.1. Механические и электромагнитные колебания

#### 4.1.1. КОЛЕБАНИЯ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

##### 4.1 Различные виды колебаний

*Колебания* — движения или процессы, характеризующиеся определенной повторяемостью во времени.

##### Деление колебаний по различным признакам

Признак	Вид колебаний	Пояснение или определение
Характер физических процессов	Механические, электромагнитные, электромеханические и др.	Колебания различной физической природы описываются одинаковыми характеристиками и уравнениями, поэтому к их изучению осуществляется <i>единый подход</i>
Характер зависимости от времени	Периодические (колебания, характеризующиеся такими функциями, что при любом $t$ $f(t + T) = f(t)$ (рисунки а—в). <i>Непериодические</i> (если $f(t + T) \neq f(t)$ ). Гармонические (частный случай периодических колебаний, рисунок в; подробнее 4.7).	[ $T$ — период колебаний (на рисунке он везде одинаков)] а)  б)  в) 
Способ возбуждения	Свободные (или собственные)	Колебания, происходящие за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему
	Вынужденные	Колебания, происходящие при периодическом внешнем воздействии
	Параметрические	Колебания, происходящие при периодическом изменении за счет внешнего воздействия какого-то параметра колебательной системы
	Автоколебания	Незатухающие колебания, возникающие и поддерживаемые в диссипативной системе за счет постоянного внешнего источника энергии, причем свойства этих колебаний определяются самой системой

##### 4.2 Гармонические колебания

Колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется по закону синуса или косинуса (*в пособии используется функция косинуса*).

##### Важность рассмотрения гармонических колебаний

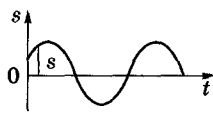
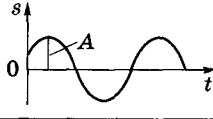
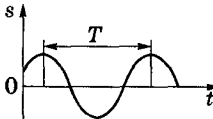
- ◆ Колебания, встречающиеся в природе и технике, близки к гармоническим.
- ◆ Различные *периодические процессы* (процессы, повторяющиеся через равные промежутки времени) можно представить как наложение гармонических колебаний.

##### Уравнение гармонических колебаний

Гармоническое колебание величины  $s$  описывается уравнениями типа  $s = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$  или  $s = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$ .

[ $A$  — амплитуда колебаний;  $\omega_0$  — круговая (циклическая) частота;  $\varphi$  — начальная фаза колебаний;  $(\omega_0 t + \varphi)$  — фаза колебаний в момент времени  $t$ ]

### 4.3 Физические величины, описывающие колебания

Физическая величина	Обозначение	Определение	График или формула
Мгновенное значение величины	$s$	Мгновенное значение величины, колеблющейся по гармоническому закону (например, смещение или заряд на обкладках конденсатора)	
Амплитуда	$A$	Максимальное значение колеблющейся величины. Так как косинус изменяется в пределах от +1 до -1, то $s$ может принимать значения от $+A$ до $-A$	
Круговая (циклическая) частота	$\omega_0$	Число колебаний за $2\pi$ секунд	$\omega_0 = 2\pi\nu$
Фаза колебания	$\omega_0 t + \varphi$	Величина, определяющая значение колеблющейся величины от времени, прошедшего от начала текущего периода колебаний	$s = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ фаза — аргумент косинуса
Начальная фаза колебания	$\varphi$	Величина, определяющая значение колеблющейся величины в начальный момент времени	При $t = 0$ $s = A \cos \varphi$
Период	$T$	Промежуток времени, в течение которого фаза колебания получает приращение $2\pi$ , т. е. $\omega_0(t + T) + \varphi = (\omega_0 t + T) + 2\pi$ , откуда $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , или продолжительность одного полного колебания	
Частота колебания	$\nu$	Число полных колебаний, совершаемых в единицу времени	$\nu = \frac{1}{T}$
Единица частоты	1 герц (Гц)	1 Гц — частота периодического процесса, при котором за 1 с совершается один цикл процесса	

### 4.4 Дифференциальное уравнение гармонических колебаний

Гармоническое колебание величины  $s$

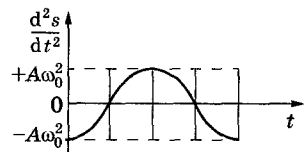
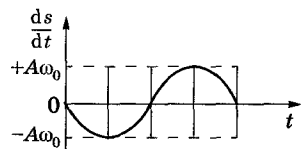
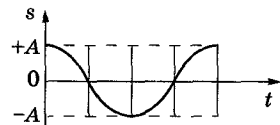
$$s = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Первая производная по времени от гармонически колеблющейся величины  $s$

$$\frac{ds}{dt} = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2)$$

Вторая производная по времени от гармонически колеблющейся величины  $s$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi)$$



Амплитуды величин  $\frac{ds}{dt}$  и  $\frac{d^2s}{dt^2}$  соответственно равны  $A\omega_0$  и  $A\omega_0^2$ . Фаза  $\frac{ds}{dt}$  отличается от фазы  $s$  на  $\pi/2$ , а фаза  $\frac{d^2s}{dt^2}$  отличается от фазы  $s$  на  $\pi$ , т. е.  $\frac{ds}{dt}$  имеет наибольшие значения, когда  $s = 0$ ; когда же  $s$  достигает максимального отрицательного значения,  $\frac{d^2s}{dt^2}$  принимает наибольшее положительное значение.

## Дифференциальное уравнение гармонических колебаний

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0, \text{ или } \ddot{s} + \omega_0^2 s = 0$$

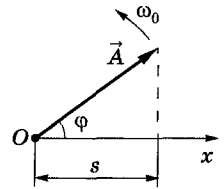
Получается из выражения для  $\frac{d^2s}{dt^2}$ , где  $s = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ .

## 4.1.2. ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

### 4.5 Метод вращающегося вектора амплитуды

#### Идея метода

Из произвольной точки  $O$  на оси  $x$  под углом  $\varphi$  (начальная фаза колебания) откладывается вектор  $\vec{A}$ , модуль которого равен амплитуде рассматриваемого колебания. Приводя вектор  $\vec{A}$  во вращение с угловой скоростью  $\omega_0$ , равной циклической частоте колебания, получаем, что проекция конца вектора будет перемещаться по оси  $x$  и принимать значения от  $-A$  до  $+A$ , а колеблющаяся величина изменяться со временем по закону  $s = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ .



#### Графическое представление гармонического колебания

Представляется проекцией на некоторую произвольно выбранную ось вектора  $\vec{A}$  амплитуды, отложенного из произвольной точки оси под углом  $\varphi$ , равным начальной фазе, и вращающегося с угловой скоростью  $\omega_0$ , равной циклической частоте колебания, вокруг этой точки.

### 4.6 Представление гармонических колебаний в комплексной форме

#### Запись гармонического колебания в комплексной форме

$$x = A e^{i(\omega_0 t + \varphi)}$$

#### Обычная запись гармонического колебания

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

◆ Согласно формуле Эйлера,  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ , поэтому действительная часть комплексной записи (левое уравнение) представляет собой гармоническое колебание (правое уравнение). Следовательно, колеблющаяся величина  $x$  определяется вещественной частью записанного гармонического колебания в комплексной форме.

#### Необходимость использования комплексной записи

Позволяет заменить (например, при сложении, умножении, дифференцировании и т. д.) громоздкие тригонометрические преобразования более простыми действиями над показательными функциями.



### 4.1.3. МЕХАНИЧЕСКИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

#### 4.7 Смещение, скорость и ускорение колеблющейся точки

Материальная точка совершает прямолинейные гармонические колебания вдоль оси координат  $x$  около положения равновесия, принятого за начало координат.

Смещение колеблющейся точки

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

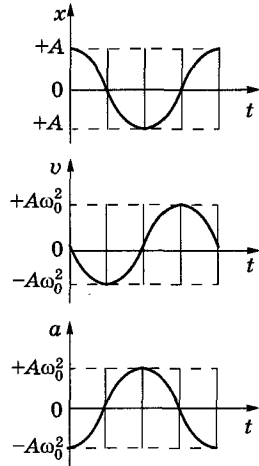
Скорость колеблющейся точки

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2)$$

Ускорение колеблющейся точки

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi)$$

◆ Амплитуды скорости и ускорения соответственно равны  $A\omega_0$  и  $A\omega_0^2$ . Фаза скорости отличается от фазы смещения на  $\pi/2$ , а фаза ускорения на  $\pi$ . В моменты времени, когда  $x = 0$ , скорость  $v$  приобретает наибольшие значения; когда же  $x$  достигает максимального отрицательного значения, то  $a$  приобретает наибольшее положительное значение (см. рисунок).



Сила, действующая на колеблющуюся точку

$$F = ma = -m\omega_0^2 x$$

Пропорциональна смещению материальной точки и направлена в противоположную сторону (к положению равновесия).

[ $A$  — амплитуда колебания;  $\omega_0$  — циклическая частота;  $(\omega_0 t + \varphi)$  — фаза колебания;  $m$  — масса колеблющейся точки]

#### 4.8 Энергия гармонических колебаний

Кинетическая энергия колеблющейся материальной точки

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{4} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{mA^2\omega_0^2}{4} [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]$$

Потенциальная энергия точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы  $F$

$$\begin{aligned} \Pi &= - \int_0^x F dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{4} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \\ &= \frac{mA^2\omega_0^2}{4} [1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)] \end{aligned}$$

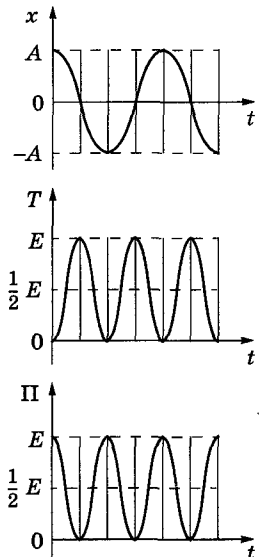
Полная механическая энергия

$$E = T + \Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}$$

$T$  и  $\Pi$  изменяются с частотой  $2\omega_0$ , т. е. с удвоенной частотой гармонического колебания.

$$\langle T \rangle = \langle \Pi \rangle = E/2$$

$$(\text{поскольку } \langle \sin^2 \alpha \rangle = \langle \cos^2 \alpha \rangle = \frac{1}{2}.)$$



## Закон сохранения механической энергии

Полная механическая энергия при гармонических колебаниях сохраняется (поскольку упругая сила консервативна).

## 4.1.4. НЕЗАТУХАЮЩИЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР. МАЯТНИКИ

### 4.9 Гармонический осциллятор

#### Незатухающие колебания

Свободные колебания консервативной системы (системы, в которой механическая энергия сохраняется (очевидно, что это идеализация)), амплитуда которых постоянна.

#### Осциллятор

Система, совершающая свободные колебания.

#### Классический осциллятор

Механическая система, совершающая колебания около положения устойчивого равновесия.

#### Гармонический осциллятор

Классический осциллятор, совершающий свободные гармонические колебания.

#### Дифференциальное уравнение гармонического осциллятора

$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0$ . Решение:  $s = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ .

[ $s$  — колеблющаяся величина;  $A$  — амплитуда колебания;  $\omega_0$  — циклическая частота;  $(\omega_0 t + \varphi)$  — фаза колебания]

**Примеры классических гармонических осцилляторов:** пружинный маятник; математический маятник; физический маятник.

## 4.10 Маятники: пружинный, математический и физический

### Пружинный

Груз массой  $m$ , подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающий гармонические колебания под действием упругой силы,  $F = -kx$ .

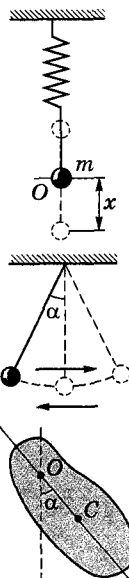
[ $k$  — жесткость пружины]

### Математический

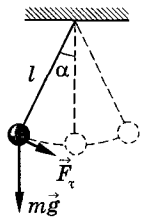
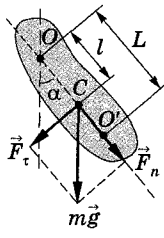
Идеализованная система, состоящая из материальной точки массой  $m$ , подвешенной на нерастяжимой невесомой нити и колеблющейся под действием силы тяжести. (Хорошее приближение математического маятника — небольшой тяжелый шарик, подвешенный на тонкой длинной нити.)

### Физический

Твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку  $O$ , не совпадающую с центром масс  $C$  тела (точка  $O$  — точка подвеса).



## 4.11 Описание колебаний маятников

Система	Закон движения, дифференциальное уравнение	Решение дифференциального уравнения	Циклическая частота, $\omega_0$	Период, $T$
Пружинный маятник	$m\ddot{x} = -kx,$ $\ddot{x} + \frac{k}{m} = 0 \text{ или } \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$	$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$	$\sqrt{k/m}$	$2\pi\sqrt{m/k}$
[ $k$ — жесткость пружины; $m$ — масса колеблющегося груза]				
Математический маятник	$M = J\ddot{\alpha} = F_{\tau}l = -mgl \sin \alpha,$ $J\ddot{\alpha} = -mgl \sin \alpha;$ при малых колебаниях $\sin \alpha \approx \alpha,$ $J\ddot{\alpha} = -mgl\alpha; J = ml^2,$ $\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} = 0 \text{ или } \ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0$	$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$	$\sqrt{g/l}$	$2\pi\sqrt{g/l}$
	[ $M$ — момент возвращающей силы; $J$ — момент инерции маятника; $\alpha$ — угол отклонения маятника из положения равновесия; $F_{\tau} = mgl \sin \alpha$ — возвращающая сила; $l$ — длина маятника; $g$ — ускорение свободного падения; $\alpha_0$ — амплитуда (наибольший угол, на который отклоняется маятник из положения равновесия); $m$ — масса маятника]			
Физический маятник	$M = J\ddot{\alpha} = F_{\tau}l = -mgl \sin \alpha,$ $J\ddot{\alpha} = -mgl \sin \alpha;$ при малых колебаниях $\sin \alpha \approx \alpha,$ $J\ddot{\alpha} = -mgl\alpha,$ $\alpha + \frac{mgl}{J} \alpha = 0 \text{ или } \ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0$	$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$	$\sqrt{\frac{mgl}{J}}$	$2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi\sqrt{L/l}$
	[ $M$ — момент возвращающей силы; $J$ — момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса $O$ ; $F_{\tau} = mgl \sin \alpha$ — возвращающая сила; $\alpha$ — угол отклонения маятника из положения равновесия; $l = OC$ — расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника; $\alpha_0$ — амплитуда (большой угол, на который отклоняется маятник из положения равновесия); $L = \frac{J}{ml}$ — приведенная длина физического маятника; $m$ — масса маятника; $g$ — ускорение свободного падения]			

## 4.12 Приведенная длина физического маятника

### Центр качаний физического маятника

Точка  $O'$  (4.11 физический маятник) на продолжении прямой  $OC$ , отстоящая от оси подвеса на расстоянии приведенной длины  $L$ .

### Приведенная длина физического маятника

$$L = \frac{J}{ml} = \frac{J_c + ml^2}{ml} = l + \frac{J_c}{ml} > l \text{ (применили теорему Штейнера 1.50);}$$

$OO' > OC$ . Точка подвеса  $O$  и центр качаний  $O'$  обладают свойством взаимозаменяемости.

Математический маятник можно представить как частный случай физического маятника, предположив, что его масса сосредоточена в центре масс. Для математического маятника  $J = ml^2$ . Тогда, согласно формуле

$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}}$  4.11, получим  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ . Приведенная длина физического маятника — это длина такого математического маятника, который колеблется с физическим маятником синхронно.

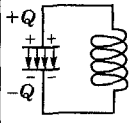
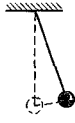
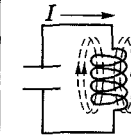

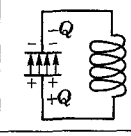
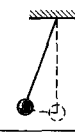
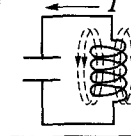

#### 4.1.5. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ИДЕАЛИЗИРОВАННОМ КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

##### 4.13 Колебательный контур

Цепь, состоящая из включенных последовательно катушки индуктивностью  $L$ , конденсатора емкостью  $C$  и резистора сопротивлением  $R$ .

**Предназначение.** Для возбуждения и поддержания электромагнитных колебаний (периодических процессов превращения энергии электрического поля в энергию магнитного поля, и наоборот).

##### 4.14 Электромагнитные колебания в контуре

$t$	Последовательные стадии колебательного процесса в идеализированном контуре ( $R = 0$ )		Аналогия между электромагнитными колебаниями в идеализированном контуре ( $R = 0$ ) и механическими колебаниями	
	процессы в конденсаторе	процессы в катушке		
$t = 0$	Начало разрядки конденсатора	Начинает течь ток	 $W = \frac{Q^2}{2C}$	 $E = \Pi_{\max}$
$t = \frac{1}{4} T$	Конденсатор разряжен	Ток достигает наибольшего значения	 $W = \frac{L\dot{Q}^2}{2}$	 $E = T_{\max}$
$t = \frac{1}{2} T$	Перезарядка конденсатора	Сила тока равна нулю	 $W = \frac{Q^2}{2C}$	 $E = \Pi_{\max}$
$t = \frac{3}{4} T$	Конденсатор вновь разряжен	Ток максимален, но противоположно направлен	 $W = \frac{L\dot{Q}^2}{2}$	 $E = T_{\max}$
$T$	Повторение рассмотренного цикла			

[ $W$  — полная энергия колебательного контура;  $Q$  — заряд на обкладках конденсатора;  $C$  — емкость конденсатора;  $\frac{Q^2}{2C}$  — энергия электрического поля конденсатора;  $I$  — сила тока через катушку;  $L$  — индуктивность катушки;  $\frac{L\dot{Q}^2}{2}$  — энергия магнитного поля катушки;  $T$  — период;  $E$  — полная энергия маятника;  $\Pi_{\max}$  — максимальная потенциальная энергия маятника;  $T_{\max}$  — максимальная кинетическая энергия маятника]

## Закон сохранения энергии

$$W = \frac{Q^2}{2C} + \frac{L\dot{Q}^2}{2} = \text{const}$$

Так как  $R \approx 0$ , то полная энергия сохраняется. Если бы не было потерь, то в контуре совершались бы периодические незатухающие колебания, т. е. периодически изменялись (колебались) заряд  $Q$  на обкладках конденсатора, напряжение  $U$  на конденсаторе и сила тока  $I$ , текущего через катушку индуктивности. Следовательно, в контуре возникают электромагнитные колебания, причем колебания сопровождаются превращениями энергии электрического и магнитного полей.

## 4.15 Уравнение электромагнитных колебаний (идеализированный контур; $R = 0$ )

### Второе правило Кирхгофа 3.70 для контура

$$U_C = \mathcal{E}_s \quad [U_C = \frac{Q}{C} \text{ — напряжение на конденсаторе; } \mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt} \text{ — ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке при протекании в ней переменного тока}]$$

### Дифференциальное уравнение колебаний заряда в контуре

$$\ddot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0$$

Подставили  $U_C$  и  $\mathcal{E}_s$  во второе правило Кирхгофа и учли, что  $I = \dot{Q}$  и  $\frac{dI}{dt} = \ddot{Q}$ .

### Решение дифференциального уравнения

$$Q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Колебания свободные (отсутствуют внешние ЭДС) и гармонические ( $R = 0$ ).

[ $Q_m$  — амплитуда колебаний заряда на обкладках конденсатора]

### Циклическая частота

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Это — циклическая частота свободных незатухающих колебаний.

### Период

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}; T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Формула Томсона.

### Сила тока в колебательном контуре

$$I = \dot{Q} = -\omega_0 Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

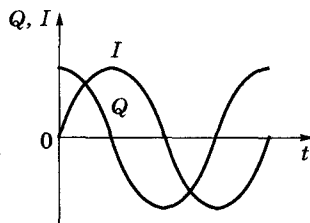
[ $I_m = \omega_0 Q_m$  — амплитуда силы тока]

### Напряжение на конденсаторе

$$U_C = \frac{Q}{C} = \frac{Q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

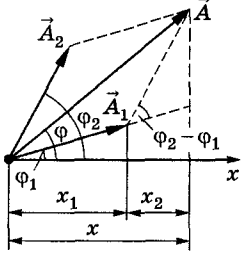
Колебания тока  $I$  опережают по фазе колебания заряда (и колебания напряжения) на  $\frac{\pi}{2}$ , т. е., когда ток достигает максимального значения, заряд, а также напряжение обращаются в нуль, и наоборот.

[ $U_m = \frac{Q_m}{C}$  — амплитуда напряжения]



### 4.1.6. СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ОДНОГО НАПРАВЛЕНИЯ. БИЕНИЯ

#### 4.16 Сложение колебаний одного направления и одинаковой частоты

Сложение колебаний	$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \\ x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \end{cases}$	Для сложения используется метод вращающегося вектора амплитуды <b>4.5</b> 
Уравнение результирующего колебания	$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$	
Амплитуда результирующего колебания	$A_2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$	Векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ вращаются с одинаковой угловой скоростью $\omega_0$ , поэтому разность фаз $\varphi_2 - \varphi_1$ между ними остается постоянной
$\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi$ ( $m = 0, 1, \dots$ )	$A = A_1 + A_2$	Амплитуда результирующего колебания равна сумме амплитуд складываемых колебаний
$\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m + 1)\pi$ ( $m = 0, 1, 2, \dots$ )	$A =  A_1 - A_2 $	Амплитуда результирующего колебания равна разности амплитуд складываемых колебаний
Начальная фаза	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$	

#### 4.17 Биения

**Биения**  
 Периодические изменения амплитуды колебания, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами.

##### Складываемые колебания

$$\begin{cases} x_1 = A \cos \omega t, \\ x_2 = A \cos(\omega + \Delta\omega)t \end{cases} \quad \Delta\omega \ll \omega, \text{ начальные фазы равны нулю.}$$

##### Результирующее колебание

$$x = \left( 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega t \quad \frac{\Delta\omega}{2} \ll \omega.$$

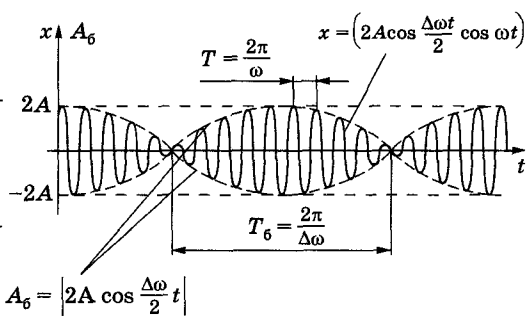
##### Амплитуда биений

$$A_6 = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|$$

##### Период биений

$$T_6 = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

Частота биений равна разности частот складываемых колебаний.



## 4.1.7. СЛОЖЕНИЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ

### 4.18 Эллиптически поляризованные колебания

#### Складываемые колебания

$$\begin{cases} x = A \cos \omega t, \\ y = B \cos (\omega t + \alpha) \end{cases}$$

Складываются гармонические колебания одинаковой частоты  $\omega$ , совершающиеся во взаимно перпендикулярных плоскостях.

[ $A$  и  $B$  — амплитуды складываемых колебаний; начальная фаза первого колебания принята равной нулю;  $\alpha$  — разность фаз складываемых колебаний]

#### Уравнение траектории результирующего колебания

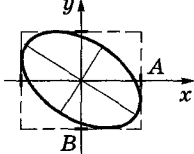
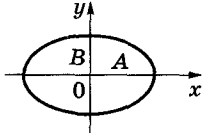
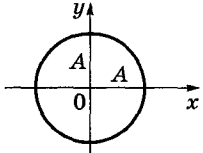
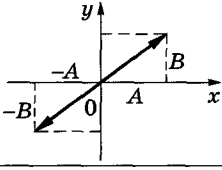
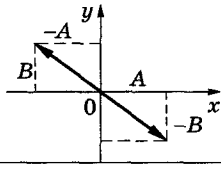
$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \alpha + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \alpha$$

Это — уравнение эллипса, оси которого ориентированы относительно координатных осей произвольно (получается посредством исключения  $t$  из складываемых уравнений).

#### Эллиптически поляризованные колебания

Такие, когда траектория результирующего колебания описывает эллипс.

### 4.19 Анализ эллиптически поляризованных колебаний

Вид колебаний	Уравнение траектории результирующего колебания	Условия получения
Эллиптически поляризованные колебания	$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \alpha + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \alpha$ 	Складываются взаимно перпендикулярные колебания 4.18. Эллипс ориентирован относительно координатных осей произвольно
Эллиптически поляризованные колебания	$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ 	$\alpha = (2m + 1) \frac{\pi}{2}$ ( $m = 0, \pm 1, \dots$ ) Эллипс, оси которого совпадают с осями координат, а полуоси равны соответствующим амплитудам
Циркулярно поляризованные колебания	$x^2 + y^2 = A^2$ 	1) $\alpha = (2m + 1) \frac{\pi}{2}$ ( $m = 0, \pm 1, \dots$ ); 2) $B = A$ . В данном случае эллипс вырождается в окружность
Линейно поляризованные колебания	$y = \frac{B}{A} x$ 	$\alpha = m\pi$ ( $m = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$ ). В данном случае эллипс вырождается в прямую
Линейно поляризованные колебания	$y = -\frac{B}{A} x$ 	$\alpha = m\pi$ ( $m = \pm 1, \pm 3, \dots$ ). В данном случае эллипс вырождается в прямую

## 4.20 Сложение колебаний с разными частотами

### Периодическое результирующее движение

Движение, при котором траектория результирующего движения оказывается замкнутой, что возможно, когда частоты складываемых колебаний относятся друг к другу как целые числа.

### Фигуры Лиссажу

Прочерчиваемые точкой замкнутые траектории, образующиеся при целочисленных отношениях частот складываемых взаимно перпендикулярных колебаний (зависят от частот и разности начальных фаз (см. рисунок)).

	$\alpha = 0$	$\alpha = \pi/4$	$\alpha = \pi/2$	$\alpha = 3\pi/4$	$\alpha = \pi$
1 : 1					
1 : 2					
2 : 1					
1 : 3					
2 : 3					

## 4.1.8. СВОБОДНЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ И ИХ АНАЛИЗ

### 4.21 Свободные затухающие колебания линейной системы

#### Свободные затухающие колебания

Свободные колебания, амплитуда которых из-за потерь энергии *реальной* колебательной системой с течением времени уменьшается.

#### Механизм затухания колебаний

Превращение в теплоту из-за трения в механических колебательных системах, омические потери и излучение электромагнитной энергии в электрических колебательных системах. Закон затухания определяется свойствами колебательных систем.



*Идеализованные* реальные системы, в которых параметры, определяющие физические свойства системы, в ходе процесса не изменяются.

**Примеры линейных систем:** пружинный маятник при малых растяжениях пружины (когда справедлив закон Гука); колебательный контур, индуктивность, емкость и сопротивление которого не зависят ни от тока в контуре, ни от напряжения.

### 4.22 Описание свободных затухающих колебаний пружинного маятника

Сила трения	$F_{\text{тр}} = -rv = -r\dot{x}$	Сила трения для пружинного маятника <b>4.22</b> , совершающего малые колебания, пропорциональна скорости. Знак минус указывает на противоположные направления силы трения и скорости
Закон движения маятника	$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$	[ $k$ — жесткость пружины; $m$ — масса маятника; $r$ — коэффициент сопротивления]
Дифференциальное уравнение затухающих колебаний	$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{r}{m}x = 0,$ $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$	Учти, что собственная частота $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и коэффициент затухания $\delta = \frac{r}{2m}$
Решение дифференциального уравнения	$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$	 <p>[<math>A_0</math> — начальная амплитуда; <math>\omega_0</math> — собственная частота колебательной системы (при <math>\delta = 0</math>)]</p>
Амплитуда затухающих колебаний	$A = A_0 e^{-\delta t}$	
Циклическая частота	$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$	
Период затухающих колебаний	$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$	Колебание $x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$ не является периодическим, а тем более гармоническим. Однако в случае малого затухания ( $\delta \ll \omega_0$ ) условно используют понятие периода затухающих колебаний (промежутка времени между двумя последовательными максимумами (или минимумами))

### 4.23 Описание свободных затухающих колебаний в колебательном контуре

**Закон Ома для контура RLC**

$$IR + U_C = \mathcal{E}_s,$$

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = 0$$

[ $IR$  — напряжение на резисторе;  $U_C = Q/C$  — напряжение на конденсаторе;  $\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}$  — ЭДС самоиндукции при протекании в ней переменного тока]

## Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний заряда в контуре

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0$$

Учти, что  $I = \dot{Q}$  и  $\frac{dI}{dt} = \ddot{Q}$ . Собственная частота колебательно-

$$\ddot{Q} + 2\delta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0$$

го контура  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  и коэффициент затухания  $\delta = \frac{R}{2L}$ .

## Решение дифференциального уравнения

$$Q = Q_m e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

### Амплитуда затухающих колебаний

$$Q' = Q_m e^{-\delta t}$$

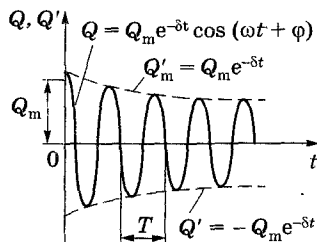
### Циклическая частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

### Период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

Колебание  $Q = Q_m e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$  не гармоническое. В случае малого затухания ( $\delta \ll \omega_0$ ) условно используют понятие периода затухающих колебаний (промежуток времени между двумя последовательными максимумами (или минимумами)).



## 4.24 Характеристики колебательных систем

### Декремент затухания

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta T}$$

$A(t)$  и  $A(t+T)$  — амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающимся на период.

### Время релаксации

$$\tau = \frac{1}{\delta}$$

Промежуток времени, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в  $e$  раз.

### Логарифмический декремент затухания

$$\Theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}$$

[ $\tau$  — время релаксации;  $N_e$  — число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в  $e$  раз]

### Добротность колебательной системы

#### Общая формула

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} = \pi N_e = \frac{\pi}{\delta T_0} = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

#### Добротность пружинного маятника

$$Q = \frac{\sqrt{mk}}{r}$$

#### Добротность колебательного контура

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Так как затухание мало ( $\delta^2 \ll \omega_0^2$ ), то  $T$  принято равным  $T_0$ .

Учти, что  $\delta = \frac{r}{2m}$  и  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

Учти, что  $\delta = \frac{R}{2L}$  и  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

## 4.25 Сопоставление

### механических и электромагнитных затухающих колебаний

Механические колебания		Электромагнитные колебания	
Дифференциальное уравнение	$\ddot{x} + \frac{r}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0,$ $\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$	Дифференциальное уравнение	$\ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0,$ $\ddot{Q} + 2\delta \dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0$
Масса	$m$	Индуктивность катушки	$L$
Коэффициент сопротивления	$r$	Сопротивление	$R$
Коэффициент жесткости	$k$	Обратная величина емкости	$\frac{1}{C}$
Смещение	$x$	Заряд	$Q$
Скорость	$v$	Сила тока	$I$
Потенциальная энергия	$\frac{kx^2}{2}$	Энергия электрического поля конденсатора	$\frac{Q^2}{2C}$
Кинетическая энергия	$\frac{mv^2}{2}$	Энергия магнитного поля катушки	$\frac{LI^2}{2}$
Собственная частота пружинного маятника	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	Собственная частота колебательного контура	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Циклическая частота затухающих колебаний	$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}$	Циклическая частота затухающих колебаний	$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$
Коэффициент затухания	$\delta = \frac{r}{2m}$	Коэффициент затухания	$\delta = \frac{R}{2L}$
Добротность пружинного маятника	$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\sqrt{mk}}{r}$	Добротность колебательного контура	$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

#### 4.1.9. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ИХ АНАЛИЗ

### 4.26 Вынужденные механические колебания

Вынужденные механические колебания — незатухающие колебания, возникающие под действием внешней периодически изменяющейся силы  $F = F_0 \cos \omega t$  ( $F_0$  — амплитудное значение вынуждающей силы,  $\omega$  — частота вынуждающей силы).

**Закон движения пружинного маятника**

$$m \ddot{x} = -kx - r \dot{x} + F_0 \cos \omega t$$

[ $-kx$  — сила упругости;  $-r\dot{x}$  — сила трения;  $F_0 \cos \omega t$  — вынуждающая сила]

## Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

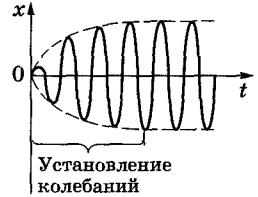
$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

Учти, что собственная частота  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  и коэффициент затухания  $\delta = \frac{r}{2m}$ .

## Решение дифференциального уравнения

$$x = A\cos(\omega t - \varphi) \quad \left[ A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}, \varphi = \arctg \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right]$$



Это — частное решение неоднородного уравнения, описывающее уже установившиеся колебания.

◆ Решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний вообще равно сумме общего решения однородного уравнения ( $x_1 = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ ), но оно играет существенную роль только в начальной стадии процесса (при установлении колебаний) и рассмотренного выше частного решения неоднородного уравнения при установившихся колебаниях.

## 4.27 Амплитудные резонансные кривые

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты  $\omega$  вынуждающей силы **4.26**

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \quad \left[ \delta = \frac{r}{2m}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \right]$$

Резонансная частота  $\omega_{\text{рез}}$

Частота, при которой амплитуда смещения достигает максимума.

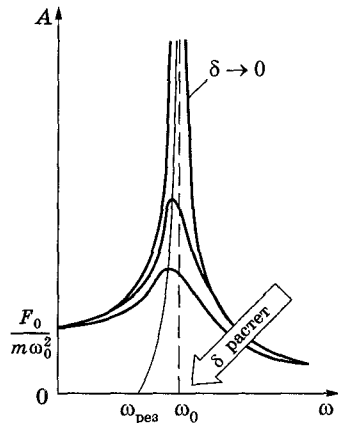
Условие, определяющее  $\omega_{\text{рез}}$

$$\frac{d}{d\omega} [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2] = 0,$$

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\delta^2\omega = 0,$$

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

Продифференцировали подкоренное выражение для  $A$  по  $\omega$  и приравняли его нулю.



Резонансная амплитуда

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2\delta m \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

Подставили в формулу для  $A$  резонансную частоту.

[ $F_0$  — амплитудное значение вынуждающей силы;  $m$  — масса пружинного маятника;  $\delta$  — коэффициент затухания;  $\omega_0$  — собственная частота колебаний пружинного маятника;  $\omega$  — частота вынуждающей силы]

Механический резонанс

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к частоте, равной или близкой собственной частоте колебательной системы.

Амплитудные резонансные кривые

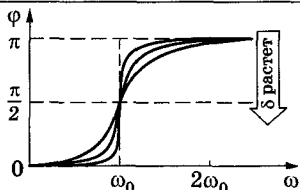
Зависимости амплитуды  $A$  вынужденных колебаний от частоты  $\omega$  при различных  $\delta$  (см. рисунок).

При  $\omega \rightarrow 0$  все кривые достигают одного и того же, *отличного от нуля*, предельного значения  $\frac{F_0}{m\omega_0^2}$ , называемого *статическим отклонением* (см. рисунок). При  $\omega \rightarrow \infty$  все кривые асимптотически стремятся к нулю. Чем больше коэффициент затухания, тем ниже и левее максимумы резонансных кривых.

## 4.28 Фазовые резонансные кривые

Зависимость сдвига фаз между смещением и вынуждающей силой от частоты  $\omega$  **25**

$$\varphi = \arctg \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \left[ \delta = \frac{r}{2m}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \right]$$



### Фазовые резонансные кривые

Зависимости  $\varphi$  от частоты  $\omega$  вынуждающей силы при различных  $\delta$ .

◆ При  $\omega = 0$   $\varphi = 0$ , а при  $\omega = \omega_0$  независимо от значения коэффициента затухания  $\varphi = \pi/2$ , т. е. сила опережает по фазе колебания на  $\pi/2$ . При дальнейшем увеличении  $\omega$  сдвиг фаз возрастает и при  $\omega \gg \omega_0$   $\varphi \rightarrow \pi$ , т. е. фаза колебаний противоположна фазе вынуждающей силы.

## 4.29 Вынужденные электромагнитные колебания

*Вынужденные электромагнитные колебания* — незатухающие колебания под действием внешней периодически изменяющейся по гармоническому закону ЭДС  $\xi = \xi_m \cos \omega t$  ( $\xi_m$  — амплитудное значение ЭДС,  $\omega$  — частота внешней ЭДС).

Закон Ома для контура *RLC* с учетом  $\xi$

$$IR + U_C = \xi_s + \xi$$

[ $IR$  — напряжение на резисторе;  $U_C = \frac{Q}{C}$  — напряжение на конденсаторе;  $\xi_s = -L \frac{dI}{dt}$  — ЭДС самоиндукции,  $\xi = \xi_m \cos \omega t$ ]

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = \xi_m \cos \omega t$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I + \frac{Q}{LC} = \frac{\xi_m}{L} \cos \omega t,$$

Учти, что  $I = \dot{Q}$ ,  $\frac{dI}{dt} = \ddot{Q}$ ;  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ;  $\delta = \frac{R}{2L}$ .

$$\ddot{Q} + 2\delta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = \frac{\xi_m}{L} \cos \omega t$$

Частное решение дифференциального уравнения, отвечающее установившимся вынужденным колебаниям заряда на обкладках конденсатора

$$Q = Q_m \cos(\omega t - \alpha)$$

$$Q_m = \frac{\xi_m/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} = \frac{\xi_m}{\omega \cdot \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}.$$

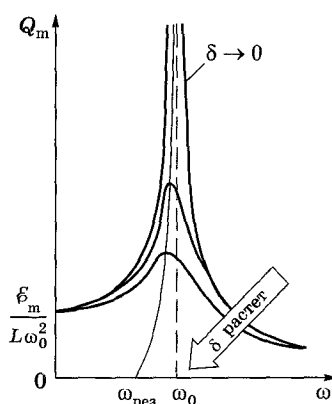
[ $Q_m$  — амплитуда заряда на конденсаторе;  $\alpha$  — сдвиг по фазе между колебаниями *заряда* и внешней ЭДС]

## 4.30 Электрический резонанс

Зависимость амплитуды колебаний заряда на конденсаторе от частоты  $\omega$  внешней ЭДС

$$Q_m = \frac{\mathcal{E}_m/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

$$\left[ \delta = \frac{R}{2L}, \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \right]$$



**Резонансная частота**

Частота, при которой амплитуда достигает максимального значения.

**Резонансная частота для заряда**

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \leq \omega_0$$

**Электрический резонанс**

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты внешней ЭДС к частоте, равной или близкой собственной частоте колебательного контура.

**Резонансные кривые для амплитуды заряда**

Зависимости амплитуды  $Q_m$  заряда на конденсаторе от частоты  $\omega$  внешней ЭДС при различных  $\delta$  (см. рисунок).

При  $\omega \rightarrow 0$  все кривые достигают *статического отклонения*  $\mathcal{E}_m/(L\omega_0^2)$ , а при  $\omega \rightarrow \infty$  — асимптотически стремятся к нулю. Чем больше  $\delta$ , тем ниже и левее максимумы резонансных кривых.

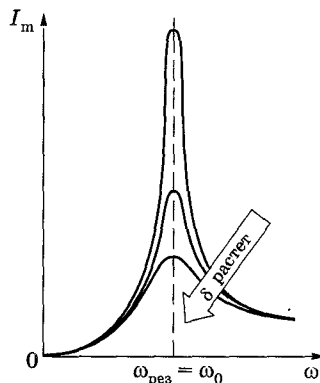
**Сила тока при установившихся вынужденных колебаниях**

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega Q_m \sin(\omega t - \alpha) = I_m \cos(\omega t - \alpha + \pi/2),$$

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi)$$

$$[I_m = \omega Q_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \text{ — амплитуда}$$

тока;  $\varphi = \alpha - \pi/2$  — сдвиг по фазе между *током* и внешней ЭДС. Значение  $Q_m$  в 4.29]



**Резонансная частота для силы тока**

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

Амплитуда силы тока максимальна при  $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ .

**Резонансные кривые для амплитуды силы тока**

Зависимости амплитуды  $I_m$  силы тока в контуре от частоты  $\omega$  внешней ЭДС при различных  $\delta$  (см. рисунок).

Амплитуда тока максимальна при  $\omega_{\text{рез}} = \omega_0$  и равна  $\mathcal{E}_m/R$ . Чем больше коэффициент затухания  $\delta$ , тем ниже максимум резонансной кривой.

## 4.1.10. ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК

### 4.31 Цепь переменного тока

#### Переменный ток

Электрический ток, величина и направление которого изменяются во времени. Установившиеся вынужденные электромагнитные колебания можно рассматривать как протекание переменного тока в цепи, содержащей резистор, катушку индуктивности и конденсатор.

#### Цепь переменного тока

Цепь, содержащая резистор, катушку индуктивности и конденсатор, к которой приложено переменное напряжение

$$U = U_m \cos \omega t.$$

[ $U_m$  — амплитудное значение напряжения]

#### Квазистационарность переменного тока

Для переменного тока мгновенные значения силы тока во всех сечениях цепи практически одинаковы, так как их изменения происходят достаточно медленно, а электромагнитные возмущения распространяются по цепи со скоростью, равной скорости света.

◆ Для мгновенных значений квазистационарных токов выполняются закон Ома и вытекающие из него правила Кирхгофа, которые будут использованы применительно к переменному току (эти законы уже использовались при рассмотрении электромагнитных колебаний).

### 4.32 Резистор с сопротивлением $R$ в цепи переменного тока

Напряжение, приложенное к концам участка цепи (рисунок *a*)

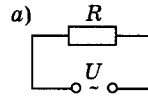
$$U = U_m \cos \omega t$$

Ток через резистор

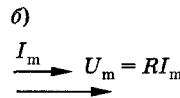
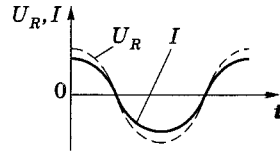
$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_m}{R} \cos \omega t = I_m \cos \omega t$$

Амплитуда силы тока

$$I_m = \frac{U_m}{R}$$



Графики напряжения и тока в цепи, содержащей только резистор



На рисунке *б* дана векторная диаграмма амплитудных значений силы тока  $I_m$  и напряжения  $U_m$  на резисторе (сдвиг фаз между  $I_m$  и  $U_m$  равен нулю).

### 4.33 Конденсатор с емкостью $C$ в цепи переменного тока

Напряжение, приложенное к концам участка цепи (рисунок *a*)

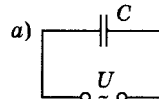
$$U = U_m \cos \omega t$$

Падение напряжения на конденсаторе

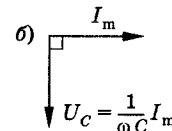
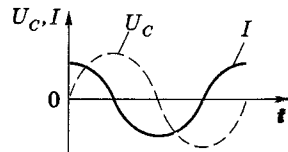
$$U_C = \frac{Q}{C} = U_m \cos \omega t$$

Сила тока

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega C U_m \sin \omega t = I_m \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$



Графики напряжения и тока в цепи, содержащей только конденсатор



**Амплитудное значение силы тока**

$$I_m = \omega C U_m = \frac{U_m}{1/\omega C}$$

$R_C = \frac{1}{\omega C}$  — реактивное емкостное сопротивление.

**Падение напряжения на конденсаторе**

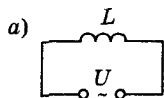
$$U_C = \frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t$$

Падение напряжения  $U_C$  отстает по фазе от тока  $I$  на  $\pi/2$ , что и показано на векторной диаграмме (рисунок б) и на графиках.

**4.34 Катушка с индуктивностью  $L$  в цепи переменного тока**

Напряжение, приложенное к концам участка цепи (рис. а)

$$U = U_m \cos \omega t$$



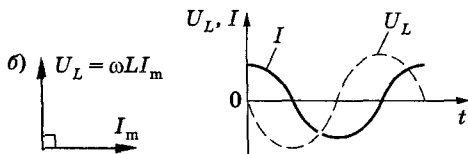
Графики напряжения и тока в цепи, содержащей только катушку

Закон Ома для рассматриваемого участка цепи

$$U = -\mathcal{E}_s,$$

$$U_m \cos \omega t - L \frac{dI}{dt} = 0,$$

$$L \frac{dI}{dt} = U_m \cos \omega t \quad (*)$$



**Падение напряжения на катушке**

$$U_L = L \frac{dI}{dt}$$

Поскольку внешнее напряжение приложено к катушке индуктивности.

**Сила тока**

$$I = \frac{U_m}{\omega L} \sin \omega t = \frac{U_m}{\omega L} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) = I_m \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

После интегрирования выражения  $dI = \frac{U_m}{L} \cos \omega t dt$ , получаемого из формулы (\*).

**Амплитудное значение силы тока**

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}$$

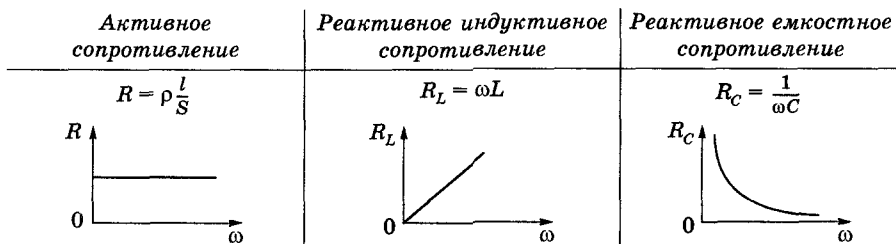
$R_L = \omega L$  — реактивное индуктивное сопротивление.

**Падение напряжения на катушке индуктивности**

$$U_L = \omega L I_m \cos \omega t$$

Падение напряжения  $U_L$  опережает по фазе ток  $I$ , текущий через катушку, на  $\pi/2$ , что и показано на векторной диаграмме (рисунок б) и на графиках.

**4.35 Зависимость сопротивлений в цепи переменного тока от частоты**



[ $\rho$  — удельное сопротивление проводника;  $l$  — его длина;  $S$  — площадь поперечного сечения;  $L$  — индуктивность катушки;  $C$  — емкость конденсатора]



## 4.36 Последовательное RLC-соединение

Напряженне, приложенное к концам участка цепи (рисунок а)

$$U = U_m \cos \omega t$$

Сумма мгновенных значений падений напряжений на элементах цепи

$$U_R + U_L + U_C = U$$

[ $U_R$ ,  $U_L$  и  $U_C$  — соответствующие падения напряжений на сопротивлении, катушке индуктивности и конденсаторе]

Амплитуда  $U_m$  приложенного напряжения

Равна векторной сумме амплитуд всех падений напряжения в цепи (рисунок б).

Разность фаз между напряжением и силой тока

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (*)$$

(см. рисунок б)

Амплитудное значение силы тока

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

(см. рисунок б):

$$(RI_m)^2 + \left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)I_m\right]^2 = U_m^2.$$

Сила тока в цепи

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi)$$

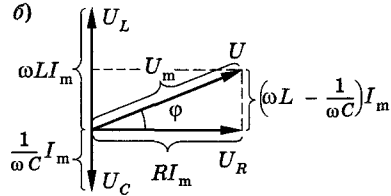
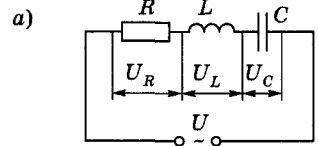
Сдвиг по фазе  $\varphi$  между током  $I$  и приложенным напряжением  $U$  определяется формулой (\*).

Полное сопротивление цепи

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}$$

Реактивное сопротивление

$$X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$



[ $R$  — активное сопротивление;  $R_L$  — реактивное индуктивное сопротивление;  $R_C$  — реактивное емкостное сопротивление **4.34**]

### 4.1.11. РЕЗОНАНС НАПРЯЖЕНИЙ И ТОКОВ

## 4.37 Резонанс напряжений (последовательный резонанс)

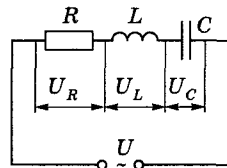
Цепь для наблюдения резонанса напряжений

Последовательное RLC-соединение (см. рисунок).

Условие наблюдения резонанса

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} : \begin{cases} \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = 0, \\ Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = R \end{cases}$$

**4.36**



## Следствия данного условия

Сдвиг фаз между током и напряжением обращается в нуль: *изменения тока и напряжения происходят синфазно*. Полное сопротивление равно активному сопротивлению, т. е. ток в цепи определяется только активным сопротивлением, принимая максимальные (возможные при данном  $U_m$ ) значения.

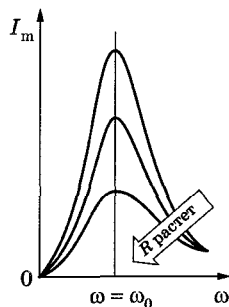
## Резонансная частота

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

## Резонанс напряжений (последовательный резонанс)

Явление резкого возрастания амплитуды силы тока в контуре при совпадении циклической частоты  $\omega$  внешнего переменного напряжения с собственной частотой  $\omega_0$  колебательного контура.

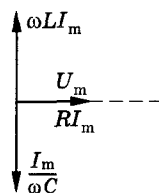
Отчетливо резонанс проявляется при малом активном сопротивлении.



## Векторная диаграмма для резонанса напряжений

$$(U_L)_{\text{рез}} = (U_C)_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_m$$

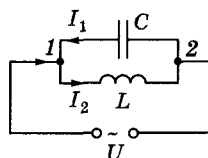
Падение напряжения на активном сопротивлении  $U_R$  равно внешнему напряжению  $U$ , а падения напряжений на конденсаторе ( $U_C$ ) и катушке индуктивности ( $U_L$ ) одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе.



## 4.38 Резонанс токов (параллельный резонанс)

### Цепь для наблюдения резонанса токов

Цепь переменного тока содержит параллельно включенные конденсатор емкостью  $C$  и катушку индуктивностью  $L$ . Приложенное к цепи напряжение  $U = U_m \cos \omega t$ . Активным сопротивлением обеих ветвей пренебрегаем.



Ветвь 1C2	Ветвь 1L2
$I_1 = I_{m_1} \cos(\omega t - \varphi_1),$ $I_{m_1} = \frac{U_m}{1/\omega C}.$ <p>(Учли, что <math>R = 0</math> и <math>L = 0</math>).</p> $\text{tg } \varphi_1 = -\infty,$ $\varphi_1 = \left(2n + \frac{3}{2}\right)\pi, \text{ где } n = 1, 2, \dots$	$I_2 = I_{m_2} \cos(\omega t - \varphi_2),$ $I_{m_2} = \frac{U_m}{\omega L}.$ <p>(Учли, что <math>R = 0</math> и <math>C = \infty</math>).</p> $\text{tg } \varphi_2 = +\infty,$ $\varphi_2 = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi, \text{ где } n = 1, 2, \dots$

Разность фаз токов в ветвях:  $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$ , т. е. токи в ветвях противоположны по фазе. Амплитуда силы тока во внешней (неразветвленной) цепи

$$I_m = |I_{m_1} - I_{m_2}| = U_m \left| \omega C - \frac{1}{\omega L} \right|.$$

Если  $\omega = \omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , то  $I_{m_1} = I_{m_2}$  и  $I_m = 0$ .

Явление резкого уменьшения амплитуды силы тока во внешней цепи, питающей параллельно включенные конденсатор и катушку индуктивности, при приближении частоты  $\omega$  приложенного напряжения к резонансной частоте  $\omega_{рез}$ .

Амплитуда силы тока  $I_m$  оказалась равна нулю потому, что активным сопротивлением контура пренебрегли. Если учесть сопротивление  $R$ , то разность фаз  $\varphi_1 - \varphi_2$  не будет равна  $\pi$ , поэтому при резонансе токов амплитуда силы тока  $I_m$  будет отлична от нуля, но примет наименьшее возможное значение.

#### 4.1.12. МОЩНОСТЬ В ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

### 4.39 Мгновенная и средняя мощность

#### Мгновенное значение мощности

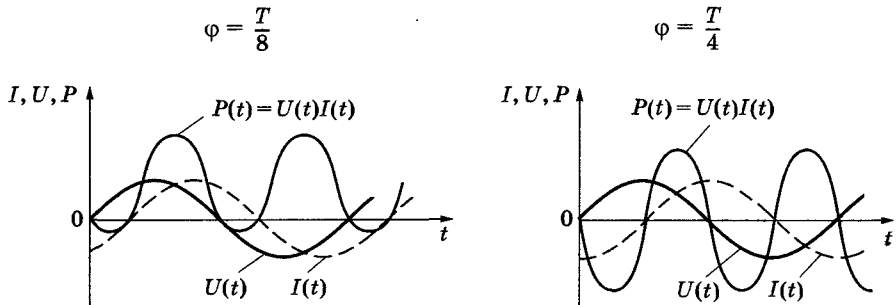
$$P(t) = U(t)I(t)$$

Определяется произведением мгновенных значений напряжения и силы тока.

$$P(t) = I_m U_m \cos(\omega t - \varphi) \cos \omega t = I_m U_m (\cos^2 \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \cos \omega t \sin \varphi)$$

$$U = U_m \cos \omega t; \quad I = I_m \cos(\omega t - \varphi)$$

#### Сила тока, напряжение и мгновенная мощность



#### Средняя мощность

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi$$

Так как  $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$ , то  $\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$ .

$U_m \cos \varphi = RI_m$  (векторная диаграмма, 4.34).

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} RI_m^2$$

Такую же мощность развивает постоянный ток  $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ .

Практический интерес представляет именно средняя мощность за период колебания. Записанную формулу можно получить и так:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_m I_m \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi) dt = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi$$

## 4.40 Действующие значения тока и напряжения. Коэффициент мощности

### Действующее (эффективное) значение тока

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Среднее квадратичное значение силы тока за период  $T$  его изменения:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t - \varphi) dt}.$$

### Действующее (эффективное) значение напряжения

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

Среднее квадратичное значение напряжения за период  $T$  его изменения:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U_m^2 \cos^2(\omega t - \varphi) dt}.$$

Амперметры и вольтметры градуируются по действующим значениям тока и напряжения.

[ $I_m$  и  $U_m$  — амплитудные значения силы тока и напряжения]

### Средняя мощность

$$\langle P \rangle = IU \cos \varphi$$

Учли действующие значения тока и напряжения.

### Коэффициент мощности

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left[ \omega L - \frac{1}{\omega C} \right]^2}}$$

См. векторную диаграмму 4.36.

Мощность, выделяемая в цепи переменного тока, в общем случае зависит не только от силы тока и напряжения, но и от сдвига фаз между ними. Если в цепи реактивное сопротивление отсутствует, то  $\cos \varphi = 1$  и  $P = IU$ . Если цепь содержит только реактивное сопротивление ( $R = 0$ ), то  $\cos \varphi = 0$  и средняя мощность равна нулю, какими бы большими ни были ток и напряжение.

## 4.2. Упругие волны

### 4.2.1. ВОЛНЫ, ИХ ОСНОВНЫЕ ТИПЫ И ХАРАКТЕРИСТИКИ

#### 4.41 Волновой процесс (волна)

##### Сплошная среда

Среда, непрерывно распределенная в пространстве и обладающая упругими свойствами.

##### Волновой процесс (волна)

Процесс распространения колебаний в сплошной среде. При распространении волны *частицы среды колеблются около своих равновесных положений*.

##### Основное свойство всех волн

Вместе с волной от частицы к частице среды передается состояние колебательного движения и его энергия. Поэтому основное свойство всех волн, независимо от их природы, — перенос энергии без переноса вещества.

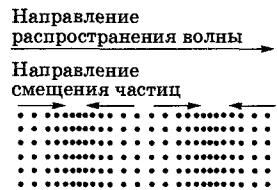
## 4.42 Основные типы волн

Признак	Типы волн	Пояснение или определение
По физической природе	Механические	Частные случаи — упругие волны, в том числе звуковые и сейсмические. <i>Упругие волны</i> — механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде
	Волны на поверхности жидкости	
	Электромагнитные	Частные случаи — радиоволны, свет, рентгеновское излучение и др.
По ориентации возмущений относительно направления распространения волны	Продольные	4.43
	Поперечные	4.43
По характеру распространения	Линейные, или одномерные	Волны, распространяющиеся вдоль прямой линии (например, поперечные волны в натянутой струне или продольные волны в трубе, заполненной газом)
	Поверхностные, или двумерные	Волны, распространяющиеся на границе раздела двух сред (например, волны на воде)
	Пространственные, или трехмерные	Волны, распространяющиеся во всех направлениях (например, волны, возбуждаемые землетрясением в толще Земли)
По форме волновых поверхностей	Плоские	4.44
	Сферические	4.44

## 4.43 Продольные и поперечные волны

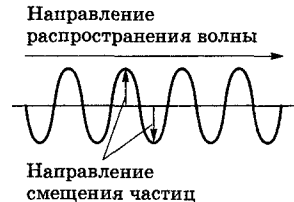
### Продольные волны

Волны, в которых частицы среды колеблются в направлении распространения волны. Продольные волны могут распространяться в среде, где возникают упругие силы при *деформациях сжатия и растяжения*, т. е. в твердых телах, жидкостях и газах.



### Поперечные волны

Волны, в которых частицы среды колеблются в направлениях, перпендикулярных направлению распространения волны. Поперечные упругие волны могут распространяться в среде, где возникают упругие силы при *деформации сдвига*, т. е. в твердых телах.



## 4.44 Плоские и сферические волны

### Однородная среда

Среда, физические свойства которой не изменяются от точки к точке среды.

### Изотропная среда

Среда, физические свойства которой (например, скорость распространения данной волны) одинаковы во всех направлениях.

## Волновой фронт

Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени  $t$ .

◆ Форма фронта волны определяется конфигурацией источника и свойствами среды.

## Волновая поверхность

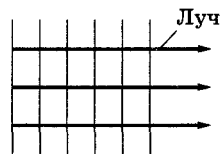
Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе.

◆ В случае *однородной* и *изотропной* среды волновой фронт является одной из волновых поверхностей.

## Луч

Линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением распространения волны.

В случае *однородной* и *изотропной* среды луч — прямая, перпендикулярная волновой поверхности и совпадающая с направлением переноса энергии волной.



## Плоские волны

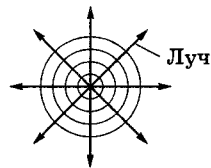
Волны, для которых волновые поверхности — совокупность параллельных плоскостей, перпендикулярных направлению распространения волны.

Лучи в данном случае — параллельные прямые, совпадающие с направлением скорости распространения волны.

## Сферические волны

Волны, для которых волновые поверхности — совокупность концентрических сфер.

Лучи в данном случае направлены вдоль радиусов сфер от центра, где расположен источник волны.



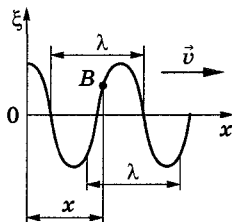
## 4.45 Гармоническая волна и ее описание

### Гармоническая волна

Упругая волна называется *гармонической*, если соответствующие ей колебания частиц среды являются гармоническими.

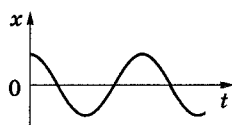
### График гармонической поперечной волны, распространяющейся со скоростью $v$ вдоль оси $x$

Это зависимость между смещением  $\xi$  частиц среды, участвующих в волновом процессе, и расстоянием  $x$  этих частиц (например, частицы  $B$ ) от источника колебаний  $O$  для какого-то фиксированного момента времени  $t$ . Рисунок задает мгновенную картину распределения возмущения вдоль направления распространения, и его *не следует воспринимать* как зримое изображение волны.



### Отличие графиков гармонических волн и колебаний

Эти графики *различны по существу*. Если график волны определяет зависимость смещения *всех частиц* среды от расстояния до источника колебаний в *данный момент времени*, то график колебания — зависимость смещения *данной частицы* от времени.



## Длина волны

$$\lambda = vT$$
$$v = \lambda\nu$$

Расстояние между двумя ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе. Длина волны равна расстоянию, на которое распространяется определенная фаза колебания за период.

## Волиовое число

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}$$

[ $v$  — скорость волны;  $T$  — период колебаний;  $\nu$  — частота колебаний;  $\omega$  — циклическая частота волны]

## 4.2.2. ОПИСАНИЕ БЕГУЩИХ ВОЛН

### 4.46 Характеристики переноса энергии волнами

#### Бегущие волны

Волны, которые переносят в пространстве энергию.

#### Поток энергии

$$\Phi = \frac{dW}{dt}$$

Количественная характеристика перенесенной энергии, определяемая энергией, переносимой волнами через некоторую поверхность в единицу времени.

#### Плотность потока энергии волны

$$\vec{U} = \frac{d\Phi}{dS} = w \cdot v$$

Определяется потоком энергии, переносимой волной через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны.

[ $v$  — скорость волны;  $w$  — объемная плотность энергии колебательного движения]

#### Вектор Умова

$$\vec{U} = w\vec{v}$$

**Вектор плотности потока энергии**, количественно характеризует перенос энергии волнами. Направление вектора Умова совпадает с направлением переноса энергии, а его модуль равен энергии, переносимой волной за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны.

#### Интенсивность волны

$$|\langle \vec{U} \rangle|$$

Модуль среднего значения вектора Умова.

### 4.47 Уравнение плоской и сферической волн. Волновое уравнение

#### Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси $x$

$$\xi(x, t) = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right],$$

$$\xi(x, t) = A \cos (\omega t - kx + \varphi_0),$$

в комплексной форме

$$\xi(x, t) = A e^{i(\omega t - kx + \varphi_0)}$$

[ $\xi(x, t)$  — смещение точек среды с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ;  $A$  — амплитуда волны;  $\omega$  — циклическая (круговая) частота;  $v$  — фазовая скорость;  $\varphi_0$  — начальная фаза колебаний;  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}$  — волновое число;  $T$  — период колебаний]

## Фазовая скорость

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Скорость перемещения фазы волны.

Находится из условия постоянства фазы волны

$$\omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 = \text{const}$$

с последующим дифференцированием этого выражения по  $t$ .

## Дисперсия волн

$$v = \frac{\omega}{k}$$

Зависимость фазовой скорости волн в среде от их частоты.

## Уравнение сферической волны

$$\xi(r, t) = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0)$$

В случае сферической волны даже в среде, *не поглощающей* энергию, амплитуда колебаний не остается постоянной, а убывает с расстоянием по закону  $1/r$ . Записанное уравнение сферической волны справедливо для  $r$  (расстояние от центра волны до рассматриваемой точки среды), значительно превышающих размеры источника (источник колебаний тогда можно считать *точечным*).

## Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

или

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее распространение волн в *однородной изотропной среде*. Решение этого уравнения — уравнение любой волны.

[ $v$  — фазовая скорость;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ — оператор Лапласа}]$$

## Волновое уравнение для плоской волны, распространяющейся вдоль оси $x$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Решение — уравнение плоской волны

$$\xi = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0).$$

## 4.2.3. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ. ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ

### 4.48 Принцип суперпозиции (наложения) волн

#### Линейная среда

Среда, в которой при одновременном распространении нескольких волн ее свойства не изменяются под действием возмущений, создаваемых волной.

#### Принцип суперпозиции (наложения) волн

При распространении в линейной среде нескольких волн каждая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют, а результирующее смещение частицы среды в любой момент времени равно *геометрической сумме* смещений, которые получают частицы среды, участвуя в каждом из независимых волновых процессов. Например, если волны распространяются от двух источников, то они, доходя до какой-то точки, вызывают ее колебания независимо друг от друга.



## 4.49 Волновой пакет. Групповая скорость

### Волновой пакет

Суперпозиция большого числа волн, мало отличающихся друг от друга по частоте, занимающая в каждый момент времени ограниченную область пространства.

### Простейшая группа волн

$$\xi = A_0 \cos(\omega t - kx) + A_0 \cos[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x] = 2 A_0 \cos\left(\frac{td\omega - xd k}{2}\right) \cos(\omega t - kx)$$

Получается при наложении двух плоских волн с одинаковыми амплитудами и близкими частотами ( $d\omega \ll \omega$ ) и волновыми числами ( $dk \ll k$ ).

Эта волна отличается от гармонической тем, что ее амплитуда

$$A = \left| 2 A_0 \cos\left(\frac{td\omega - xd k}{2}\right) \right|$$

есть медленно изменяющаяся функция координаты  $x$  и времени  $t$ , т. е. является негармонической.

### Скорость распространения группы волн

Скорость перемещения какой-то точки, в которой амплитуда имеет фиксированное значение, в частности максимальное.

Из условия  $t d\omega - x dk = \text{const}$  получим  $u = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk}$  (групповая скорость).

### Групповая скорость

$$u = \frac{d\omega}{dk}$$

Скорость движения максимума огибающей группы волн, образующих в каждый момент времени локализованный в пространстве волновой пакет, или скорость движения центра волнового пакета.

## 4.50 Связь групповой и фазовой скоростей

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} \quad u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(vk)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} = v + k \left( \frac{dv}{d\lambda} : \frac{dk}{d\lambda} \right) = v + k \left[ \frac{dv}{d\lambda} : \frac{d(2\pi/\lambda)}{d\lambda} \right] =$$

$$= v + k \left( -\frac{\lambda^2}{2\pi} \right) \frac{dv}{d\lambda} = v + \frac{2\pi}{\lambda} \left( -\frac{\lambda^2}{2\pi} \right) \frac{dv}{d\lambda} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}.$$

[ $u$  — групповая скорость;  $v$  — фазовая скорость;  $\lambda$  — длина волны;  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число. В недиспергирующей среде  $\frac{dv}{d\lambda} = 0$  и групповая скорость совпадает с фазовой]

## 4.2.4. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ВОЛН

### 4.51 Определение интерференции

#### Когерентность

Согласованное протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых процессов.

#### Когерентные волны

Волны, разность фаз которых остается постоянной во времени. Когерентными могут быть лишь волны, имеющие одинаковую частоту.

## Интерференция волн

Явление наложения двух (или нескольких) когерентных волн, при котором в разных точках пространства получается усиление или ослабление результирующей волны в зависимости от соотношения между фазами этих волн.

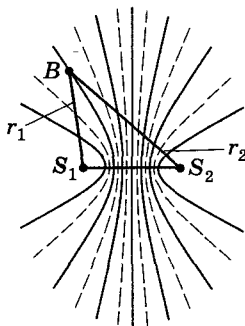
### 4.52 Интерференция на примере наложения сферических волн

Наложение двух когерентных сферических волн, возбуждаемых точечными источниками  $S_1$  и  $S_2$

$$\xi_1 = \frac{A_0}{r_1} \cos(\omega t - kr_1 + \varphi_1), \quad \xi_2 = \frac{A_0}{r_2} \cos(\omega t - kr_2 + \varphi_2)$$

$$A^2 = A_0^2 \left\{ \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1 r_2} \cos[k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2)] \right\}$$

[ $A_0$  — амплитуда колебаний точечных источников;  $\omega$  — циклическая частота;  $r_1$  и  $r_2$  — расстояния от источников волн до рассматриваемой точки;  $k$  — волновое число;  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — начальные фазы волн;  $A$  — амплитуда результирующей волны]



#### Разность хода

$$\Delta = r_1 - r_2$$

Поскольку для когерентных источников разность начальных фаз  $\varphi_1 - \varphi_2 = \text{const}$ , результат наложения двух волн в различных точках зависит именно от разности хода.

#### Условие интерференционного максимума

$$k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2) = \pm 2m\pi$$
$$(m = 0, 1, 2, \dots)$$

Амплитуда результирующего колебания

$$A = \frac{A_0}{r_1} + \frac{A_0}{r_2}.$$

#### Условие интерференционного минимума

$$k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2) = \pm(2m + 1)\pi$$
$$(m = 0, 1, 2, \dots)$$

Амплитуда результирующего колебания

$$A = \left| \frac{A_0}{r_1} - \frac{A_0}{r_2} \right|.$$

Условия интерференционных максимумов и минимумов сводятся к тому, что  $r_1 - r_2 = \text{const}$  (уравнение гиперболы с фокусами в точках  $S_1$  и  $S_2$ ). Следовательно, геометрическое место точек, в которых результирующее колебание усиливается или ослабляется, — семейство гипербол (см. рисунок), отвечающих условию  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ . Между двумя интерференционными максимумами (сплошные линии) находятся интерференционные минимумы (штриховые линии).

[ $m = 0, 1, 2, \dots$  — порядок интерференционного максимума или минимума]

## 4.2.5. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

### 4.53 Уравнение стоячей волны и его анализ

#### Стоячие волны

Волны, образующиеся при наложении двух бегущих волн с одинаковыми частотами и амплитудами (а в случае поперечных волн и одинаковой поляризацией), распространяющихся навстречу друг другу.

## Складываемые волны

$$\xi_1 = A \cos(\omega t - kx),$$

$$\xi_2 = A \cos(\omega t + kx)$$

Для обеих волн амплитуды и частоты одинаковы; плоские волны распространяются навстречу друг другу вдоль оси  $x$  в среде без затухания; начало координат выбрано в точке, в которой обе волны имеют одинаковую начальную фазу; начало отсчета времени — в момент, когда начальные фазы обеих волн равны нулю.

### Уравнение стоячей волны

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos kx \cos \omega t = 2A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cos \omega t$$

[Учти, что волновое число  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ]

### Амплитуда стоячей волны

$$A_{\text{ст}} = \left| 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \right|$$

В отличие от амплитуды  $A$  бегущей волны  $A_{\text{ст}}$  зависит от координаты  $x$ .

### Пучности стоячей волны

Точки, в которых амплитуда стоячей волны максимальна ( $A_{\text{ст}} = 2A$ ).

Это точки среды, для которых

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

### Узлы стоячей волны

Точки, в которых амплитуда стоячей волны равна нулю ( $A_{\text{ст}} = 0$ ).

Это точки среды, для которых

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

### Координаты пучностей и узлов

$$x_{\text{п}} = \pm m \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

Расстояния пучность — пучность и узел — узел равны  $\lambda/2$ .

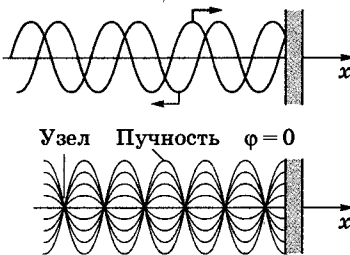
$$x_{\text{узел}} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

Расстояние пучность — узел равно  $\lambda/4$ .

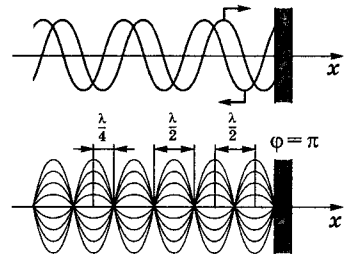
## 4.54 Образование пучностей и узлов на границе отражения

### Пучность или узел на границе отражения?

Отражение от менее плотной среды



Отражение от более плотной среды



Будет ли на границе отражения узел или пучность, зависит от соотношения плотностей сред. Если среда, от которой происходит отражение, менее плотная, то в месте отражения возникает пучность; если более плотная, — узел. Образование узла связано с тем, что волна, отражаясь от более плотной среды, меняет фазу на противоположную у границы

происходит сложение колебаний с противоположными фазами, в результате чего получается узел. Если же волна отражается от менее плотной среды, то изменения фазы не происходит и у границы колебания складываются с одинаковыми фазами — образуется пучность.

### Энергия стоячей волны

В направлении распространения бегущей волны переносится энергия колебательного движения. В случае же стоячей волны *переноса энергии нет*, так как падающая и отраженная волны одинаковой амплитуды несут одинаковую энергию в противоположных направлениях. Поэтому полная энергия результирующей стоячей волны, заключенной между узловыми точками, остается постоянной. Лишь в пределах расстояний, равных половине длины волны, происходят взаимные превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно.

## 4.2.6. ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ

### 4.55 Диапазон звуковых волн

#### Акустика

Область физики, в которой изучаются звуковые волны.

#### Звуковые (акустические) волны

Упругие волны с частотами 16—20 000 Гц, распространяющиеся в среде и воспринимаемые органами слуха человека (границы условны, т. е. для разных людей они различны).

#### Инфразвуковые волны

Звуковые волны с частотами ниже границ диапазона восприятия уха человека, т. е.  $\nu < 16$  Гц.

#### Ультразвуковые волны

Звуковые волны с частотами выше диапазона слуха человека, т. е.  $\nu > 20$  кГц.

#### Звуковые волны — продольные или поперечные?

В жидкостях и газах они могут быть только продольными, так как эти среды обладают упругостью лишь по отношению к деформациям сжатия (растяжения). В твердых телах могут быть как продольными, так и поперечными, так как твердые тела обладают упругостью по отношению к деформациям сжатия (растяжения) и сдвига.

### 4.56 Характеристики звука

#### Интенсивность (или сила) звука

*Энергетическая характеристика:* величина, определяемая средней по времени энергией, переносимой звуковой волной в единицу времени сквозь площадку, ориентированную перпендикулярно направлению распространения волны.

#### Зависимости порогов слышимости и болевого ощущения от частоты звука

Чувствительность человеческого уха различна для разных частот. Для каждой частоты колебаний существует наименьшая (*порог слышимости*) и наибольшая (*порог болевого ощущения*) интенсивности звука, которые способны вызвать звуковое восприятие.



## Громкость звука

*Субъективная характеристика:* величина, характеризующая слуховое ощущение для данного звука и зависящая от интенсивности звука, частоты и формы звуковых колебаний.

### Уровень интенсивности звука

*Объективная оценка громкости звука:*  $L = \lg \frac{I}{I_0}$ .

$I_0$  — интенсивность звука на пороге слышимости, принимаемая для всех звуков равной  $10^{-12}$  Вт/м<sup>2</sup>. Величина  $L$  выражается в *белах* (Б), а чаще — в единицах, в десять раз меньших, — *децибелах* (дБ).

### Уровень громкости

*Физиологическая характеристика:* выражается в *фонах* (фон). Громкость для звука 1000 Гц (частота стандартного чистого тона (синусоидального гармонического колебания) равна 1 фон, если его уровень интенсивности равен 1 дБ).

### Высота звука

*Субъективная характеристика:* качество периодического или почти периодического звука, определяемое человеком на слух и зависящее от частоты звука. С ростом частоты высота звука увеличивается (звук становится «выше»), с уменьшением частоты — понижается.

## 4.57 Акустический спектр

### Реальный звук

Наложение гармонических колебаний с большим набором частот.

### Акустический спектр

#### сплошной

В некотором интервале присутствуют колебания всех частот.

#### линейчатый

Присутствуют отдельные друг от друга определенные частоты.

### Тембр звука

Своеобразное звуковое ощущение, определяемое характером акустического спектра и распределением энергии между определенными частотами.

## 4.58 Две группы звуков

### Музыкальные звуки

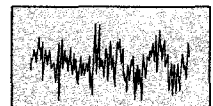
Звуки, обладающие линейчатым спектром (например, звуки музыкальных инструментов). Ряд нот — ряд звуков с возрастающей высотой тона с регулярными интервалами (*музыкальный интервал* — это частотный интервал, см. рисунок).



до ре ми фа соль ля си до  
264 297 330 352 396 440 495 528 Гц

### Шумы

Звуки, обладающие сплошным спектром или линейчатым спектром с негармоническими составляющими.



## 4.59 Скорость звука в различных средах

### Источники звука

Источником звука может быть всякое тело, колеблющееся в упругой среде со звуковой частотой (например, в струнных инструментах источником звука является струна, соединенная с корпусом инструмента).

### Скорость звука в газах

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

[ $\gamma = C_p/C_V$  — отношение молярных теплоемкостей газа при постоянных давлении и объеме;  $R$  — молярная газовая постоянная;  $M$  — молярная масса;  $T$  — термодинамическая температура]

### Скорость звука в изотропных твердых телах

$$v_{\text{прод}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Скорость звука в твердых телах значительно больше, чем в жидкостях и газах, так как упругость значительно больше.

$$v_{\text{поп}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

[ $E$  — модуль упругости;  $G$  — модуль сдвига;  $\rho$  — плотность среды]

### Скорость звука в жидкостях

$$v = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$$

[ $k$  — объемный модуль упругости жидкости;  $\rho$  — плотность жидкости]

#### Примеры скорости звука в разных средах:

Воздух . . . . . 330 м/с	Вода . . . . . 1450 м/с	Сталь . . . . . 5100 м/с
Свинец . . . . . 1230 м/с	Бетон . . . . . 3800 м/с	Гранит . . . . . 6000 м/с

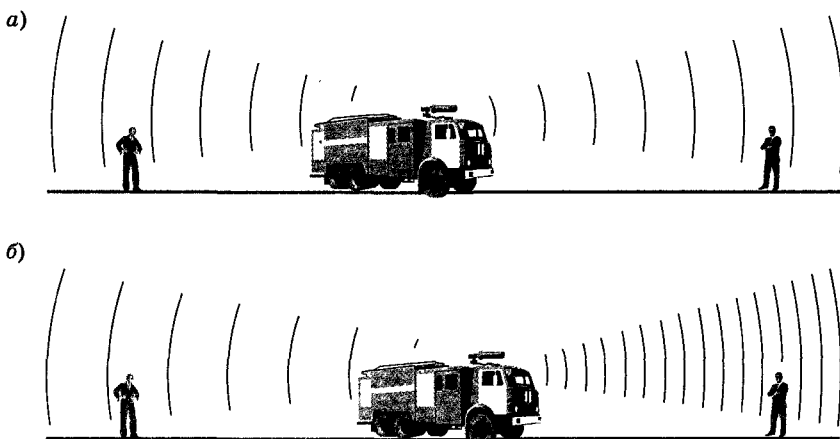
## 4.2.7. ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА В АКУСТИКЕ

### 4.60 Практические проявления эффекта Доплера

#### Эффект Доплера

Заключается в том, что испускаемая и регистрируемая частота волны различаются, если источник и приемник движутся друг относительно друга в среде, где распространяется волна.

#### Типичный пример проявления эффекта Доплера на практике



Оба наблюдателя (за и перед стоящей на месте пожарной машиной) слышат звук сирены на одной и той же частоте (рисунок а). Наблюдатель,

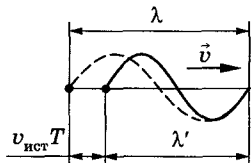
к которому приближается пожарная машина, слышит звук более высокой частоты, а наблюдатель, от которого машина удаляется, — более низкий звук (рисунок б).

## 4.61 Рассмотрение эффекта Доплера

**Источник и приемник звука движутся вдоль соединяющей их прямой**

$v_{ист}$  и  $v_{пр}$  — соответственно скорости движения источника и приемника, причем они положительны, если источник (приемник) приближается к приемнику (источнику), и отрицательны, если удаляется. Частота колебаний источника равна  $\nu_0$ .

Скорости источника и приемника	Полученный результат и его обоснование
1. $v_{ист} = v_{пр} = 0$	<p>Если <math>v</math> — скорость распространения звуковой волны в рассматриваемой среде, то длина волны <math>\lambda = vT = \frac{v}{\nu_0}</math>. Распространяясь в среде, волна достигнет приемника и вызовет колебания его звукочувствительного элемента с частотой</p> $\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{vT} = \nu_0$
2. $v_{пр} > 0, v_{ист} = 0$	<p>Скорость распространения волны относительно приемника <math>v + v_{пр}</math>. Длина волны не меняется, поэтому</p> $\nu = \frac{v + v_{пр}}{\lambda} = \frac{v + v_{пр}}{vT} = \frac{(v + v_{пр})\nu_0}{v}$
3. $v_{ист} > 0, v_{пр} = 0$	<p><math>v</math> зависит лишь от свойств среды, поэтому за время, равное периоду колебаний источника, излученная им волна пройдет в направлении к приемнику расстояние <math>vT = \lambda</math> (независимо от того, движется или покоится источник). Источник же пройдет в направлении волны расстояние <math>v_{ист}T</math>, тогда (см. рисунок) <math>\lambda' = \lambda - v_{ист}T = (v - v_{ист})T</math>,</p> $\nu = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v - v_{ист})T} = \frac{v\nu_0}{v - v_{ист}}$



Если направления скоростей  $\vec{v}_{пр}$  и  $\vec{v}_{ист}$  не совпадают с проходящей через источник и приемник прямой, то вместо скоростей надо брать их проекции на направление этой прямой.

**Источник и приемник движутся друг относительно друга**

Используя результаты пунктов 2 и 3, получаем, что частота колебаний, воспринимаемых источником,

$$\nu = \frac{(v \pm v_{пр})\nu_0}{v \mp v_{ист}}$$

Верхний знак берется, если при движении источника или приемника происходит их сближение, нижний знак — в случае их взаимного удаления.

Если направления скоростей  $\vec{v}_{пр}$  и  $\vec{v}_{ист}$  не совпадают с проходящей через источник и приемник прямой, то вместо скоростей надо брать их проекции на направление этой прямой.

## 4.62 Доплер-эффект в зависимости от относительного движения источника и приемника

Возможные направления движения источника и приемника заданы стрелками

Источ-ник	Прием-ник	Частота, вос-принимаемая приемником	Источ-ник	Прием-ник	Частота, вос-принимаемая приемником	Источ-ник	Прием-ник	Частота, вос-принимаемая приемником
•	•	$v = v_0$	• →	•	$v = \frac{v}{v - v_{ист}} v_0$	← •	• →	$v = \frac{v - v_{пр}}{v + v_{ист}} v_0$
•	← •	$v = \frac{v + v_{пр}}{v} v_0$	← •	•	$v = \frac{v}{v + v_{ист}} v_0$	← •	← •	$v = \frac{v + v_{пр}}{v + v_{ист}} v_0$
•	• →	$v = \frac{v - v_{пр}}{v} v_0$	• →	← •	$v = \frac{v + v_{пр}}{v - v_{ист}} v_0$	• →	• →	$v = \frac{v - v_{пр}}{v - v_{ист}} v_0$

[ $v$  — скорость распространения звуковой волны в рассматриваемой среде;  $v_0$  — частота колебаний источника;  $v$  — частота колебаний, воспринимаемая приемником;  $v_{ист}$  — скорость движения источника;  $v_{пр}$  — скорость движения приемника; • — источник (или приемник) покоится]

## 4.3. Электромагнитные волны

### 4.3.1. ПОЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН И ИХ ДИАПАЗОН

#### 4.63 Некоторые методы получения электромагнитных волн

##### Электромагнитные волны

Переменное электромагнитное поле, распространяющееся в пространстве с конечной скоростью.

Электромагнитные волны возникают в результате того, что переменное электрическое поле порождает переменное магнитное поле, которое, в свою очередь, порождает переменное электрическое поле. Их существование вытекает из уравнений Максвелла [3.145](#).

##### Источники электромагнитных волн

Источником электромагнитных волн может быть любой *колебательный контур* или *проводник*, по которому течет переменный электрический ток, так как для возбуждения электромагнитных волн необходимо создать в пространстве переменное электрическое поле (ток смещения) или соответственно переменное магнитное поле. Излучающая способность источника определяется его *формой*, *размерами* и *частотой колебаний*. Чтобы излучение играло заметную роль, необходимо увеличить объем пространства, в котором переменное электромагнитное поле создается. Поэтому для получения электромагнитных волн непригодны закрытые колебательные контуры, так как в них электрическое поле сосредоточено между обкладками конденсатора, а магнитное — внутри катушки индуктивности.

##### Открытый колебательный контур (вibrator Герца)

Герц уменьшил число витков катушки до одного (рисунок *a*), уменьшил площадь пластин конденсатора и, раздвигая их

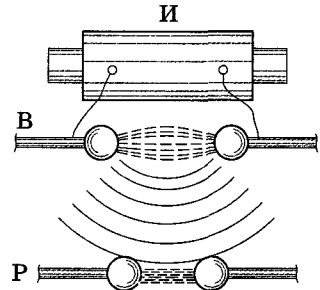




друг от друга (рисунок б), перешел от *закрытого колебательного контура* (рисунок а; все электрическое поле сосредоточено внутри конденсатора) к *открытому* (рисунок в; электрическое поле заполняет окружающее контур пространство), что позволило значительно повысить интенсивность электромагнитного излучения.

**Возбуждение и регистрация электромагнитных волн, излучаемых вибратором Герца**

Вибратор Герца В подключается к индуктору И, являясь источником электромагнитных волн определенной частоты. Для регистрации электромагнитных волн Герц пользовался резонатором Р (второй вибратор), настроенным в резонанс с вибратором В. Когда электромагнитные волны достигали резонатора, то в его зазоре проскакивала электрическая искра. Были получены волны с  $\lambda \approx 3$  м.



**Миниатюрный вибратор Лебедева**

Вибратор из тонких платиновых стерженьков, с помощью которого получены миллиметровые электромагнитные волны с  $\lambda = 6-4$  мм.

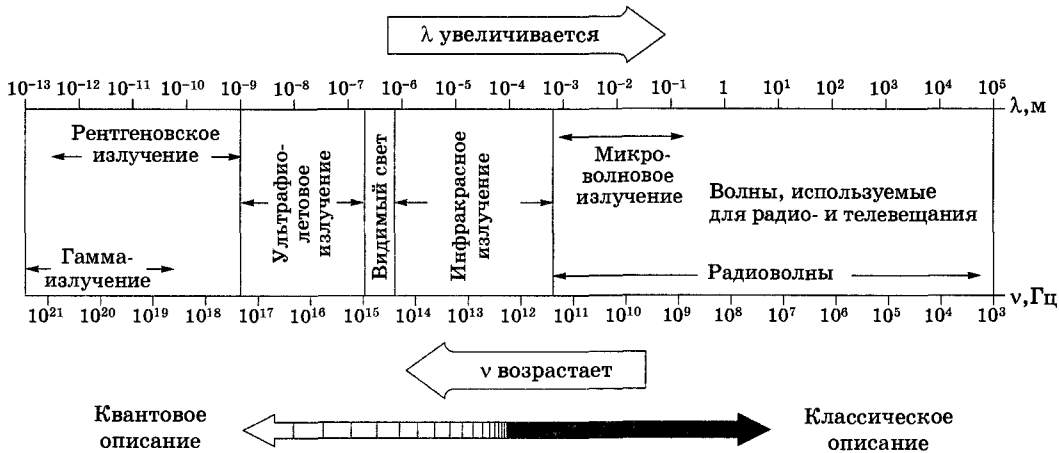
**Массовый излучатель**

Короткие электромагнитные волны, возбуждаемые колебаниями электрических зарядов в атомах и молекулах, генерировались с помощью искр, проскакиваемых между металлическими опилками, взвешенными в масле. Получены волны с  $\lambda$  от 50 мм до 80 мкм, т. е. было доказано существование волн, перекрывающих интервал между радиоволнами и инфракрасным излучением.

**Ламповый генератор**

Все описанные выше методы обладали тем недостатком, что свободные колебания в них быстро затухали и обладали малой мощностью. Поэтому для получения незатухающих колебаний используются ламповые генераторы, позволяющие получить колебания заданной (практически любой) мощности и синусоидальной формы.

**4.64 Шкала электромагнитных волн**



## 4.65 Диапазоны электромагнитных волн

Вид излучения	Длина волны, м	Частота волны, Гц	Некоторые возможные источники излучения
Радиоволны	$10^3 - 10^{-4}$	$3 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^{12}$	Колебательный контур Вибратор Герца Массовый излучатель Ламповый генератор
Световые волны: инфракрасное излучение видимый свет ультрафиолетовое излучение	$5 \cdot 10^{-4} - 8 \cdot 10^{-7}$ $8 \cdot 10^{-7} - 4 \cdot 10^{-7}$ $4 \cdot 10^{-7} - 10^{-9}$	$6 \cdot 10^{11} - 3,75 \cdot 10^{14}$ $3,75 \cdot 10^{14} - 7,5 \cdot 10^{14}$ $7,5 \cdot 10^{14} - 3 \cdot 10^{17}$	Лампы, лазеры
Рентгеновское излучение	$2 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-12}$	$1,5 \cdot 10^{17} - 5 \cdot 10^{19}$	Трубки Рентгена
Гамма-излучение	$< 6 \cdot 10^{-12}$	$> 5 \cdot 10^{19}$	Радиоактивный распад Ядерные процессы Космические процессы

◆ Границы между различными типами электромагнитных волн условны, а также области с различными названиями перекрываются (каждый диапазон связан с определенным типом излучателей).

## 4.66 Диапазон длин волн и частот для радио и телевидения

Диапазон	Длина волны	Частота
Длинные волны (ДВ)	2 км — 860 м	150 кГц — 350 кГц
Средние волны (СВ)	580 м — 184 м	515 кГц — 1630 кГц
Короткие волны (КВ)	160 м — 10 м	1,9 МГц — 30 МГц
Телевидение, сверхвысокие частоты	6,4 м — 4,4 м	47 МГц — 68 МГц
Ультракороткие волны (УКВ)	3,42 м — 2,88 м	88 МГц — 104 МГц
Телевидение, ультравысокая частота (УВЧ)	1,72 м — 1,3 м	172 МГц — 230 МГц
Телевидение, сверхвысокие частоты	0,64 м — 0,35 м	470 МГц — 860 МГц
Спутниковое телевидение	2,7 см — 2,3 см	11 ГГц — 13 ГГц

## 4.3.2. ОПИСАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

### 4.67 Фазовая скорость электромагнитных волн

#### Фазовая скорость

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

[ $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  — электрическая и магнитная постоянные;  $\epsilon$  и  $\mu$  — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды;  $c$  — скорость распространения света в вакууме]

#### Размерный коэффициент в формуле для фазовой скорости

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Совпадение размерного коэффициента в формуле для фазовой скорости со скоростью  $c$  указывает на глубокую связь между электромагнитными и оптическими явлениями. Это позволило Максвеллу создать *единую электромагнитную теорию света*, согласно которой свет представляет собой электромагнитные волны.

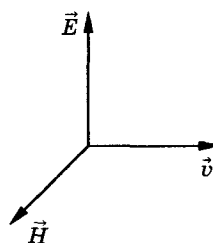
#### Скорость распространения электромагнитных волн

в вакууме:  $v = c$ , поскольку для вакуума  $\epsilon = 1$  и  $\mu = 1$ ,  
в среде:  $v < c$ , поскольку для среды  $\epsilon \mu > 1$ .

## 4.68 Следствия теории Максвелла

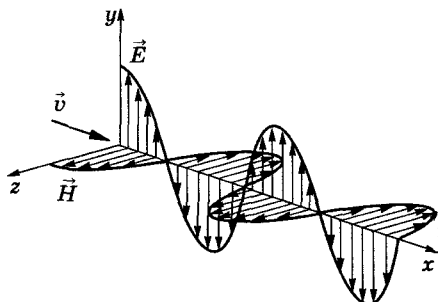
### Поперечность электромагнитных волн

В электромагнитной волне колебания векторов напряженности  $\vec{E}$  переменного электрического поля и напряженности  $\vec{H}$  переменного магнитного поля взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{v}$  скорости распространения волны. Векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{v}$  образуют правовинтовую систему.



### Моментальная «фотография» плоской электромагнитной волны

*Следствие уравнений Максвелла 3.145:* в электромагнитной волне векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  всегда колеблются в одинаковых фазах (см. рисунок). Мгновенные значения  $E$  и  $H$  в любой точке связаны соотношением  $\sqrt{\epsilon_0 \epsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H$ .



## 4.69 Дифференциальные уравнения электромагнитной волны

### Волновые уравнения для векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

$$\Delta \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Эти уравнения — следствия уравнений Максвелла 3.145. Они отвечают однородной и изотропной среде вдали от зарядов и токов, создающих электромагнитное поле.

Всякая функция, удовлетворяющая записанным уравнениям, описывает некоторую волну, т. е. электромагнитные поля действительно могут существовать в виде электромагнитных волн.

$[\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа;  $v$  — фазовая скорость]

### Волновые уравнения для $E_y$ и $H_z$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}$$

Этим уравнениям удовлетворяют плоские монохроматические волны, описываемые уравнениями

$$E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

$$H_z = H_{0z} \cos(\omega t - kx + \varphi).$$

Индексы  $y$  и  $z$  при  $E$  и  $H$  подчеркивает только то, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  направлены вдоль взаимно перпендикулярных осей  $y$  и  $z$  (см. рисунок 4.68);  $E_{0y}$  и  $H_{0z}$  — соответственно амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны;  $\omega$  — круговая частота волны;  $k = \omega/v$  — волновое число;  $\varphi$  — начальные фазы колебаний (они одинаковы, так как колебания электрического и магнитного векторов в электромагнитной волне происходят в одинаковых фазах (см. рисунок 4.68)).

## 4.70 Вектор плотности потока электромагнитной энергии

### Объемная плотность энергии электромагнитной волны

$$w = w_{\text{эл}} + w_{\text{м}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2};$$

$$w = 2w_{\text{эл}} = \varepsilon_0 \varepsilon E^2 = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sqrt{\varepsilon \mu} EH$$

Складывается из объемных плотностей электрического  $w_{\text{эл}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}$  3.52 и магнитного

$w_{\text{м}} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}$  3.125 полей. Учли, что

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H \text{ 4.68.}$$

### Модуль плотности потока энергии

$$S = wv = EH$$

[ $w$  — объемная плотность энергии электромагнитной волны;  $v$  — скорость распространения волны в среде]

### Вектор плотности потока электромагнитной энергии

(вектор Умова—Пойнтинга)

$$\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}]$$

Направление вектора  $[\vec{E}\vec{H}]$  совпадает с направлением переноса энергии, а модуль этого вектора равен  $EH$ .

Вектор  $\vec{S}$  направлен в сторону распространения электромагнитной волны, а его модуль равен энергии, переносимой электромагнитной волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны.

## 5. ОПТИКА. КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ИЗЛУЧЕНИЯ

### 5.1. Элементы геометрической оптики

#### 5.1.1. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ОПТИКИ. ПОЛНОЕ ОТРАЖЕНИЕ

##### 5.1 Основные законы оптики

###### Оптика

Раздел физики, в котором изучаются излучение, распространение и взаимодействие с веществом *световых электромагнитных волн* (волн оптического диапазона, примыкающего с одной стороны к рентгеновскому излучению, а с другой — к микроволновому радиоизлучению).

###### Геометрическая оптика

Раздел оптики, в котором законы распространения света рассматриваются на основе представления о *световых лучах* (нормальных к волновым поверхностям линий, вдоль которых распространяется поток световой энергии).

###### Закон прямолинейного распространения света

Свет в оптически однородной среде распространяется прямолинейно.

###### Закон независимости световых пучков

Эффект, производимый отдельным пучком, не зависит от того, действуют ли одновременно остальные пучки или они устранены.

###### Закон отражения

Отраженный луч лежит в одной плоскости с падающим лучом и перпендикуляром, проведенным к границе раздела двух сред в точке падения; угол  $i'_1$  отражения равен углу  $i_1$  падения:

$$i'_1 = i_1.$$

###### Закон преломления

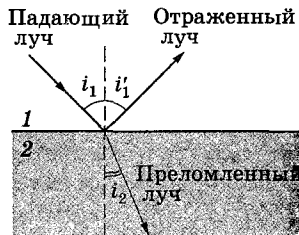
Луч падающий, луч преломленный и перпендикуляр, проведенный к границе раздела в точке падения, лежат в одной плоскости; отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная для данных сред:

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n_{21}.$$

$[n_{21}$  — *относительный показатель преломления*, т. е. показатель преломления второй среды относительно первой, равный отношению абсолютных показателей

преломления:  $n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$  (*абсолютный показатель преломления* среды  $n = \frac{c}{v}$

( $c$  — скорость электромагнитных волн в вакууме;  $v$  — их фазовая скорость в среде));  $i_1, i'_1, i_2$  указывают, в какой среде (первой или второй) идет луч]

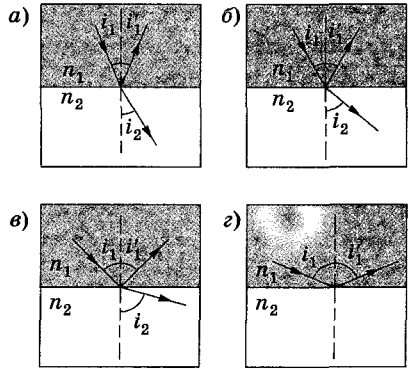


##### 5.2 Полное отражение

Свет распространяется *из оптически более плотной среды* (среды с большим показателем преломления) *в оптически менее плотную среду* (среду с меньшим показателем преломления ( $n_1 > n_2$ )). Согласно закону преломления,

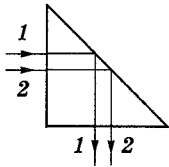
$$\frac{\sin i_2}{\sin i_1} = \frac{n_1}{n_2} > 1, \quad \text{т. е. } i_2 > i_1.$$

С увеличением угла падения увеличивается угол преломления (рисунки б, в) до тех пор, пока при некотором угле падения ( $i_1 = i_{\text{пр}}$ ) угол преломления не окажется равным  $\pi/2$ . Угол  $i_{\text{пр}}$  — **предельный угол**. При  $i_1 > i_{\text{пр}}$  весь падающий свет полностью отражается (рисунок з). По мере приближения угла падения к предельному интенсивность преломленного луча уменьшается, а отраженного — растет (рисунки а—в). Если  $i_1 = i_{\text{пр}}$ , то интенсивность преломленного луча обращается в нуль, а интенсивность отраженного равна интенсивности падающего (рисунок з).

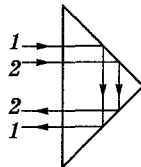


При углах падения от  $i_{\text{пр}}$  до  $\pi/2$  луч не преломляется, а полностью отражается в первую среду, причем интенсивность отраженного и падающего лучей одинакова. Это явление **полного отражения**.

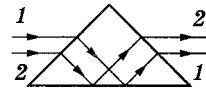
### 5.3 Призмы полного отражения



Призма поворачивает лучи на  $90^\circ$



Призма поворачивает изображение

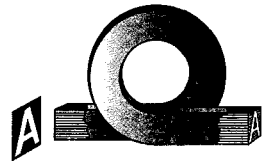


Призма оборачивает лучи

### 5.4 Световоды

#### Световоды

Тонкие, произвольным образом изогнутые волокна из оптически прозрачного материала. Световедущая жила (сердцевина) окружена из стекла с меньшим показателем преломления. Свет, падающий на торец световода под углами, большими предельного, претерпевает на поверхности раздела сердцевинки и оболочки полное отражение и распространяется по световедущей жиле.



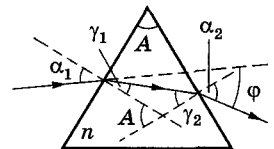
### 5.5 Отклонение лучей призмой

Монохроматический пучок света падает на призму с преломляющим углом  $A$  и показателем преломления  $n$  под углом  $\alpha_1$ .

После двукратного преломления (на левой и правой гранях призмы) луч отклоняется на угол  $\varphi$ . Из рисунка следует, что

$$\varphi = (\alpha_1 - \gamma_1) + (\alpha_2 - \gamma_2) = \alpha_1 + \alpha_2 - A.$$

Если углы  $A$  и  $\alpha_1$  малы, то углы  $\alpha_2$ ,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  также малы. Тогда  $\alpha_1/\gamma_1 = n$  и  $\gamma_2/\alpha_2 = 1/n$ . Так как  $\gamma_1 + \gamma_2 = \varphi$ , то  $\alpha_2 = \gamma_2 n = n(A - \gamma_1) = n(A - \alpha_1/n) = nA - \alpha_1$  или  $\alpha_1 + \alpha_2 = nA$ . Тогда  $\varphi = A(n - 1)$ .



## 5.1.2. ЗЕРКАЛА И ИХ ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

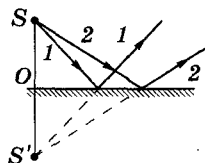
### Плоское зеркало

Плоская полированная поверхность, при отражении от которой параллельный пучок света остается параллельным.

## 5.6 Построение изображения в плоском зеркале

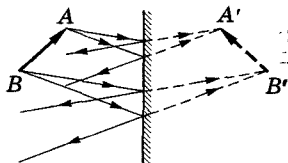
### Изображение точечного источника

Два произвольных луча  $1$  и  $2$ , исходящие из точки  $S$ , отражаясь от зеркала в соответствии с законом отражения, расходятся. Продолжения этих лучей пересекаются в точке  $S'$ , находящейся по другую сторону зеркала относительно  $S$ ;  $S'$  — мнимое изображение. Линия  $SS'$  перпендикулярна плоскости зеркала;  $SO = SO'$ .



### Изображение предмета

Плоское зеркало отражает свет, приходящий из точек  $A$  и  $B$ . Обе произвольные пары отраженных лучей от точек  $A$  и  $B$  продолжены за зеркало, причем отраженная пара лучей из точки  $A$  сходится в  $A'$ , из  $B$  — в точке  $B'$ . Изображение  $A'B'$  — мнимое, его размеры такие же, как у предмета.

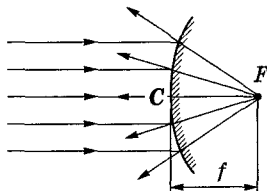


## 5.7 Деление сферических зеркал по внешней форме и оптическим свойствам

### Сферическое зеркало

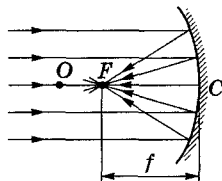
Зеркало, отражающая поверхность которого представляет собой часть сферы.

#### Выпуклое сферическое зеркало



Отражающее покрытие нанесено на внешнюю поверхность сферы

#### Вогнутое сферическое зеркало



Отражающее покрытие нанесено на внутреннюю поверхность сферы

[ $O$  — оптический центр зеркала;  $C$  — полюс зеркала;  $F$  — главный фокус (фокус) зеркала;  $f$  — главное фокусное расстояние]

## 5.8 Основные элементы сферического зеркала

### Оптический центр зеркала

Центр  $O$  сферической поверхности, из которой вырезан сегмент.

### Полюс зеркала

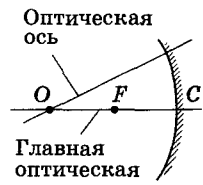
Вершина  $C$  сферического сегмента.

### Главная оптическая ось

Прямая, проходящая через оптический центр  $O$  зеркала и его полюс  $C$ .



Выпуклое зеркало



Вогнутое зеркало

## Оптическая ось зеркала

Любая прямая, проходящая через оптический центр  $O$  зеркала.

## Главный фокус (фокус) зеркала

Точка  $F$  на главной оптической оси, через которую проходит после отражения от зеркала луч или его продолжение, падающий параллельно главной оптической оси.

## 5.9 Формула сферического зеркала, оптическая сила зеркала

### Главное фокусное расстояние

$$f = \frac{R}{2}$$

Эта формула — для *параксиальных* (приосевых) лучей. У выпуклого зеркала — фокус мнимый.

### Формула сферического зеркала (для параксиальных световых пучков)

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{R} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Фокусное расстояние вогнутого зеркала — величина положительная, выпуклого — отрицательная.

### Оптическая сила зеркала

$$\Phi = \frac{1}{f} = \frac{2}{R}$$

Величина, обратная главному фокусному расстоянию.

[ $f$  — главное фокусное расстояние;  $R$  — радиус кривизны сферического зеркала;  $a$  — расстояние от зеркала до светящейся точки, расположенной на главной оптической оси;  $b$  — расстояние от зеркала до изображения;  $\Phi$  — оптическая сила зеркала. В формуле сферического зеркала расстояния от зеркала до действительных точек следует брать со знаком плюс, а расстояния от зеркала до мнимых точек — со знаком минус]

## 5.10 Построение изображения предмета в сферических зеркалах

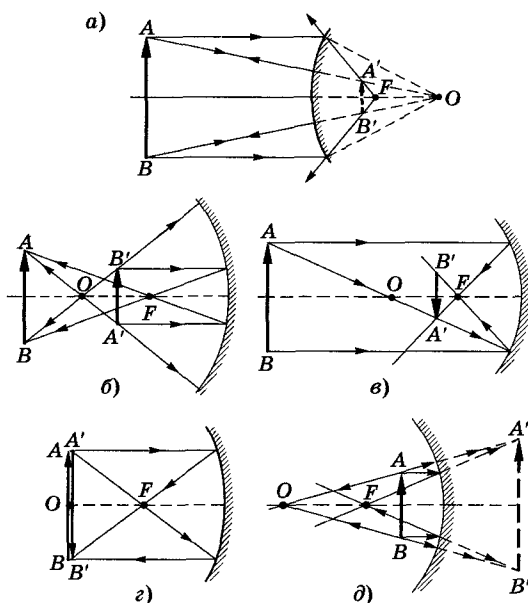
Построение изображения предмета в сферических зеркалах осуществляется с помощью следующих лучей:

1) луча, проходящего через оптический центр зеркала; отраженный луч идет назад вдоль первоначального направления;

2) луча (или его продолжения), проходящего через главный фокус сферического зеркала; отраженный луч параллелен главной оптической оси;

3) луча, идущего параллельно главной оптической оси, после отражения этот луч (или его продолжение) проходит через главный фокус сферического зеркала.

**Пример.** Построим изображения в выпуклом и вогнутом сферических зеркалах: всегда мнимое в выпуклом зеркале (рисунок *a*) и действительные (рисунки *б–з*) и мнимое (рисунок *д*) в вогнутых сферических зеркалах.





## 5.11 Особенности изображений в зеркалах

<i>Зеркало</i>	<i>Расположение предмета</i>	<i>Расположение изображения</i>	<i>Особенности изображения</i>
Плоское	Любое	За зеркалом, на том же расстоянии, что и предмет	Мнимое, прямое, обращенное, по величине равно самому предмету
Выпуклое сферическое	Любое	Между главным фокусом и зеркалом	Мнимое, прямое, уменьшенное
Вогнутое сферическое	В бесконечности	В главном фокусе	Действительное, перевернутое, уменьшенное
	За оптическим центром (на конечном расстоянии)	Между главным фокусом и оптическим центром	Действительное, перевернутое, уменьшенное
	В оптическом центре	В оптическом центре	Действительное, перевернутое, по величине равно самому предмету
	Между оптическим центром и главным фокусом	За оптическим центром	Действительное, перевернутое, увеличенное
	Между главным фокусом и зеркалом	За зеркалом	Мнимое, прямое, увеличенное

## 5.1.3. ЛИНЗЫ И ИХ ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ


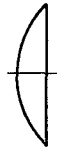
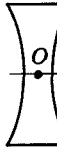
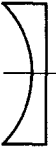
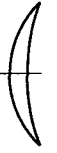
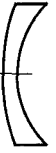
### 5.12 Деление линз по внешней форме и оптическим свойствам

#### Линзы

Прозрачные тела, ограниченные двумя поверхностями (одна из них обычно сферическая, иногда цилиндрическая, а вторая — сферическая или плоская), преломляющими световые лучи, способные формировать оптические изображения предметов.

#### Тонкая линза

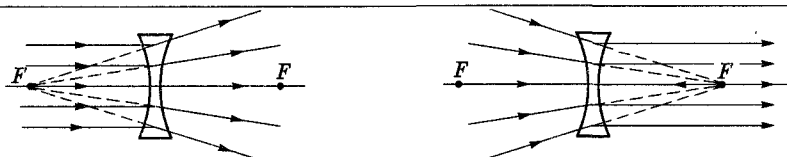
Линза, если ее толщина (расстояние между ограничивающими поверхностями) значительно меньше по сравнению с радиусами поверхностей, ограничивающих линзу.

<i>Форма линзы</i>						
<i>Название</i>	двойково-выпуклые	плосково-выпуклые	двойково-вогнутые	плосково-вогнутые	выпукло-вогнутые	вогнуто-выпуклые
<i>Радиусы</i>	$R_1 > 0$ $R_2 < 0$	$R_1 > 0$ $R_2 = \infty$	$R_1 < 0$ $R_2 > 0$	$R_1 < 0$ $R_2 = \infty$	$R_1 > R_2 > 0$	$R_1 > R_2 < 0$
<i>Фокусное расстояние</i>	$f > 0$	$f > 0$	$f > 0$	$f < 0$	$f < 0$	$f < 0$

## Собирающие линзы



## Рассеивающие линзы



$[R_1, R_2$  — радиусы кривизны поверхностей линзы;  $f$  — фокусное расстояние линзы;  $F$  — фокус линзы;  $O$  — оптический центр линзы]

## 5.13 Основные элементы линзы

### Главная оптическая ось

Прямая, проходящая через центры кривизны поверхностей линзы.

### Оптический центр линзы

Точка  $O$ , лежащая на главной оптической оси и обладающая тем свойством, что лучи проходят сквозь нее не преломляясь.

### Фокус линзы

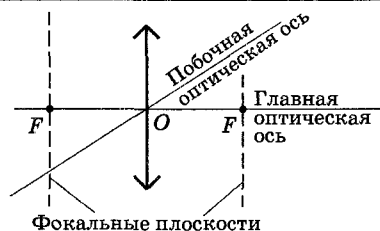
Точка  $F$ , лежащая на главной оптической оси, в которой пересекаются лучи параксиального (приосевого) светового пучка, распространяющиеся параллельно главной оптической оси.

### Фокусное расстояние $f$

Расстояние между оптическим центром линзы и ее фокусом.

### Побочная оптическая ось

Любая прямая, проходящая через оптический центр линзы и не совпадающая с главной оптической осью.



## 5.14 Оптическая сила и формула тонкой линзы

### Оптическая сила линзы

$$\Phi = \frac{1}{f} = (N - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

При  $\Phi > 0$  — линза собирающая;  
при  $\Phi < 0$  — линза рассеивающая.

### Формула тонкой линзы

$$(N - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

Радиус кривизны выпуклой поверхности линзы считается положительным, вогнутой — отрицательным. Для рассеивающей линзы  $f$  и  $b$  надо считать отрицательными.  $[\Phi$  — оптическая сила линзы,  $[\Phi] = 1 \text{ м}^{-1} = 1 \text{ дптр}$  — диоптрия — оптическая сила линзы с фокусным расстоянием 1 м;  $f$  — фокусное расстояние;  $N = n/n_1$  — относительный показатель преломления ( $n$  и  $n_1$  — соответственно абсолютные показатели преломления линзы и окружающей среды);  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы кривизны поверхностей линзы;  $a$  — расстояние от линзы до предмета;  $b$  — расстояние от линзы до изображения предмета]

## 5.15 Построение изображения предмета в линзах

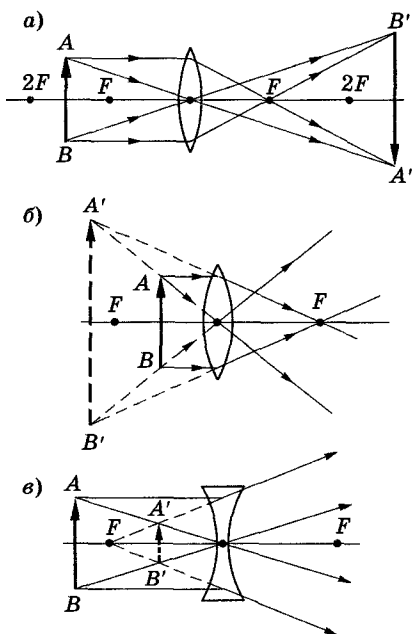
Построение изображения предмета в линзах осуществляется с помощью следующих лучей:

- ♦ луча, проходящего через оптический центр линзы и не изменяющего своего направления;

- ♦ луча, идущего параллельно главной оптической оси; после преломления в линзе этот луч (или его продолжение) проходит через второй фокус линзы;

- ♦ луча (или его продолжения), проходящего через первый фокус линзы; после преломления в ней он выходит из линзы параллельно ее главной оптической оси.

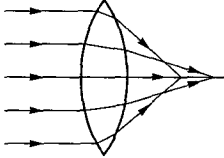
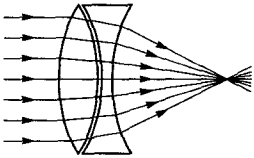
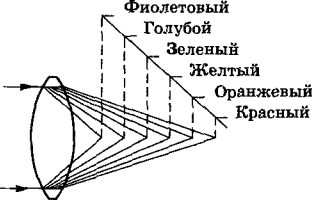
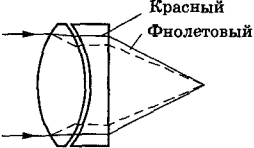
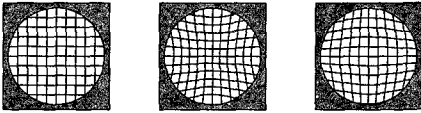
**Пример.** Построим изображения в собирающей и в рассеивающей линзах: действительное (рисунок а) и мнимое (рисунок б) изображения — в собирающей линзе, мнимое — в рассеивающей (рисунок в).



## 5.16 Особенности изображений в линзах

Линза	Расположение предмета	Расположение изображения	Особенности изображения
Собирающая	За двойным фокусным расстоянием	Между фокусом и двойным фокусом по другую сторону линзы	Действительное, перевернутое, уменьшенное
	В двойном фокусе	В двойном фокусе по другую сторону линзы	Действительное, перевернутое, по величине равно самому предмету
	Между двойным фокусным расстоянием и фокусом	За двойным фокусным расстоянием по другую сторону линзы	Действительное, перевернутое, увеличенное
	В фокусе	Видимого изображения нет (изображение в бесконечности)	
	Между фокусом и линзой	За предметом, по ту же сторону линзы, что и предмет	Мнимое, прямое, увеличенное
Рассеивающая	Любое	Между предметом и линзой, по ту же сторону линзы, что и предмет	Мнимое, прямое, уменьшенное

## 5.17 Аберрации (погрешности) линз

Вид аберрации	Описание аберрации	Исправление аберрации
Сферическая аберрация	<p>При падении света на линзу парааксиальные лучи после преломления и лучи, более удаленные от оптической оси, пересекаются в разных точках (см. рисунок), а потому изображение размыто</p> 	<p>1. Ограничиваться парааксиальными лучами (применять диафрагмы). 2. Склеивать собирающую и рассеивающую линзы с разными показателями преломления</p> 
Кома	<p>Если через оптическую систему проходит широкий пучок от светящейся точки, расположенной не на оптической оси, то изображение точки — в виде светлого пятнышка, напоминающего кометный хвост</p>	<p>Приемы такие же, как при сферической аберрации</p>
Хроматическая аберрация	<p>При падении на оптическую систему белого света разные монохроматические лучи фокусируются в разных точках (см. рисунок), поэтому изображение размыто и по краям окрашено</p> 	<p>Так же, как и в случае сферической аберрации</p> 
Дисторсия	<p>При больших углах падения лучей на линзу нарушается геометрическое подобие между предметом (прямоугольная сетка) и изображением — <i>подушкообразная</i> и <i>бочкообразная</i> дисторсия</p> 	<p>Соответствующий подбор составляющих частей оптической системы</p>
Астигматизм	<p>Погрешность, обусловленная неодинаковостью кривизны оптической поверхности в разных плоскостях сечения падающего на линзу светового пучка. Так, изображение точки, удаленной от главной оптической оси, наблюдается в виде расплывчатого пятна эллиптической формы, которое может вырождаться либо в вертикальную, либо в горизонтальную прямую</p>	<p>Подбор радиусов кривизны преломляющих поверхностей и их фокусных расстояний</p>

## 5.1.4. ФОТОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЕДИНИЦЫ

### Фотометрия

Раздел оптики, занимающийся вопросами измерения интенсивности света и его источников. В фотометрии используются:

#### Энергетические величины

Характеризуют энергетические параметры оптического излучения относительно к его действию на приемники излучения.

#### Световые величины

Характеризуют физиологические действия света и оцениваются по воздействию на глаз (исходят из так называемой средней чувствительности глаза) или другие приемники излучения.

### 5.18 Энергетические величины

Величина	Обозначение	Определение	Формула	Единица
Поток излучения	$\Phi_e$	Величина, равная отношению энергии $W$ излучения ко времени $t$ , за которое излучение произошло	$\Phi_e = \frac{W}{t}$	Ватт (Вт)
Энергетическая светимость (излучательность)	$R_e$	Величина, равная отношению потока излучения $\Phi_e$ , испускаемого поверхностью, к площади $S$ сечения, сквозь которое этот поток проходит	$R_e = \frac{\Phi_e}{S}$	Ватт на метр в квадрате (Вт/м <sup>2</sup> )
Энергетическая сила света (сила излучения)	$I_e$	Величина, равная отношению потока излучения $\Phi_e$ источника к телесному углу $\omega$ , в пределах которого это излучение распространяется	$I_e = \frac{\Phi_e}{\omega}$	Ватт на стерадиан (Вт/ср)
Энергетическая яркость (лучистость)	$B_e$	Величина, равная отношению энергетической силы света $\Delta I_e$ элемента излучающей поверхности к площади $\Delta S$ проекции этого элемента на плоскость, перпендикулярную направлению наблюдения	$B_e = \frac{\Delta I_e}{\Delta S}$	Ватт на стерадиан-метр в квадрате Вт/(ср · м <sup>2</sup> )

### 5.19 Световые величины

Величина	Обозначение	Определение	Формула	Единица
Световой поток	$\Phi$	Мощность оптического излучения по вызываемому им световому ощущению (по его действию на селективный приемник света с заданной спектральной чувствительностью)		Люмен (лм)
Светимость	$R$	Величина, равная отношению светового потока $\Phi$ к площади $S$ , сквозь которую этот поток проходит	$R = \frac{\Phi}{S}$	Люмен на метр в квадрате (лм/м <sup>2</sup> )
Освещенность	$E$	Величина, равная отношению светового потока $\Phi$ , падающего на поверхность, к площади $S$ этой поверхности	$E = \frac{\Phi}{S}$	Люкс (лк)

## 5.2 Интерференция света

### 5.2.1. ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА — ОСНОВА ВОЛНОВОЙ ОПТИКИ

#### Волновая оптика

Раздел оптики, изучающий совокупность явлений, в которых проявляется волновая природа света.

#### Принцип Гюйгенса

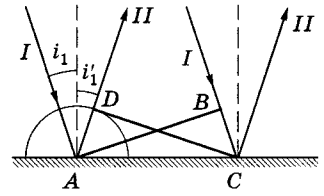
Каждая точка, до которой доходит волна, служит центром вторичных волн, а огибающая этих волн дает положение волнового фронта в следующий момент времени (волновой фронт — геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени  $t$ ). Этот принцип — основа волновой оптики.

## 5.20 Принцип Гюйгенса и законы отражения и преломления

### Закон отражения

На границу раздела двух сред падает плоская волна (фронт волны — плоскость  $AB$ ), распространяющаяся вдоль направления  $I$ .

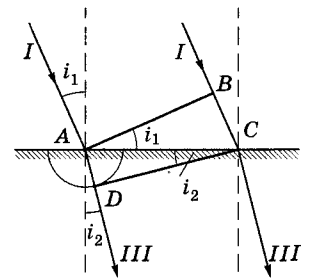
Когда фронт волны достигнет отражающей поверхности в точке  $A$ , эта точка начнет излучать вторичную волну. Для прохождения волной расстояния  $BC$  требуется время  $\Delta t = \frac{BC}{v}$ .



За это же время фронт вторичной волны достигнет точек полусферы, радиус  $AD$  которой равен  $v\Delta t = BC$ . Положение фронта отраженной волны в этот момент времени в соответствии с принципом Гюйгенса задается плоскостью  $DC$ , а направление распространения этой волны — лучом  $II$ . Из равенства треугольников  $ABC$  и  $ADC$  вытекает закон отражения: угол отражения  $i_1'$  равен углу падения  $i_1$ .

### Закон преломления

Плоская волна (фронт волны — плоскость  $AB$ ), распространяющаяся в вакууме вдоль направления  $I$  со скоростью света  $c$ , падает на границу раздела со средой, в которой скорость ее распространения равна  $v$ . Если время, затрачиваемое волной для прохождения пути  $BC$ , равно  $\Delta t$ , то  $BC = c\Delta t$ . За это же время фронт волны, возбуждаемый точкой  $A$  в среде со скоростью  $v$ , достигнет точек полусферы, радиус которой  $AD = v\Delta t$ . Положение фронта преломленной волны в этот момент времени в соответствии с принципом Гюйгенса задается плоскостью  $DC$ , а направление ее распространения — лучом  $III$ . Из рисунка следует, что



$$AC = \frac{BC}{\sin i_1} = \frac{AD}{\sin i_2}, \text{ т. е. } \frac{c\Delta t}{\sin i_1} = \frac{v\Delta t}{\sin i_2},$$

откуда закон преломления

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{c}{v} = n.$$

## 5.2.2. ВРЕМЕННАЯ И ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОГЕРЕНТНОСТЬ

### 5.21 Когерентность

#### Когерентность

Согласованное протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых процессов.

#### Монохроматические волны

Неограниченные в пространстве волны одной определенной и строго постоянной частоты.

#### Волновой цуг

$$\tau \leq 10^{-8} \text{ с}$$

Прерывистое излучение света атомами и виде отдельных коротких импульсов.

#### Время когерентности

$$\tau_{\text{ког}}$$

Средняя продолжительность одного цуга (когерентность существует только в пределах одного цуга, и время когерентности не может превышать времени высвечивания атома ( $\tau_{\text{ког}} < \tau$ )).

#### Длина когерентности

$$l_{\text{ког}} = c \tau_{\text{ког}}$$

Расстояние, при прохождении которого две или несколько волн утрачивают когерентность.

#### Временная когерентность

Когерентность колебаний, которые совершаются в одной и той же точке пространства, определяемая степенью монохроматичности волн.

#### Пространственная когерентность

Когерентность колебаний, которые совершаются в один и тот же момент времени в разных точках плоскости, перпендикулярной направлению распространения волн.

#### Радиус когерентности

$$r_{\text{ког}} \sim \frac{\lambda}{\phi}$$

Максимальное поперечное направлению распространения волны расстояние, на котором возможно проявление интерференции.

[ $c$  — скорость распространения света в вакууме;  $\phi$  — угловой размер источника]

### 5.22 Когерентные свойства различных источников света

Источник света	Ширина спектра частот ( $\Delta\nu$ )	Длина когерентности ( $l_{\text{ког}}$ )
Белый свет	~200 ТГц	~1,5 мкм
Спектральная лампа (300 К)	1,5 ГГц	20 см
Kr-спектральная лампа (77 К)	375 МГц	80 см
Полупроводниковый лазер (GaAlAs)	2 МГц	150 м
He—Ne-лазер	150 кГц	2 км

## 5.2.3. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО СВЕТА

#### Интерференция света

Частный случай общего явления интерференции волн, заключающийся в пространственном перераспределении энергии светового излучения при суперпозиции когерентных электромагнитных волн.

## 5.23 Интенсивности максимумов и минимумов в случае интерференции света

$$E_1 = E_{01} \cos(\omega t + \varphi_1),$$

$$E_2 = E_{02} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$E^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$I_{\max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$$

$$I_{\min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$$

Складываемые монохроматические световые волны (векторы напряженностей электрического поля волн  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$ ) в точке наблюдения совершают колебания вдоль одной прямой.

Амплитуда результирующего колебания в рассматриваемой точке.

Интенсивность результирующей волны.

Интенсивность в случае *синфазных* колебаний (фазы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  одинаковы или отличаются на четное число  $\pi$ ).

Интенсивность в случае *противофазных* колебаний (фазы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  отличаются на нечетное число  $\pi$ ).

[ $E_{01}$  и  $E_{02}$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — амплитуды и начальные фазы колебаний;  $I \sim E^2$  (поскольку волны когерентны,  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$  имеет постоянное во времени (но свое для каждой точки пространства) значение]

## 5.24 Связь между разностью фаз и оптической разностью хода

$$L = ns$$

Оптическая длина пути ( $L$ ).

$$\Delta = L_2 - L_1$$

Оптическая разность хода двух световых волн ( $\Delta$ ).

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} (L_2 - L_1)$$

Разность фаз двух когерентных световых волн ( $\delta$ ).

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta$$

Связь между разностью фаз  $\delta$  и оптической разностью хода  $\Delta$ .

[ $n$  — показатель преломления среды;  $s$  — геометрическая длина пути световой волны в среде;  $\lambda_0$  — длина волны в вакууме]

## 5.25 Условия интерференционных максимумов и минимумов

$\Delta$	$\delta$	Результат
$\Delta = \pm m \lambda_0$ ( $m = 0, 1, 2, \dots$ )	$\delta = \pm 2m\pi$	<b>Максимум</b> (колебания, возбуждаемые в точке, совершаются в одинаковой фазе)
$\Delta = \pm (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2}$ ( $m = 0, 1, 2, \dots$ )	$\delta = \pm (2m + 1)\pi$	<b>Минимум</b> (колебания, возбуждаемые в точке, совершаются в противофазе)

[ $\Delta$  — оптическая разность хода;  $\delta$  — разность фаз;  $\lambda_0$  — длина волны в вакууме]

### 5.2.4. ПОЛУЧЕНИЕ КОГЕРЕНТНЫХ ПУЧКОВ ДЕЛЕНИЕМ ВОЛНОВОГО ФРОНТА

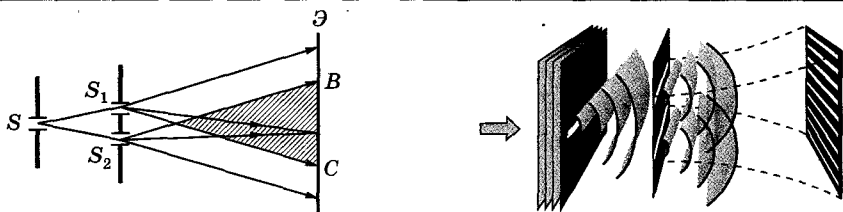
Для наблюдения интерференции света от реальных (некогерентных) источников необходимо свет от одного и того же источника разделить на два пучка (или несколько пучков) и затем свести эти пучки вместе. Способов деления волны от первичного источника на две когерентные



между собой волны два: *деление волнового фронта* (метод Юнга, зеркала Френеля, ...) и *деление амплитуды* (интерференция в тонких пленках).

Метод получения когерентных пучков *делением волнового фронта* (он пригоден только для достаточно малых источников) заключается в том, что исходящий из источника пучок делится на два, а при наложении их друг на друга разность хода между интерферирующими лучами должна быть меньше длины когерентности.

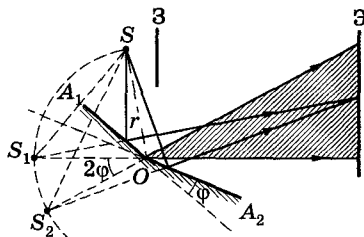
## 5.26 Метод Юнга



Роль вторичных когерентных источников  $S_1$  и  $S_2$  играют две узкие щели, освещаемые одним источником малого углового размера, а в более поздних опытах свет пропускался через узкую щель  $S$ , равноудаленную от двух других щелей. Интерференционная картина наблюдается в области перекрытия световых пучков, исходящих из  $S_1$  и  $S_2$ .

## 5.27 Зеркала Френеля

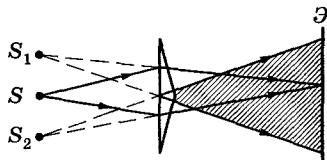
Свет от источника  $S$  падает расходящимся пучком на два плоских зеркала  $A_1O$  и  $A_2O$ , расположенных друг относительно друга под углом, лишь немного отличающимся от  $180^\circ$  (угол  $\varphi$  мал). Учитывая правила построения изображения в плоских зеркалах, можно показать, что и источник и его изображения  $S_1$  и  $S_2$  (угловое расстояние между ними равно  $2\varphi$ ) лежат на одной и той же окружности радиуса  $r$  с центром в  $O$  (точка соприкосновения зеркал).



Световые пучки, отражаясь от зеркал, образуют два мнимых изображения источника  $S_1$  и  $S_2$ , которые действуют как когерентные источники (получены разбиением одного и того же волнового фронта, исходящего из  $S$ ). Интерференционная картина наблюдается в области взаимного перекрытия отраженных пучков (экран  $\mathcal{E}$  защищен от прямого попадания света заслонкой  $\mathcal{Z}$ ).

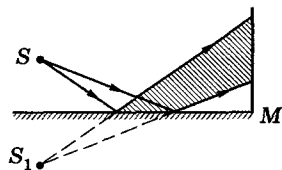
## 5.28 Бипризма Френеля

Образуется двумя одинаковыми сложеными основаниями призмами с малыми преломляющими углами. Свет от точечного источника  $S$  преломляется в обеих призмах, в результате чего за бипризмой распространяются световые лучи, как бы исходящие из мнимых источников  $S_1$  и  $S_2$ , являющихся когерентными. В заштрихованной на рисунке области — области пересечения преломленных фронтов — наблюдается интерференционная картина.



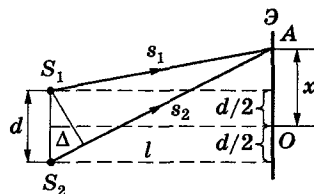
## 5.29 Зеркало Ллойда

Точечный источник  $S$  находится на очень близком расстоянии к поверхности плоского зеркала  $M$ , поэтому свет отражается зеркалом под углом, близким к скользющему. Когерентными источниками служат первичный источник  $S$  и его мнимое изображение  $S_1$  в зеркале.



## 5.30 Интерференционная картина от двух когерентных источников

Две узкие щели  $S_1$  и  $S_2$  расположены близко друг к другу и являются когерентными источниками — реальными или мнимыми изображениями источника в какой-то оптической системе. Результат интерференции — в некоторой точке  $A$  экрана, параллельного обоим щелям и расположенного от них на расстоянии  $l$  ( $l \gg d$ ). Начало отсчета выбрано в точке  $O$ , симметричной относительно щелей. Интенсивность в любой точке экрана, лежащей на расстоянии  $x$  от  $O$ , определяется оптической разностью хода  $\Delta = s_2 - s_1$ .



$$\Delta = \frac{xd}{l}$$

Оптическая разность хода (см. построение и  $l \gg d$ ).

$$x_{\max} = \pm m \frac{l}{d} \lambda_0$$

$(m = 0, 1, 2, \dots)$

Максимумы интенсивности (учтено условие интерференционного максимума).

$$x_{\min} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{l}{d} \lambda_0$$

$(m = 0, 1, 2, \dots)$

Минимумы интенсивности (учтено условие интерференционного минимума).

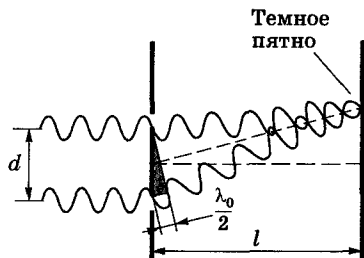
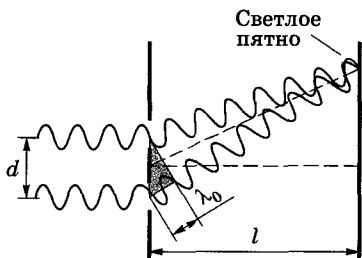
$$b = \frac{l}{d} \lambda_0$$

**Ширина интерференционной полосы** (расстояние между двумя соседними максимумами (или минимумами)).

Интерференционная картина, создаваемая на экране двумя когерентными источниками света, представляет собой чередование светлых и темных полос, параллельных друг другу. Главный максимум, соответствующий  $m = 0$ , проходит через точку  $O$ . Вверх и вниз от него на равных расстояниях друг от друга располагаются максимумы (минимумы) первого ( $m = 1$ ), второго ( $m = 2$ ) порядков и т. д. Описанная картина справедлива лишь для монохроматического света.

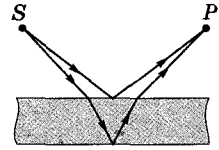
[ $\lambda_0$  — длина волны в вакууме]

**Возникновение максимумов и минимумов интерференции с точки зрения волновой теории**



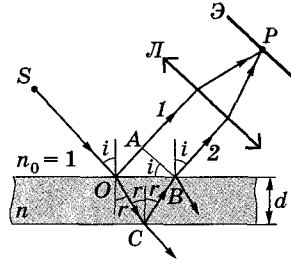
## 5.2.5. ПОЛУЧЕНИЕ КОГЕРЕНТНЫХ ПУЧКОВ ДЕЛЕНИЕМ АМПЛИТУДЫ

Монохроматический свет от точечного источника  $S$ , падая на тонкую прозрачную плоскопараллельную пластинку (см. рисунок), отражается двумя поверхностями этой пластинки: верхней и нижней. В любую точку  $P$ , находящуюся с той же стороны пластинки, что и  $S$ , приходят два луча, которые дают интерференционную картину. На пластинке происходит деление амплитуды, поскольку фронты волн на ней сохраняются, меняя лишь направление своего движения.



### 5.31 Интерференция от плоскопараллельной пластинки

Лучи 1 и 2, идущие от  $S$  к  $P$  (точка  $P$  на экране, расположенном в фокальной плоскости линзы), порождены одним падающим лучом и после отражения от верхней и нижней поверхностей пластинки параллельны друг другу. Если оптическая разность хода лучей 1 и 2 мала по сравнению с длиной когерентности падающей волны, то они когерентны, а интерференционная картина определяется оптической разностью хода между интерферирующими лучами.



**Оптическая разность хода между интерферирующими лучами от точки  $O$  до плоскости  $AB$**

$$\Delta = n(|OC| + |CB|) - |OA| \pm \frac{\lambda_0}{2}, \quad |OC| = |CB| = \frac{d}{\cos r}, \quad n(|OC| + |CB|) = \frac{2nd}{\cos r},$$

$$|OA| = |OB| \sin i = 2d \operatorname{tg} r \sin i.$$

$$\Delta = 2dn \cos r \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2dn \sqrt{1 - \sin^2 r} \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2}$$

[ $n$  — показатель преломления пленки;  $d$  — толщина плоскопараллельной пластинки;  $i$  — угол падения;  $r$  — угол преломления;  $\lambda_0$  — длина волны в вакууме, член  $\pm \lambda_0/2$  обусловлен потерей полуволны при отражении света от границы раздела. При  $n > n_0$  потеря полуволны в точке  $O$  и  $\lambda_0/2$  будет иметь знак минус, при  $n < n_0$  — в точке  $C$  и  $\lambda_0/2$  надо брать с плюсом;  $m$  — порядок интерференции]

**Условие интерференционного максимума**

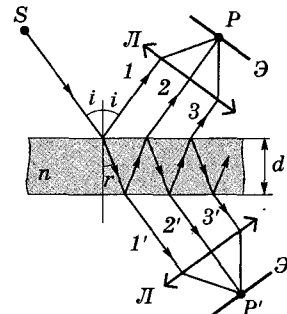
$$2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

**Условие интерференционного минимума**

$$2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

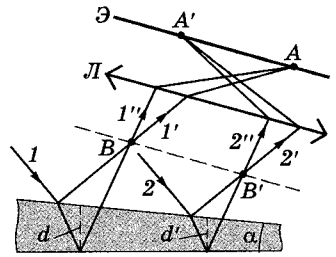
Оптическая разность хода	Наблюдение в отраженном свете (точка $P$ )		Наблюдение в проходящем свете (точка $P'$ )	
	max	$(m + \frac{1}{2})\lambda_0$	max	$(2m + 1)\lambda_0$
$2dn \cos r = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i}$	min	$(2m + 1)\lambda_0$	min	$(m + \frac{1}{2})\lambda_0$

Максимумам интерференции в отраженном свете соответствуют минимумы в проходящем, и наоборот (оптическая разность хода для проходящего и отраженного света отличается на  $\lambda_0/2$ ).



### 5.32 Интерференция от пластинки переменной толщины

На клин (угол  $\alpha$  между боковыми гранями мал) падает плоская волна (пусть направление ее распространения совпадает с параллельными лучами 1 и 2). При определенном взаимном положении клина и линзы лучи 1' и 1'', отразившись от верхней и нижней поверхности клина, пересекутся в некоторой точке  $A$ , являющейся изображением точки  $B$ . Так как лучи 1' и 1'' когерентны, то они будут интерферировать. Лучи 2' и 2'', образовавшиеся при делении луча 2, падающего в другую точку клина, собираются линзой в точке  $A'$ . Оптическая разность хода уже определится толщиной  $d'$ . На экране возникает система интерференционных полос. Если источник расположен далеко от поверхности клина, а угол  $\alpha$  ничтожно мал, то оптическая разность хода между интерферирующими лучами достаточно точно вычисляется по формуле для плоскопараллельной пластинки 5.31.



#### Примеры наблюдения интерференционных полос:

интерференционные полосы, получающиеся при отражении света от двух стеклянных плоских поверхностей, ограничивающих тонкий воздушный клин;



интерференционная картина, полученная в свете, отраженном от двух поверхностей неоднородной по толщине пластины стекла.

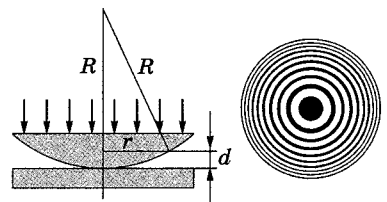


### 5.33 Полосы равной толщины и равного наклона

Вид полос	Определение	Где локализованы
Полосы равного наклона	Интерференционные полосы, возникающие в результате наложения лучей, падающих на плоскопараллельную пластинку под одинаковыми углами	Локализованы в бесконечности. Для их наблюдения используют собирающую линзу и экран, расположенный в фокальной плоскости линзы
Полосы равной толщины	Интерференционные полосы, возникающие в результате интерференции от мест одинаковой толщины	Локализованы вблизи поверхности клина (над или под клином — зависит от конфигурации клина). Если свет падает на пластинку нормально, то полосы равной толщины локализуются на верхней поверхности клина

### 5.34 Кольца Ньютона — классический пример полос равной толщины

Наблюдаются при отражении света от воздушного зазора, образованного плоскопараллельной пластинкой и соприкасающейся с ней плосковыпуклой линзой с большим радиусом кривизны. Параллельный пучок света падает на плоскую поверхность линзы нормально; полосы равной толщины имеют вид concentric окружностей.



## Оптическая разность хода (в отраженном свете)

$$\Delta = 2d + \frac{\lambda_0}{2}, \quad \Delta = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2}$$

Учли формулу  $\Delta = 2dncos \eta \pm \frac{\lambda_0}{2}$  **5.31**.

### Радиус $m$ -го светлого кольца

$$r_m = \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)(\lambda_0 R)} \quad (m = 1, 2, 3,$$

Приравняли  $\Delta$  к условию интерференционного максимума **5.31**.

### Радиус $m$ -го темного кольца

$$r_m^* = \sqrt{m\lambda_0 R} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

Приравняли  $\Delta$  к условию интерференционного минимума **5.31**.

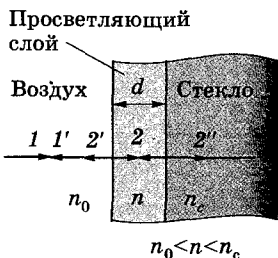
[ $n = 1$  (показатель преломления воздуха);  $i = 0$  (угол падения);  $d$  — ширина воздушного зазора ( $d \ll R$ );  $r$  — радиус кривизны окружности, всем точкам которой соответствует одинаковый зазор;  $R$  — радиус кривизны линзы;  $\lambda_0$  — длина волны света в вакууме]

## 5.2.6. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ

### 5.35 Просветление оптики

Это сведение к минимуму коэффициентов отражения поверхностей оптических систем путем нанесения на них прозрачных пленок, толщина которых соизмерима с длиной волны оптического излучения.

Толщину пленки  $d$  и показатели преломления пленки ( $n$ ) и стекла ( $n_c$ ) подбирают так, чтобы интерферирующие лучи  $1'$  и  $2'$  гасили друг друга (амплитуды волн должны быть равны (для этого  $n = \sqrt{n_c}$ ), а разность фаз между ними должна составлять  $\pi$ ).



### Условие интерференционного минимума (при нормальном падении света на пленку)

$$2nd = (2m + 1)\frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

Обычно выбирают  $m = 0$ , тогда  $nd = \frac{\lambda_0}{4}$ .

### Толщина просветляющей пленки

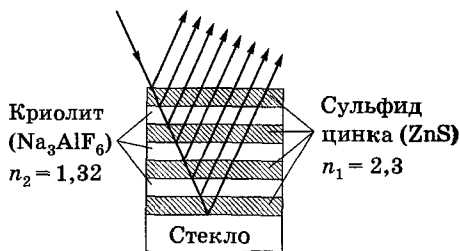
$$d = \frac{(2m + 1)\lambda_0}{4n}$$

[ $nd$  — оптическая толщина пленки]

### 5.36 Высокоотражающие слои

Многослойные покрытия, в которых наблюдается *многолучевая интерференция*, возникающая при наложении большого числа когерентных световых пучков.

Пленки имеют *одинаковую оптическую толщину* ( $n_i d_i = \lambda_0/4$ ). На границе раздела пленок возникает отражение, в результате чего



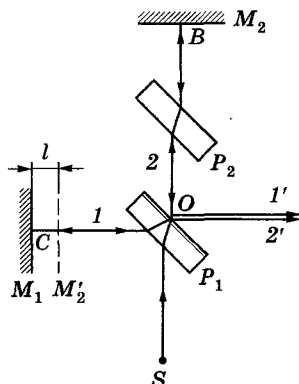
образуется система из большого числа интерферирующих лучей. Все отраженные волны синфазны и усиливают друг друга. Для некоторой области длин волн  $\lambda_0$  (удовлетворяющей условию  $n_1 d_1 = n_2 d_2 = \dots = \lambda_0/4$ ) получаются максимумы, ширина которых тем меньше, чем больше число интерферирующих пучков. Высокоотражающие слои «работают» в довольно узкой спектральной области.

### 5.2.7. ИНТЕРФЕРОМЕТРЫ

Оптические приборы, с помощью которых можно пространственно разделить пучок света на два или большее число когерентных пучков и соединить между ними определенную разность хода. Сведя эти пучки вместе, наблюдают интерференцию.

#### 5.37 Интерферометр Майкельсона (пример двулучевого интерферометра)

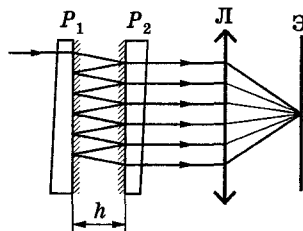
Монохроматический свет от источника  $S$  падает под углом  $45^\circ$  на плоскопараллельную пластинку  $P_1$ . Сторона пластинки, удаленная от  $S$ , посеребренная и полупрозрачная, разделяет луч на две части: луч  $1$  (отражается от посеребренного слоя) и луч  $2$  (проходит через него). Луч  $1$  отражается от зеркала  $M_1$  и, возвращаясь обратно, вновь проходит через пластинку  $P_1$  (луч  $1'$ ). Луч  $2$  идет к зеркалу  $M_2$ , отражается от него, возвращается обратно и отражается от пластинки  $P_1$  (луч  $2'$ ). Так как первый из лучей проходит пластинку  $P_1$  дважды, то для компенсации возникающей разности хода на пути второго луча ставится пластинка  $P_2$  (точно такая же, как и  $P_1$ , только не покрытая слоем серебра).



Лучи  $1'$  и  $2'$  когерентны: следовательно, будет наблюдаться интерференция, соответствующая интерференции в воздушном слое, образованном зеркалом  $M_1$  и мнимым изображением  $M_2'$  зеркала  $M_2$  в пластинке  $P_2$ . По незначительному смещению интерференционной картины можно судить о малом перемещении одного из зеркал и использовать интерферометр для точного ( $\approx 10^{-7}$  м) измерения длин (измерение длины тела, длины волны света и т. д.).

#### 5.38 Интерферометр Фабри—Перо (пример многолучевого интерферометра)

Состоит из двух стеклянных (или кварцевых) пластинок:  $P_1$  и  $P_2$ . Их внутренние поверхности плоские, параллельны между собой, и на них нанесены зеркальные покрытия с высоким коэффициентом отражения ( $\approx 85-98\%$ ). Для устранения света, отраженного внешними поверхностями, их изготавливают так, что они составляют небольшой угол с внутренними поверхностями. Пластины могут передвигаться в перпендикулярном друг относительно друга направлении.

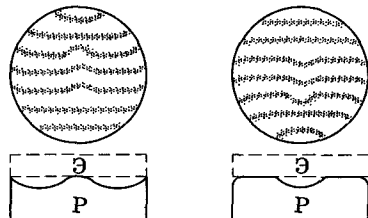


Параллельный пучок света (на рисунке показан ход одного из лучей) в результате многократного отражения от зеркал образует большое число параллельных когерентных пучков с постоянной разностью хода

$\Delta = 2nh \cos r$  между соседними пучками, но различной интенсивности. В результате многолучевой интерференции в фокальной плоскости линзы возникает интерференционная картина, представляющая собой семейство кривых равного наклона — концентрические кольца с резкими интенсивными максимумами, положение которых определяется из условия  $\Delta = m\lambda$  ( $m$  — целое число), т. е. зависит от длины волны. Следовательно, интерферометр Фабри—Перо разлагает сложное излучение в спектр и может применяться в качестве спектрального прибора высокой разрешающей способности.

## 5.39 Интерференционный метод контроля поверхности

[Р — испытываемый образец; Э — эталонная пластинка. Вверху — схематическое изображение интерференционной картины (полосы равной толщины)]



## 5.3. Дифракция света

### 5.3.1. ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА—ФРЕНЕЛЯ

#### Дифракция света

Совокупность явлений, наблюдаемых при распространении света сквозь малые отверстия, вблизи границ непрозрачных тел и т. д. и обусловленных волновой природой света.

Явление дифракции, *общее для всех волновых процессов*, имеет особенности для света, а именно здесь, как правило, длина волны  $\lambda$  много меньше размеров  $d$  преград (или отверстий). Поэтому наблюдать дифракцию можно только на достаточно больших расстояниях  $l$  от преграды ( $l \geq d^2/\lambda$ ).

## 5.40 Пояснение принципа Гюйгенса—Френеля

### Принцип Гюйгенса

Это **5.29** — геометрический принцип. Он не затрагивает, по существу, вопроса об амплитуде, а следовательно, и об интенсивности распространяющихся за преградой световых волн.

Френель вложил в принцип Гюйгенса физический смысл, дополнив его идеей интерференции вторичных волн.

### Принцип Гюйгенса—Френеля

Световая волна, возбуждаемая источником  $S$ , может быть представлена как результат суперпозиции когерентных вторичных волн, «излучаемых» фиктивными источниками.

◆ Такими источниками могут служить бесконечно малые элементы любой замкнутой поверхности, охватывающей источник  $S$ . Обычно в качестве такой поверхности выбирают одну из волновых поверхностей, поэтому все фиктивные источники действуют синфазно. Таким образом, для определения в некоторой точке пространства результирующей интенсивности надо учесть интерференцию всех этих вторичных волн.

Френель исключил возможность возникновения обратных вторичных волн и предположил, что если между источником и точкой наблюдения находится непрозрачный экран с отверстием, то на поверхности экрана амплитуда вторичных волн равна нулю, а в отверстиях — такая же, как при отсутствии экрана.

Учет амплитуд и фаз вторичных волн позволяет в каждом конкретном случае найти амплитуду (интенсивность) результирующей волны в любой точке пространства, т. е. определить закономерности распространения света как в случае свободного распространения световых волн (прямолинейное распространение света), так и в случае наличия преград (дифракция).

### 5.3.2. МЕТОД ЗОН ФРЕНЕЛЯ. ЗОННЫЕ ПЛАСТИНКИ

#### 5.41 Построение зон Френеля

Согласно принципу Гюйгенса—Френеля, действие источника  $S$  заменяют действием воображаемых источников, расположенных на волновой поверхности  $\Phi$ . Амплитуда световой волны находится в точке  $M$ .

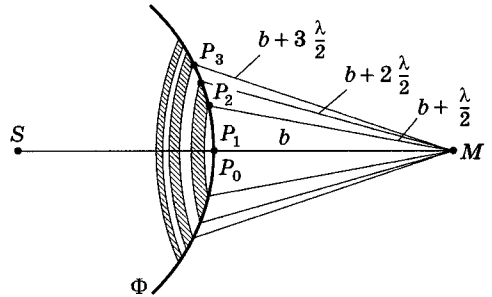
Френель волновую поверхность  $\Phi$  разбил на кольцевые зоны такого размера, чтобы расстояния от краев зоны до точки  $M$  отличались на  $\lambda/2$ :

$$P_1M - P_0M = P_2M - P_1M = P_3M - P_2M = \dots = \lambda/2.$$

Колебания от соседних зон проходят до точки  $M$  расстояния, отличающиеся на  $\lambda/2$ , поэтому в точку  $M$  они приходят в противоположной фазе и при наложении эти колебания будут взаимно ослаблять друг друга. Тогда амплитуда результирующего светового колебания в точке  $M$

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \quad (*)$$

[ $A_1, A_2, \dots$  — амплитуды колебаний, возбуждаемых 1-й, 2-й, ... зонами]



#### 5.42 Площади зон Френеля

Внешняя граница  $m$ -й зоны выделяет на волновой поверхности сферический сегмент высоты  $h_m$ . Учитываем, что  $\lambda \ll a$  и  $\lambda \ll b$ .

Высота сферического сегмента

$$h_m = \frac{bm\lambda}{2(a+b)}$$

Площадь сферического сегмента

$$\sigma_m = 2\pi ah_m = \frac{\pi ab\lambda m}{a+b}$$

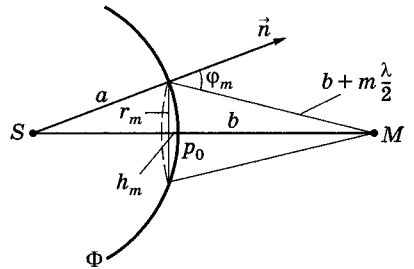
Площадь  $m$ -й зоны Френеля

$$\Delta\sigma_m = \sigma_m - \sigma_{m-1} = \frac{\pi ab\lambda}{a+b}$$

Радиус внешней границы  $m$ -й зоны Френеля

$$r_m = \sqrt{\frac{mab}{a+b}\lambda}$$

Учти, что  $h_m \ll a$ .



Построение Френеля разбивает волновую поверхность сферической волны на равновеликие зоны ( $\Delta\sigma_m$  не зависит от  $m$ ).



## 5.43 Прямолинейное распространение света

$$A_1 > A_2 > A_3 > A_4 > \dots$$

Действие на точку  $M$  тем меньше, чем больше угол  $\varphi_x$  (см. рисунок 5.42); с ростом  $m$  уменьшается интенсивность излучения в направлении  $M$ .

Допустимое возможное приближение

$$A_m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}$$

Общее число зон, уместающихся на полусфере огромно, а их площади очень малы.

Амплитуда результирующих колебаний в точке  $M$

$$A \approx \frac{A_1}{2}$$

Учтена формула (\*), приведенная в 5.41.

Радиус внешней границы первой зоны Френеля  
(например, при  $a = b = 10$  см,  $\lambda = 500$  нм)

$$r_1 = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} \lambda = 0,158 \text{ мм}$$

Таким образом, распространение света от  $S$  к  $M$  происходит так, будто световой поток распространяется внутри очень узкого канала вдоль  $SM$ , т. е. *прямолинейно*. Следовательно, принцип Гюйгенса—Френеля объясняет *прямолинейное распространение света в однородной среде*.

## 5.44 Зонные пластинки

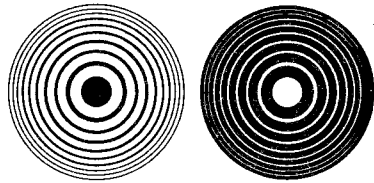
Зонные пластинки

В простейшем случае стеклянные пластинки, на поверхность которых нанесены по принципу расположения зон Френеля чередующиеся прозрачные и непрозрачные кольца радиусами, определяемыми для заданных значений  $a$ ,  $b$  и  $\lambda$  выражением

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m \lambda.$$

Если поместить зонную пластинку в строго определенном месте (на расстоянии  $a$  от точечного источника и на расстоянии  $b$  от точки наблюдения на линии, соединяющей эти две точки), то она для света длиной волны  $\lambda$  перекроет четные зоны и оставит свободными нечетные, начиная с центральной. В результате результирующая амплитуда  $A = A_1 + A_3 + A_5 + \dots$  должна быть больше, чем при полностью открытом волновом фронте. Опыт подтверждает эти выводы: зонная пластинка увеличивает освещенность, действуя подобно собирающей линзе.

[ $m = 0, 2, 4, \dots$  для прозрачных и  $m = 1, 3, 5, \dots$  для непрозрачных колец]



### 5.3.3. ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ (ДИФРАКЦИЯ В СХОДЯЩИХСЯ ЛУЧАХ)

Дифракция Френеля (дифракция в сходящихся лучах)

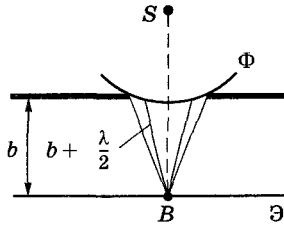
Относится к случаю, когда на препятствие падает сферическая или плоская волна, а дифракционная картина наблюдается на экране, находящемся за препятствием на конечном от него расстоянии.

## 5.45 Дифракция на круглом отверстии

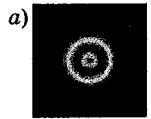
### Схема дифракции на круглом отверстии

### Дифракционная картина

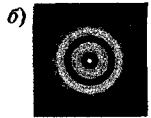
На пути сферической волны от точечного источника  $S$  расположен экран с круглым отверстием. Дифракционная картина наблюдается в точке  $B$  экрана  $\mathcal{E}$ , лежащей на линии, соединяющей  $S$  с центром отверстия. Экран параллелен отверстию.



Отверстие открывает четное число зон Френеля



Отверстие открывает нечетное число зон Френеля



**Анализ результатов.** Вид дифракционной картины зависит от числа зон Френеля, укладывающихся на открытой части волновой поверхности в плоскости отверстия. Амплитуда результирующего колебания, возбуждаемого в точке  $B$  всеми зонами,  $A = \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_m}{2}$  (знак «плюс» соответствует нечетным  $m$ , «минус» — четным  $m$ ).

Если отверстие открывает четное число зон Френеля, то в точке  $B$  наблюдается минимум (рисунок а), если нечетное, то максимум (рисунок б). Наименьшая интенсивность соответствует двум открытым зонам Френеля, максимальная — одной зоне Френеля (в данном случае  $A = A_1$ , т. е. интенсивность вдвое больше, чем в отсутствие непрозрачного экрана с отверстием). При большом диаметре отверстия  $A_m \ll \frac{A_1}{2}$ , т. е. интенсивность такая же, как при полностью открытом волновом фронте.

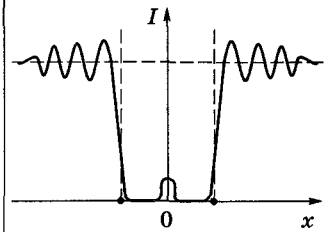
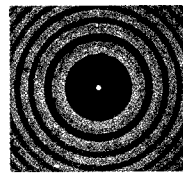
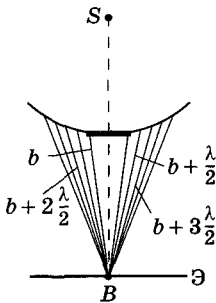
## 5.46 Дифракция на круглом диске

### Схема дифракции на круглом диске

### Дифракционная картина

### Кривая распределения интенсивности

На пути сферической волны от точечного источника  $S$  расположен круглый непрозрачный диск. Дифракционная картина наблюдается в точке  $B$  экрана  $\mathcal{E}$ , лежащей на линии, соединяющей  $S$  с центром диска. Экран параллелен диску.



**Анализ результатов.** Закрытый диском участок волнового фронта надо исключить из рассмотрения и зоны Френеля строить, начиная с краев диска. Если диск закрывает  $m$  зон Френеля, то амплитуда результирующего колебания в точке  $B$  равна

$$A = A_{m+1} - A_{m+2} + A_{m+3} - \dots = \frac{A_{m+1}}{2} + \left( \frac{A_{m+1}}{2} - A_{m+2} + \frac{A_{m+3}}{2} \right) + \dots = \frac{A_{m+1}}{2},$$

т. е. равна половине амплитуды, обусловленной первой открытой зоной Френеля. Следовательно, в точке  $B$  всегда наблюдается максимум — светлое пятно, называемое пятном Пуассона, яркость которого с увеличением размеров диска уменьшается.

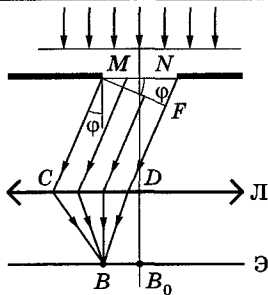
### 5.3.4. ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА (ДИФРАКЦИЯ В ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛУЧАХ)

Относится к случаю, когда источник света и точка наблюдения бесконечно удалены от препятствия, вызвавшего дифракцию. Практически для этого достаточно точечный источник света поместить в фокусе собирающей линзы, а дифракционную картину исследовать в фокальной плоскости второй собирающей линзы, установленной за препятствием.

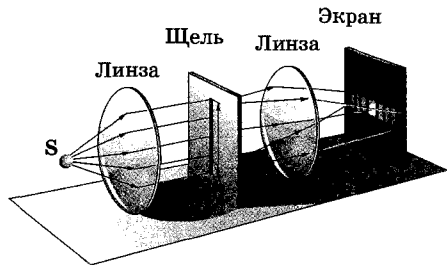
#### 5.47 Дифракция Фраунгофера на щели

Схема дифракции на щели

Плоская монохроматическая световая волна падает нормально плоскости щели шириной  $a$ . Параллельные пучки лучей, выходящие из щели в произвольном направлении  $\varphi$  ( $\varphi$  — угол дифракции), собираются линзой в точке  $B$



Дифракционная картина от щели на экране



#### Построение зон Френеля

Открытую часть волновой поверхности  $MN$  в плоскости щели разбивают на зоны Френеля, имеющие вид полос, параллельных ребру  $M$  и проведенных так, чтобы разность хода от их соответственных точек равнялась  $\lambda/2$ .

$$\Delta = NF = a \sin \varphi$$

Оптическая разность хода между крайними лучами  $MN$  и  $ND$ .

$$\frac{\Delta}{\lambda/2} = \frac{a \sin \varphi}{\lambda/2}$$

Число зон Френеля, уместяющихся на ширине щели.

$$a \sin \varphi = \pm 2m \lambda/2$$

$(m = 1, 2, 3, \dots)$

Условие дифракционного минимума в точке  $B$  (число зон Френеля четное).

$$a \sin \varphi = \pm (2m + 1) \lambda/2$$

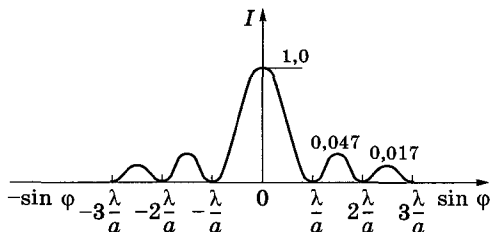
$(m = 1, 2, 3, \dots)$

Условие дифракционного максимума в точке  $B$  (число зон Френеля нечетное).

#### Дифракционный спектр

Зависимость распределения интенсивности на экране от угла дифракции.

Основная часть световой энергии сосредоточена в центральном максимуме. С увеличением угла дифракции интенсивность побочных максимумов резко уменьшается (относительная интенсивность максимумов

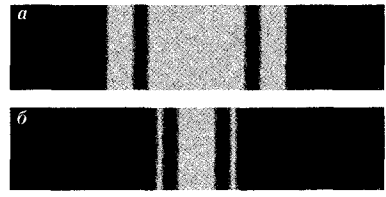
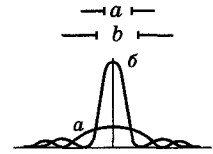


$$I_0 : I_1 : I_2 : \dots = 1 : 0,047 : 0,017 : \dots$$

При освещении белым светом центральный максимум имеет вид белой полоски (он общий для всех длин волн), боковые максимумы радужно окрашены.

# Влияние ширины щели на дифракционную картину

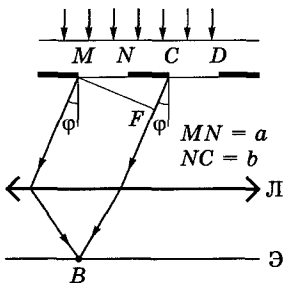
С уменьшением ширины щели центральный максимум расширяется (см. рисунок *a*), с увеличением ширины щели ( $a > \lambda$ ) дифракционные полосы становятся уже и ярче (см. рисунок *b*).



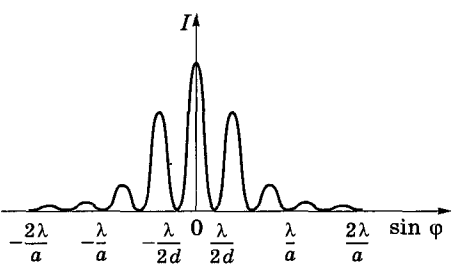
## 5.48 Дифракция на двух щелях

Схема дифракции на двух щелях

Плоская монохроматическая световая волна падает нормально на экран с двумя одинаковыми щелями (*MN* и *CD*) шириной *a*, отстоящими друг от друга на расстоянии *b*; ( $a + b$ ) = *d*.



Дифракционный спектр



Условия	Формула	Обоснование
Главные (прежние минимумы)	$a \sin \varphi = \pm m\lambda$ ( $m = 1, 2, 3, \dots$ )	В тех направлениях, в которых ни одна из щелей не распространяет свет, он не будет распространяться и при двух щелях
Дополнительные минимумы	$d \sin \varphi = \pm(2m + 1)\frac{\lambda}{2}$ ( $m = 0, 1, 2, \dots$ )	Возникают вследствие взаимной интерференции световых лучей, посылаемых двумя щелями. В направлениях, определяемых условием $CF = MC \sin \varphi = (a + b) \sin \varphi = d \sin \varphi = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \dots$ , световые лучи гасят друг друга
Главные максимумы	$d \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2} = \pm m\lambda$ ( $m = 0, 1, 2, \dots$ )	В данных направлениях действие одной щели усиливает действие другой

### Дифракционная картина на двух щелях

- главные минимумы  $a \sin \varphi = \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$
- дополнительные минимумы  $d \sin \varphi = \frac{\lambda}{2}, \frac{3}{2}\lambda, \frac{5}{2}\lambda, \dots$
- главные максимумы  $d \sin \varphi = 0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$

т. е. между двумя главными максимумами располагается дополнительный минимум, а максимумы становятся более узкими, чем в случае одной щели.

## 5.49 Дифракционная решетка

### Одномерная дифракционная решетка

Система параллельных щелей (штрихов) равной толщины, лежащих в одной плоскости и разделенных равными по ширине непрозрачными промежутками.

### Постоянная (период) дифракционной решетки

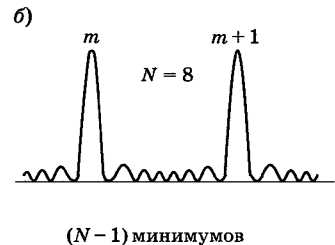
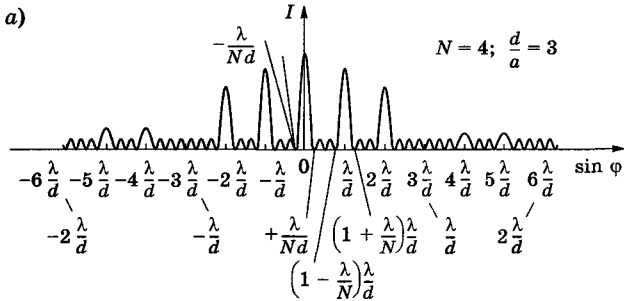
$$d = a + b$$

Суммарная ширина щели  $a$  и непрозрачного промежутка  $b$  между щелями.

### Дифракционная картина на решетке

Результат взаимной интерференции волн, идущих от всех щелей, т. е. осуществляется многолучевая интерференция когерентных дифрагированных пучков света, идущих от всех щелей.

Условия	Формула	Пояснение
Главные минимумы	$a \sin \varphi = \pm m \lambda$ ( $m = 1, 2, 3, \dots$ )	Наблюдаются при условии, соответствующем одной щели
Главные максимумы	$d \sin \varphi = \pm m \lambda$ ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) ( $m$ — порядок главных максимумов)	Если какие-то значения $\varphi$ одновременно удовлетворяют условиям главных максимумов и минимумов, то главные максимумы, отвечающие этим направлениям, не наблюдаются (если $a = d/3$ , то каждый третий главный максимум не наблюдается (см. рисунок $a$ ))
Дополнительные минимумы	$d \sin \varphi = \pm \frac{m' \lambda}{N}$ ( $m' \neq 0, N, 2N, \dots$ )	Между каждыми двумя главными максимумами находятся $N - 1$ дополнительных минимумов. Имеют место также $N - 2$ дополнительных максимумов, интенсивность которых ничтожна по сравнению с главными максимумами (см. рисунок $b$ )

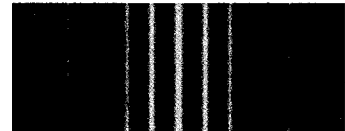


Чем больше число щелей в дифракционной решетке, тем больше световой энергии пройдет через решетку, тем больше минимумов образуется между соседними главными максимумами, т. е. максимумы будут более интенсивными и более острыми. Максимальный порядок спектра, даваемый дифракционной решеткой

$$m_{\max} \leq d/\lambda.$$

[ $N$  — число щелей дифракционной решетки]

$N = 5$



$N = 20$



### 5.3.5. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ РЕШЕТКА. ДИФРАКЦИЯ РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

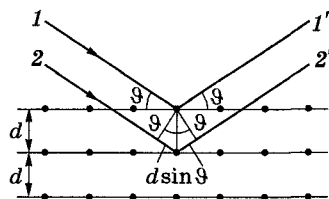
#### Пространственная решетка

Пространственные образования, в которых элементы структуры подобны по форме, имеют геометрически правильное и периодически повторяющееся расположение, а также размеры, соизмеримые с длиной волны электромагнитного излучения. Иными словами, подобные *пространственные образования должны иметь периодичность по трем не лежащим в одной плоскости направлениям. В качестве пространственных решеток могут быть использованы кристаллы.* Расстояние между атомами в кристалле ( $\approx 10^{-10}$  м) таково, что на них может наблюдаться дифракция рентгеновского излучения ( $\lambda \approx 10^{-12}—10^{-8}$  м), так как для наблюдения дифракционной картины необходима соизмеримость постоянной решетки с длиной волны падающего излучения.

#### 5.50 Дифракция рентгеновского излучения на кристалле

##### Схема дифракции рентгеновского излучения на кристалле

Пучок монохроматического рентгеновского излучения (на рисунке показаны параллельные лучи 1 и 2) падает на поверхность кристалла под *углом скольжения*  $\vartheta$  (угол между падающим лучом и кристаллографической плоскостью) и возбуждает атомы кристаллической решетки, которые становятся источниками когерентных вторичных волн 1' и 2', интерферирующих между собой. Результат интерференции волн определяется их разностью хода  $2d \sin \vartheta$  (см. рисунок). Дифракционные максимумы наблюдаются в тех направлениях, в которых все отраженные атомными плоскостями волны находятся в одинаковой фазе (в направлениях, определяемых формулой Вульфа—Брэггов).



##### Формула Вульфа—Брэггов

$$2d \sin \vartheta = m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

[ $d$  — межплоскостное расстояние]

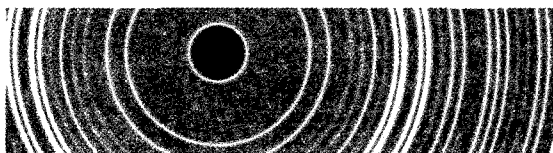
#### 5.51 Применение формулы Вульфа—Брэггов

Измеряемые величины —  $\vartheta$ ,  $m$ .

Известная величина	Определяемая величина	Метод
$\lambda$	$d$	Рентгеноструктурный анализ
$d$	$\lambda$	Рентгеновская спектроскопия

[ $\lambda$  — длина волны рентгеновского излучения;  $\vartheta$  — угол скольжения;  $d$  — межплоскостное расстояние]

#### 5.52 Дифракционная картина, полученная при дифракции рентгеновского излучения на поликристалле ацетоцетата натрия

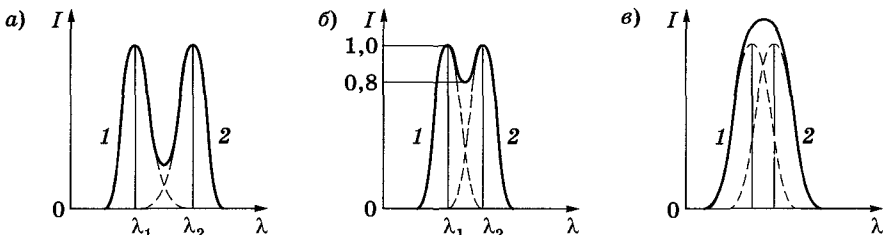


### 5.3.6. РАЗРЕШАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ОПТИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ

Вследствие того что свет имеет волновую природу, *создаваемое оптической системой (даже идеальной!) изображение точечного источника не является точкой, а представляет собой светлое пятнышко, окруженное чередующимися темными и светлыми кольцами* (в случае монохроматического света) или *радужными кольцами* (в случае белого света). Следовательно, принципиально неустранимое явление дифракции задает предел возможной *разрешающей способности оптических приборов* — способности оптических приборов давать раздельное изображение двух близких друг к другу точек предмета.

### 5.53 Критерий Рэлея

Изображения двух близлежащих одинаковых точечных источников или двух близлежащих спектральных линий с равными интенсивностями и одинаковыми симметричными контурами разрешимы (разделены для восприятия), если центральный максимум дифракционной картины от одного источника (линии) совпадает с первым минимумом дифракционной картины от другого.

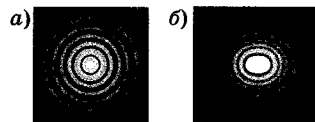


Два соседних максимума

Результирующая интенсивность (сплошные кривые), наблюдающаяся при наложении двух соседних максимумов (пунктирные кривые). На рисунке *a* максимумы разрешены.

При выполнении критерия Рэлея интенсивность «провала» между максимумами составляет 80% интенсивности в максимуме, что является достаточным для разрешения линий  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  (рисунок *b*). На рисунке *c* оба максимума воспринимаются как один.

Сильно увеличенные фотографии изображений, полученных с помощью линзы: а) один точечный источник; б) два точечных источника (на пределе разрешения).

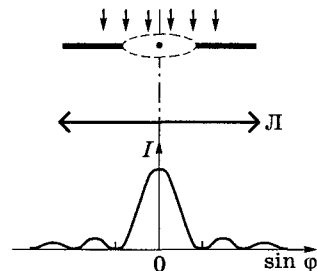


### 5.54 Разрешающая способность объектива

$$R = \frac{1}{\delta\psi}$$

Если на объектив, например телескопа, падает свет от двух очень удаленных предметов (например, звезд), то с хорошим приближением можно говорить о плоской волне. Это позволяет применять формулы, описывающие дифракцию плоских волн на круглом отверстии (оправа объектива).

В данном случае (см. рисунок) в центре дифракционной картины наблюдается светлое



пятно (в нем сконцентрировано 84% светового потока), окруженное чередующимися темными и светлыми кольцами.

[ $d\psi$  — наименьшее угловое расстояние между двумя точками, при котором они еще оптическим прибором разрешаются]

## 5.55 Разрешающая способность спектрального прибора

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$$

[ $\delta\lambda$  — абсолютное значение минимальной разности длин волн двух соседних спектральных линий, при которой эти линии регистрируются отдельно]

### 5.3.7. ДИФРАКЦИОННАЯ РЕШЕТКА КАК СПЕКТРАЛЬНЫЙ ПРИБОР

Положение главных максимумов в дифракционной решетке 5.49 зависит от длины волны:  $d \sin \varphi = \pm m\lambda$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ). Поэтому при пропускании через решетку белого света все максимумы, кроме центрального ( $m = 0$ ), разложатся в спектр, фиолетовая область которого будет обращена к центру дифракционной картины, красная — наружу.

Это свойство используется для исследования спектрального состава света (определения длин волн и интенсивностей всех монохроматических компонентов), т. е. *дифракционная решетка может быть использована как спектральный прибор.*

## 5.56 Характеристики дифракционной решетки

### Угловая дисперсия

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda}$$

или

$$D = \frac{m}{d \cos \varphi}$$

Равна производной от угла отклонения лучей  $\varphi$  по длине волны.

Если угловые размеры  $\Delta\varphi$  малого участка, на который приходится интервал длин волн  $\Delta\lambda$ , то приближенно  $\Delta\varphi = D\Delta\lambda$ , т. е. *угловая дисперсия характеризует степень растянутости спектра в области вблизи данной длины волны.*

[ $d$  — период (постоянная) дифракционной решетки,  $m$  — порядок спектра]

### Разрешающая способность

$$R_{д.р.} = mN$$

Если максимум  $m$ -го порядка для длины волны  $\lambda_2$  наблюдается под углом  $\varphi$ , то  $d \sin \varphi = m\lambda_2$ . При переходе от максимума к соседнему минимуму разность хода меняется на  $\lambda/N$  5.49, где  $N$  — число щелей решетки. Следовательно, минимум  $\lambda_1$ , наблюдаемый под углом  $\varphi_{\min}$ , удовлетворяет условию  $d \sin \varphi_{\min} = m\lambda_1 + \lambda_1/N$ . По критерию Рэля  $\varphi = \varphi_{\min}$ , т. е.  $m\lambda_2 = m\lambda_1 + \lambda_1/N$  или  $\lambda_2/(\lambda_2 - \lambda_1) = mN$ . Так как  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  близки между собой, т. е.  $\lambda_2 - \lambda_1 = \delta\lambda$ , то, согласно  $R = \lambda/(\delta\lambda)$  5.55, получаем  $R_{д.р.} = mN$ , т. е. *разрешающая способность при заданном числе щелей увеличивается при переходе к спектрам высших порядков.*

## 5.4. Распространение света в веществе

### 5.4.1. НОРМАЛЬНАЯ И АНОМАЛЬНАЯ ДИСПЕРСИЯ СВЕТА

## 5.57 Виды дисперсии

### Дисперсия света

Зависимость фазовой скорости света в среде от его частоты.

Так как  $v = c/n$ , то показатель преломления среды оказывается зависящим от частоты  $\nu$  (длины волны  $\lambda$ ).

[ $c$  — скорость распространения света в вакууме, одинаковая для электромагнитных волн любой частоты;  $n$  — показатель преломления среды]



## Нормальная дисперсия

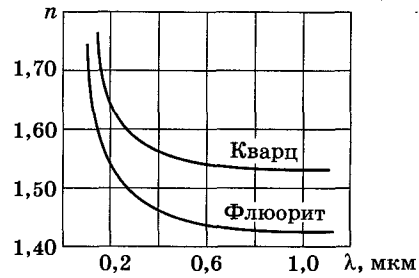
$$\frac{dn}{d\nu} > 0 \quad \text{или} \quad \frac{dn}{d\lambda} < 0$$

$n$  уменьшается с увеличением  $\lambda$  (см. рисунок).

## Аномальная дисперсия

$$\frac{dn}{d\nu} < 0 \quad \text{или} \quad \frac{dn}{d\lambda} > 0$$

$n$  увеличивается с уменьшением  $\lambda$  (наблюдается вблизи полос поглощения вещества).



## Дисперсия показателя преломления

$$D = \frac{dn}{d\lambda}$$

Показывает, как быстро изменяется показатель преломления  $n$  с длиной волны  $\lambda$ .

## 5.58 Призма как спектральный прибор

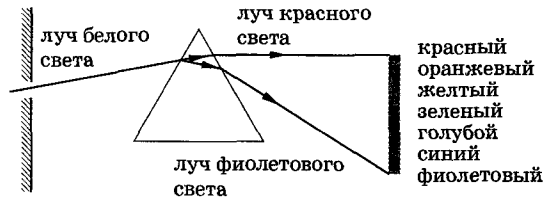
### Обоснование появления спектра

♦ угол отклонения лучей призмой

$$\varphi = A(n - 1) \quad \text{5.55};$$

♦  $n$  — функция длины волны, поэтому лучи разных длин волн после прохождения призмы окажутся отклоненными на разные углы, т. е. пучок белого света за призмой разлагается в спектр (призматический спектр)

### Разложение в спектр



## 5.59 Различия в дифракционном и призматическом спектрах

### Дифракционная решетка

Разлагает падающий свет непосредственно по длинам волн **5.49**, поэтому по измеренным углам (по направлениям максимумов) можно вычислить длину волны

Красные лучи отклоняются *сильнее*, чем фиолетовые (красные лучи имеют большую длину волны, чем фиолетовые (см. условие дифракционного максимума  $d \sin \varphi = \pm m\lambda$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ )))

### Призма

Разлагает падающий свет по значениям показателей преломления **5.5**, поэтому надо знать зависимость преломления конкретного вещества от длины волны

Красные лучи отклоняются *слабее*, чем фиолетовые, так как для красных лучей показатель преломления меньше (см. верхний рисунок)

[ $d$  — постоянная дифракционной решетки;  $\varphi$  — угол дифракции;  $m$  — порядок спектра]

## 5.4.2. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ДИСПЕРСИИ

### Элементарная теория дисперсии

Согласно классической электронной теории, дисперсия света — результат взаимодействия электромагнитных волн с заряженными частицами вещества, совершающими вынужденные колебания в переменном электромагнитном поле волны.

## 5.60 Решение задачи о дисперсии света

	Формула или уравнение	Пояснение
Абсолютный показатель преломления среды	$n = \sqrt{\varepsilon\mu} = \sqrt{\varepsilon}$	В оптической области спектра для веществ $\mu \approx 1$ . Формально дисперсия света — следствие зависимости $n$ от частоты $\omega$ световых волн
Диэлектрическая восприимчивость вещества	$\varepsilon = 1 + \varkappa = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E}$	Напряженность электрического поля световой волны $E = E_0 \cos \omega t$
Мгновенное значение поляризованности	$P = n_0 p = n_0 e x$	Теория рассматривает только колебания оптических электронов, а для упрощения — одного электрона
Задача дисперсии	$n^2 = 1 + \frac{n_0 e x}{\varepsilon_0 E}$	Задача сводится к определению смещения $x$ электрона под действием поля $E$
Дифференциальное уравнение	$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t = \frac{e E_0}{m} \cos \omega t$	Рассматриваются <i>вынужденные колебания</i> оптического электрона (без учета сил сопротивления)
Решение уравнения	$x = A \cos \omega t$	$A = \frac{e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$
Дисперсионная формула (без учета затухания)	$n^2 = 1 + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$	$n$ зависит от $\omega$ , т. е. подтверждает явление дисперсии света (без учета сил сопротивления)
Общая дисперсионная формула (без учета затухания)	$n^2 = 1 + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m} \sum_i \frac{f_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2}$	Принято во внимание, что в молекуле содержится $f_i$ оптических электронов с собственной частотой колебаний $\omega_{0i}$

[ $\varkappa$  — диэлектрическая восприимчивость среды;  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная;  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость вещества;  $P$  — мгновенное значение поляризованности;  $n_0$  — концентрация атомов среды;  $p = ex$  — наведенный дипольный момент электрона, совершающего вынужденные колебания;  $e$  — заряд электрона;  $x$  — смещение электрона под действием электрического поля световой волны;  $F_0 = eE_0$  — амплитудное значение силы, действующей на электрон со стороны поля волны;  $\omega_0$  — собственная частота колебаний электрона;  $\omega$  — частота внешнего поля;  $m$  — масса электрона]

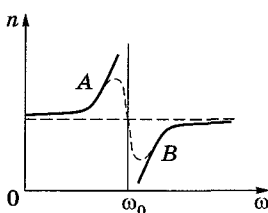
## 5.61 Дисперсионные кривые

Дисперсионная формула (без учета затухания для колебания одного оптического электрона)

$$n^2 = 1 + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

В областях от  $\omega = 0$  до  $\omega \leq \omega_0$   $n^2 > 1$  и возрастает с увеличением  $\omega$ ; от  $\omega \geq \omega_0$  до  $\omega = \infty$   $n^2 < 1$  и возрастает от  $-\infty$  до 1 (нормальная дисперсия).

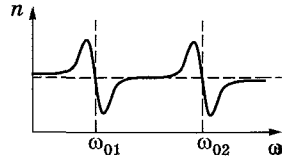
При  $\omega = \omega_0$   $n^2 = \pm\infty$ . Если учесть силы сопротивления при колебаниях электронов, то зависимость  $n(\omega)$  вблизи  $\omega_0$  задается  $AB$  — область *аномальной дисперсии* ( $n$  убывает при возрастании  $\omega$ ).



### Дисперсионная формула (без учета затухания) для колебания нескольких оптических электронов

$$n^2 = 1 + \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \sum_i \frac{f_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2}$$

Считая, что в молекуле содержится несколько оптических электронов, причем  $f_1$  из них имеют собственную частоту  $\omega_{01}$ ,  $f_2$  — собственную частоту  $\omega_{02}$ , то вблизи каждой из частот наблюдается аномальная дисперсия.



[ $n$  — абсолютный показатель преломления среды;  $n_0$  — концентрация атомов среды;  $e$  — заряд электрона;  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная;  $m$  — масса электрона;  $\omega_0$  — собственная частота колебаний электрона;  $\omega$  — частота внешнего поля]

### 5.4.3. ПОГЛОЩЕНИЕ (АБСОРБЦИЯ) СВЕТА

#### Поглощение света

Явление уменьшения энергии световой волны при ее распространении в веществе вследствие преобразования энергии волны в другие виды энергии.

### 5.62 Закон Бугера—Ламберта

#### Закон Бугера—Ламберта

$$I = I_0 e^{-kx}$$

#### Закон Бугера—Ламберта для монохроматического света

$$I = I_0 e^{-k_\lambda x}$$

[ $I_0$  и  $I$  — интенсивности плоской волны монохроматического света на входе и выходе слоя поглощающего вещества толщиной  $x$ ;  $k$  — *натуральный показатель поглощения* (зависит от длины волны, химической природы и состояния поглощающего вещества);  $k_\lambda$  — монохроматический натуральный показатель поглощения]

### 5.63 Спектры поглощения (зависимость $k_\lambda$ от $\lambda$ )

Вещество	Вид спектра	Пояснение
Изолированные атомы	Линейчатый спектр поглощения	$k_\lambda$ отличен от нуля для очень узких диапазонов длин волн ( $\sim 10^{-12}$ — $10^{-11}$ м), соответствующих резонансным частотам колебаний электронов внутри атомов
Молекулы	Молекулярный спектр поглощения (полосы поглощения)	$k_\lambda$ отличен от нуля в широких областях длин волн ( $\sim 10^{-10}$ — $10^{-7}$ м). Спектр определяется колебаниями атомов в молекулах
Диэлектрики	Сплошной спектр поглощения	$k_\lambda \approx 10^{-3}$ — $10^{-5}$ см <sup>-1</sup> , наблюдается селективное поглощение в определенных интервалах длин волн, когда $k_\lambda$ резко возрастает и наблюдаются сравнительно широкие полосы. Поглощение света обусловлено явлением резонанса при вынужденных колебаниях электронов в атомах и молекулах диэлектрика
Металлы	Непрозрачны для света	$k_\lambda \approx 10^4$ см <sup>-1</sup> . В металлах возникают быстропеременные токи (свободные электроны движутся под действием электрического поля световой волны), сопровождающиеся выделением джоулевой теплоты. Энергия световой волны уменьшается, превращаясь во внутреннюю энергию металла

#### 5.4.4. РАССЕЯНИЕ СВЕТА

Это процесс преобразования света веществом, сопровождающийся изменением направления распространения света и появлением несобственного свечения вещества.

### 5.64 Рассеяние света в мутных и чистых средах

#### Мутные среды

Среды, в которых взвешено множество очень мелких частиц инородных веществ, — аэрозоли (облака, дым, туман), эмульсии и т. д.

Механизм рассеяния обусловлен нарушением оптической однородности среды, при котором показатель преломления среды не постоянен, а изменяется от точки к точке.

Если расстояние между малыми по размеру неоднородностями мутной среды значительно больше длины волны света, то свет, проходя через мутную среду, дифрагирует от беспорядочно расположенных микрон неоднородностей — независимых вторичных «источников», — давая равномерное распределение интенсивностей по всем направлениям, т. е. оптически неоднородная среда рассеивает свет по всем направлениям.

Если размеры частиц мутной среды малы по сравнению с длиной волны света, то такое рассеяние света получило название *эффекта Тиндаля*. Например, узкий пучок солнечных лучей, проходя через запыленный воздух, рассеивается на пылинках и становится видимым.

#### Чистые среды

Механизм рассеяния обусловлен флуктуациями плотности и концентрации, возникающими в процессе хаотического теплового движения молекул среды. *Рассеяние* в чистых средах называется *молекулярным*.

### 5.65 Закон Рэлея

$$I \sim \frac{1}{\lambda^4}$$

Интенсивность рассеянного света обратно пропорциональна четвертой степени длины волны возбуждающего света.

Закон описывает *эффект Тиндаля* и *молекулярное рассеяние* 5.64.

◆ Согласно закону Рэлея, интенсивность рассеянного света обратно пропорциональна четвертой степени длины волны, поэтому голубые и синие лучи рассеиваются сильнее, чем желтые и красные, обуславливая голубой цвет неба. По этой же причине свет, прошедший через значительную толщу атмосферы, оказывается обогащенным более длинными волнами (сине-фиолетовая часть спектра полностью рассеивается), и поэтому при закате и восходе Солнце кажется красным. Флуктуации плотности и интенсивность рассеяния света возрастают с увеличением температуры. Поэтому в ясный летний день цвет неба является более насыщенным по сравнению с таким же зимним днем.

#### 5.4.5. ИЗЛУЧЕНИЕ ВАВИЛОВА—ЧЕРЕНКОВА

Излучение света заряженными частицами, возникающее при движении в среде с постоянной скоростью  $V$ , превышающей фазовую скорость  $v$  в этой среде, т. е. при условии  $V > v = \frac{c}{n}$  ( $n$  — показатель преломления).

Наблюдается для всех прозрачных жидкостей, газов и твердых тел.

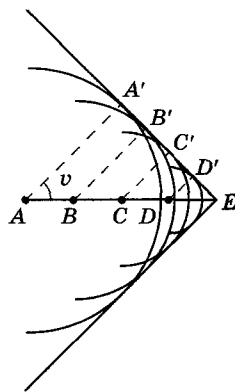
Обоснование возможности существования излучения Вавилова—Черенкова

Согласно электромагнитной теории, *заряженная частица*, например электрон, *излучает электромагнитные волны лишь при ускоренном движении*. Тамм и Франк показали, что это справедливо только до тех пор, пока скорость  $V$  заряженной частицы не превышает фазовой скорости  $v = c/n$  электромагнитных волн в среде, в которой частица движется. По Тамму и Франку, если скорость электрона, движущегося в прозрачной среде, превосходит фазовую скорость света в данной среде, электрон излучает свет.

Обоснование направленности излучения Вавилова—Черенкова с помощью принципа Гюйгенса

Излучение распространяется не по всем направлениям, а лишь по тем, которые составляют острый угол с траекторией частицы (вдоль образующих конуса, ось которого совпадает с направлением скорости частицы).

Электрон движется в среде со скоростью  $V > v = c/n$  вдоль траектории  $AE$  (см. рисунок). Каждая точка (на рисунке, например, точки  $A, B, C, D$ ) траектории заряженной частицы в оптически изотропной среде является источником сферической волны, распространяющейся со скоростью  $v = c/n$ . Любая последующая точка возбуждается с запозданием, поэтому радиусы сферических волн последовательно убывают. По принципу Гюйгенса в результате интерференции эти элементарные волны гасят друг друга везде, за исключением их огибающей поверхности (волновой поверхности) с вершиной в точке  $E$ , где в данный момент находится электрон. Если, например, за 1 с электрон прошел путь  $AE$ , то световая волна за это время прошла путь  $AA'$ . Следовательно, отрезки  $AE$  и  $AA'$  соответственно равны  $V$  и  $v = c/n$ . Треугольник  $AA'E$  — прямоугольный с прямым углом у вершины  $A'$ . Тогда



$$\cos \vartheta = \frac{v}{V} = \frac{c}{nV}.$$

Сферы пересекаются лишь тогда, когда заряженная частица движется быстрее, чем световые волны, и тогда их волновая поверхность представляет собой конус с вершиной в точке, где в данный момент находится электрон.

5.4.6. ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА

Эффект Доплера в акустике объясняется тем, что частота колебаний, воспринимаемых приемником, определяется скоростями движения источника колебаний и приемника относительно среды, в которой происходит распространение звуковых волн. Эффект Доплера наблюдается также и при движении друг относительно друга источника и приемника *электромагнитных волн*. Так как особой среды, служащей носителем электромагнитных волн, не существует, то частота световых волн, воспринимаемых приемником (наблюдателем), определяется только относительной скоростью источника и приемника (наблюдателя). Закономерности эффекта Доплера для электромагнитных волн устанавливаются на основе *специальной теории относительности*.

## 5.67 Эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме

### Общая формула

$$v = v_0 \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + (v/c)\cos\theta}$$

[ $v_0$  и  $v$  — соответственно частоты световых волн, излучаемых источником и воспринимаемых приемником;  $v$  — скорость источника света относительно приемника;  $\theta$  — угол между вектором скорости  $\vec{v}$  и направлением наблюдения, измеряемый в системе отсчета, связанной с наблюдателем;  $c$  — скорость распространения света в вакууме]

### Продольный эффект Доплера

$$\theta = 0$$

$$v = v_0 \frac{\sqrt{1 - v/c}}{\sqrt{1 + v/c}}$$

Наблюдается при движении приемника вдоль линии, соединяющей его с источником. При малых относительных скоростях ( $v \ll c$ ), пренебрегая членами второго порядка малости,  $v = v_0(1 - v/c)$ .

При удалении источника и приемника друг от друга (при их положительной относительной скорости) наблюдается сдвиг в более длинноволновую область ( $v < v_0$ ,  $\lambda > \lambda_0$ ) — так называемое **красное смещение**. При сближении же источника и приемника (при их отрицательной относительной скорости) наблюдается сдвиг в более коротковолновую область ( $v > v_0$ ,  $\lambda < \lambda_0$ ) — так называемое **фиолетовое смещение**.

### Поперечный эффект Доплера

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$v = v_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Наблюдается при движении приемника перпендикулярно линии, соединяющей его с источником. Этот эффект — эффект второго порядка малости по сравнению с продольным эффектом. Поперечный эффект имеет принципиальное значение, так как не наблюдается в акустике (при  $v \ll c$   $v = v_0!$ ), и поэтому — это **релятивистский эффект**. Он связан с замедлением течения времени движущегося наблюдателя.

## 5.5. Поляризация света

### 5.5.1. ЕСТЕСТВЕННЫЙ И ПОЛЯРИЗОВАННЫЙ СВЕТ

#### Поляризация света

Совокупность явлений волновой оптики, в которых проявляется поперечность электромагнитных световых волн (согласно теории Максвелла 4.66), световые волны **поперечны**: векторы напряженностей электрического  $\vec{E}$  и магнитного  $\vec{H}$  полей световой волны взаимно перпендикулярны и колеблются перпендикулярно вектору скорости  $\vec{v}$  распространения волны (перпендикулярно лучу). Поскольку  $\vec{E} \perp \vec{H}$ , для поляризации достаточно исследовать поведение лишь одного из них, а именно вектор  $\vec{E}$ , который называется **световым вектором**.

## 5.68 Естественный и поляризованный свет

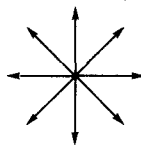
### Поляризованный свет

Свет, в котором направления колебаний светового вектора каким-то образом упорядочены.

### Естественный свет

Свет со всевозможными равновероятными направлениями колебаний вектора  $\vec{E}$  (и следовательно,  $\vec{H}$ ).

◆ Равномерное распределение векторов  $\vec{E}$  объясняется большим числом атомарных излучателей, а равенство амплитудных значений векторов  $\vec{E}$  — одинаковой (в среднем) интенсивностью излучения каждого из атомов.



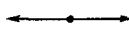
## Частично поляризованный свет

Свет с преимущественным (но не исключительным!) направлением колебаний вектора  $\vec{E}$ .



## Плоскополяризованный (линейно-поляризованный) свет

Свет, в котором вектор  $\vec{E}$  (следовательно, и  $\vec{H}$ ) колеблется только в одном направлении, перпендикулярном лучу.



## Эллиптически поляризованный свет

Свет, для которого вектор  $\vec{E}$  изменяется со временем так, что его конец описывает эллипс, лежащий в плоскости, перпендикулярной лучу.



Эллиптически поляризованный свет — наиболее общий тип поляризованного света.

[ $\vec{E}$  — напряженность электрического поля световой волны (световой вектор)  
 $\vec{H}$  — напряженность магнитного поля световой волны]

## 5.69 Получение и анализ плоскополяризованного света

### Получение плоскополяризованного света

Получают, пропуская естественный свет через *поляризаторы*  $P$ , в качестве которых используются *среды, анизотропные в отношении колебания вектора  $\vec{E}$*  (например, кристаллы, в частности турмалин). Поляризаторы пропускают колебания, параллельные главной плоскости поляризатора, и полностью или частично задерживают колебания, перпендикулярные ей.

### Анализ плоскополяризованного света

Используют те же поляризаторы; они здесь называются *анализаторами* ( $A$ ).

### Положение главных плоскостей $P$ и $A$

Главные плоскости  $P$  и  $A$  параллельны друг другу (рисунок а)

Плоскополяризованный свет проходит через анализатор (рисунок б)

Главные плоскости  $P$  и  $A$  перпендикулярны друг другу  
Свет через анализатор не проходит

Главные плоскости  $P$  и  $A$  ориентированы произвольно (составляют угол  $\alpha$ ) (рисунок в)

Анализатор пропускает составляющую

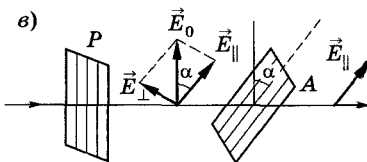
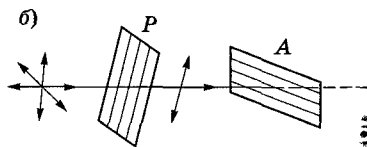
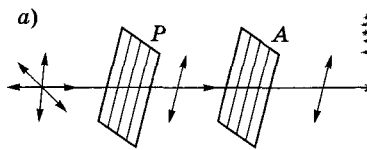
$$E_{\parallel} = E_0 \cos \alpha.$$

Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды колебаний, поэтому интенсивность света, прошедшего анализатор,

$$I = I_0 \cos^2 \alpha.$$

[ $\vec{E}_0$  — амплитуда светового вектора луча, прошедшего сквозь поляризатор;  $\vec{E}_{\parallel}$  и  $\vec{E}_{\perp}$  — соответственно компоненты вектора  $\vec{E}_0$ , параллельный и перпендикулярный главной плоскости анализатора]

◆ Естественный свет падает во всех случаях на поляризатор перпендикулярно.



## 5.70 Закон Малюса

$$I = I_0 \cos^2 \alpha$$

Интенсивность света, прошедшего последовательно через поляризатор и анализатор, пропорциональна квадрату косинуса угла между их главными плоскостями.

[ $I_0$  — интенсивность плоскополяризованного света, падающего на анализатор;  
 $I$  — интенсивность света, вышедшего из анализатора]

## 5.71 Прохождение естественного света через два поляризатора

$$I_0 = \frac{1}{2} I_{\text{ест}}$$

Интенсивность плоскополяризованного света, вышедшего из первого поляризатора.

$$I = I_0 \cos^2 \alpha$$

Интенсивность света, прошедшего второй поляризатор.

$$I = \frac{1}{2} I_{\text{ест}} \cos^2 \alpha$$

Интенсивность света, прошедшего через два поляризатора.

$$P = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}}$$

Степень поляризации.

[ $I_{\text{max}}$  и  $I_{\text{min}}$  — соответственно максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света, пропускаемого анализатором]

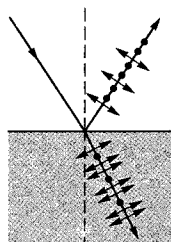
## 5.5.2. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА ПРИ ОТРАЖЕНИИ И ПРЕЛОМЛЕНИИ

### Явление поляризации света

Выделение световых волн с определенными направлениями колебаний электрического вектора — наблюдается при отражении и преломлении света на границе прозрачных изотропных диэлектриков.

## 5.72 Отражение и преломление света на границе раздела

Если угол падения естественного света на границу раздела, например воздуха и стекла, отличен от нуля, то *отраженный и преломленный лучи частично поляризованы*. В отраженном луче преобладают колебания, перпендикулярные плоскости падения (на рисунке они обозначены точками), в преломленном луче — колебания, параллельные плоскости падения (на рисунке эти колебания изображены стрелками). Степень поляризации зависит от угла падения.



## 5.73 Закон Брюстера

При угле падения естественного света на границу прозрачных изотропных диэлектриков, равном *углу Брюстера*  $i_B$ , определяемого соотношением

$$\operatorname{tg} i_B = n_{21},$$

отраженный луч полностью поляризован (содержит только колебания, перпендикулярные плоскости падения), преломленный же луч поляризован максимально, но не полностью.

[ $n_{21}$  — показатель преломления второй среды относительно первой]



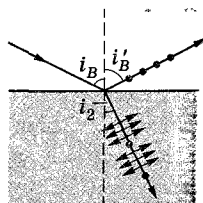
## 5.74 Падение естественного света под углом Брюстера

При падении естественного света под углом Брюстера  $i_B$  отраженный и преломленный лучи *взаимно перпендикулярны*.

$$\operatorname{tg} i_B = \frac{\sin i_B}{\cos i_B}; \quad n_{21} = \frac{\sin i_B}{\sin i_2}; \quad \cos i_B = \sin i_2;$$

$$i_B + i_2 = \frac{\pi}{2}; \quad i'_B = i_B; \quad i'_B + i_2 = \frac{\pi}{2}.$$

[ $i_2$  — угол преломления;  $i_B$  — угол отражения]



## 5.5.3. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ПРИ ДВОЙНОМ ЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИИ

### Двойное лучепреломление

Способность анизотропных веществ расщеплять падающий световой луч на два луча, распространяющихся в разных направлениях с различной фазовой скоростью и поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях.

## 5.75 Одноосные и двуосные кристаллы

### Анизотропия веществ

Зависимость физических свойств веществ от направления.

### Оптическая ось кристалла

*Направление* в оптически анизотропном кристалле, по которому распространяется луч света, не испытывая двойного лучепреломления.

### Одноосные и двуосные кристаллы

Кристаллы с одним или двумя направлениями, вдоль которых отсутствует двойное лучепреломление.

### Главная плоскость одноосного кристалла

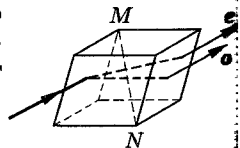
Плоскость, проходящая через направление луча света и оптическую ось кристалла.

## 5.76 Двойное лучепреломление в одноосном кристалле

### Двойное лучепреломление в исландском шпате (одноосный кристалл)

При падении узкого светового пучка на достаточно толстый кристалл из него выходят два пространственно разделенных луча, параллельных друг другу, — *обыкновенный* ( $o$ ) и *необыкновенный* ( $e$ ).

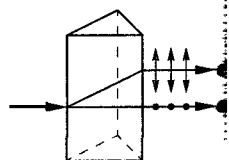
[ $MN$  — оптическая ось кристалла]



### Двойное лучепреломление

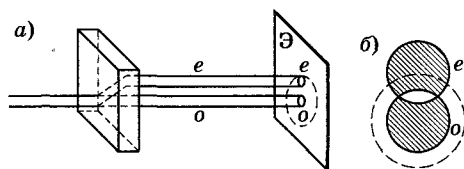
#### в одноосном кристалле при нормальном падении света

Если первичный пучок падает на кристалл нормально, то все равно преломленный пучок разделяется на два: один из них является продолжением первичного — *обыкновенный* луч ( $o$ ), а второй отклоняется — *необыкновенный* луч ( $e$ ).  $o$ - и  $e$ -лучи полностью поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях.



## 5.77 Обыкновенный и необыкновенный лучи при двойном лучепреломлении

На грань кристалла, вырезанного в виде пластинки, нормально падает плоскополяризованный свет. Необыкновенный луч ( $e$ ) в кристалле отклоняется и выходит из него параллельно обыкновенному лучу ( $o$ ). Оба луча на экране Э дают светлые кружки  $o$  и  $e$  (см. рисунок  $a$ ).

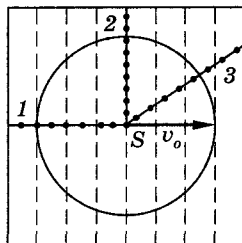


Если кристалл поворачивать вокруг оси, совпадающей с направлением  $o$ -луча, то  $o$ -кружок на экране останется неподвижным, а  $e$ -кружок перемещается вокруг него по кругу. Яркость обоих кружков меняется. Если  $o$ -луч достигает максимальной яркости, то «исчезает»  $e$ -луч, и наоборот. Сумма яркостей обоих лучей остается постоянной. Так если  $e$ - и  $o$ -лучи перекрываются (см. рисунок  $b$ ), то при вращении кристалла яркость каждого из кружков меняется, а область перекрытия все время одинаково яркая.

## 5.78 Волновые поверхности в одноосном кристалле

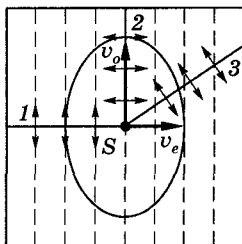
### Сферическая волновая поверхность

Колебания вектора  $\vec{E}$  при любом направлении обыкновенного луча перпендикулярны оптической оси кристалла (ее направление задано пунктиром), поэтому  $o$ -луч распространяется в кристалле по всем направлениям с одинаковой скоростью  $v_o = c/n_o$ . Предположим, что в точке  $S$  кристалла точечный источник света испускает световую волну.  $o$ -Луч в кристалле распространяется со скоростью  $v_o = \text{const}$ , поэтому волновая поверхность обыкновенного луча — сфера.



### Эллипсоидальная волновая поверхность

Для  $e$ -луча угол между направлением колебаний вектора  $\vec{E}$  и оптической осью отличен от прямого и зависит от направления луча, поэтому  $e$ -луч распространяется в кристалле по различным направлениям с разной скоростью  $v_e = c/n_e$ . Если в точке  $S$  точечный источник испускает световую волну, то  $e$ -луч в кристалле распространяется со скоростью  $v_e \neq \text{const}$ , а потому волновая поверхность необыкновенного луча — эллипсоид. Вдоль оптической оси  $v_o = v_e$ ; наибольшее расхождение в скоростях — в направлении, перпендикулярном оптической оси.



[ $c$  — скорость распространения света в вакууме;  $n_o$  — показатель преломления кристалла для обыкновенного луча;  $n_e$  — показатель преломления кристалла для необыкновенного луча]

## 5.79 Положительные и отрицательные кристаллы

Вид кристалла	Волновые поверхности	Пояснение
Положительный кристалл		Эллипсоид и сфера касаются друг друга в точках пересечения с оптической осью $OO'$ . В данном случае $v_e < v_o$ ( $n_e > n_o$ ), т. е. эллипсоид необыкновенного луча вписан в сферу обыкновенного луча (эллипсоид скоростей вытянут относительно оптической оси)
Отрицательный кристалл		Эллипсоид и сфера касаются друг друга в точках пересечения с оптической осью $OO'$ . В данном случае $v_e > v_o$ ( $n_e < n_o$ ), т. е. эллипсоид необыкновенного луча описан вокруг сферы обыкновенного луча (эллипсоид скоростей растянут в направлении, перпендикулярном оптической оси)

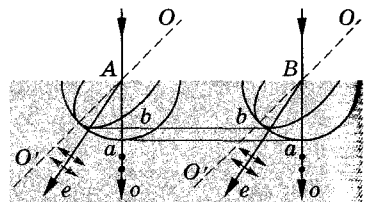
[ $v_o$  и  $v_e$  — соответственно скорости распространения обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле,  $n_o$  и  $n_e$  — показатель преломления кристалла для обыкновенного и необыкновенного лучей; вдоль оптической оси оба луча распространяются с одинаковой скоростью  $v_e = v_o$  ( $n_e = n_o$ )]

## 5.80 Направление $o$ - и $e$ -лучей в кристалле согласно принципу Гюйгенса

Плоская волна падает нормально к преломляющей грани *положительного одноосного кристалла* (оптическая ось  $OO'$  составляет с нею некоторый угол).

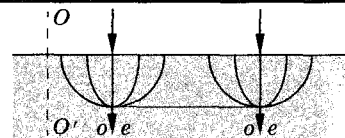
С центрами в точках  $A$  и  $B$  построим сферические волновые поверхности, соответствующие обыкновенному лучу, и эллипсоидальные — необыкновенному лучу.

В точке, лежащей на  $OO'$ , эти поверхности соприкасаются. Согласно принципу Гюйгенса, поверхность, касательная к сферам, будет фронтом ( $a-a$ ) обыкновенной волны, а поверхность, касательная к эллипсоидам, — фронтом ( $b-b$ ) необыкновенной волны. Проведя к точкам касания прямые, получим направления распространения обыкновенного ( $o$ ) и необыкновенного ( $e$ ) лучей. Как следует из рисунка,  $o$ -луч пойдет вдоль первоначального направления, а  $e$ -луч отклоняется от первоначального направления.

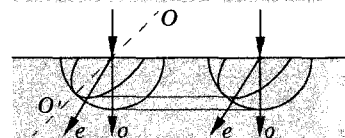


## 5.81 Построение $o$ - и $e$ -лучей

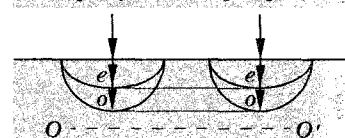
◆ Кристалл положительный; свет падает нормально; оптическая ось перпендикулярна преломляющей поверхности.



◆ Кристалл положительный; свет падает нормально, оптическая ось составляет с преломляющей поверхностью некоторый угол.



◆ Кристалл положительный; свет падает нормально; оптическая ось параллельна преломляющей поверхности.



## 5.82 Значения коэффициентов преломления для обыкновенного ( $n_o$ ) и необыкновенного ( $n_e$ ) лучей ( $\lambda = 589$ нм)

Кристалл	$n_o$	$n_e$	Кристалл	$n_o$	$n_e$
Исландский шпат	1,658	1,486	Кварц	1,543	1,552
Натриевая селитра	1,585	1,337	Лед	1,309	1,310

### 5.3.4. ПОЛЯРИЗАТОРЫ

#### Поляризаторы

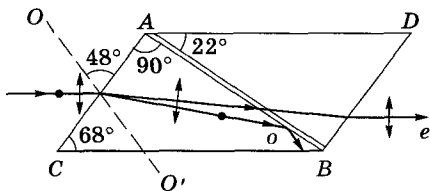
Приспособления для получения, обнаружения и анализа поляризованного света, а также для исследований и измерений, основанных на явлении поляризации. Их типичными представителями являются *поляризационные призмы* и *поляроиды*.

Поляризационные призмы делятся на два класса: 1) дающие один плоскополяризованный пучок лучей — *однолучевые поляризационные призмы*; 2) дающие два пучка лучей, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях, — *двулучевые поляризационные призмы*.

## 5.83 Поляризационные приспособления

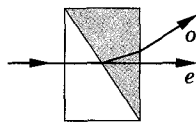
### Однолучевая поляризационная призма (призма Николь, или *николь*)

Двойная призма из исландского шпата, склеенная вдоль линии  $AB$  канадским бальзамом с  $n = 1,55$ . Оптическая ось  $OO'$  призмы составляет с входной гранью угол  $48^\circ$ . На передней грани призмы естественный луч, параллельный ребру  $CB$ , раздваивается на два луча: обыкновенный ( $n_o = 1,66$ ) и необыкновенный ( $n_e = 1,51$ ). При соответствующем подборе угла падения, равного или больше предельного,  $o$ -луч испытывает полное отражение, а затем поглощается зачерненной поверхностью  $CB$ .  $e$ -Луч выходит из кристалла параллельно падающему лучу, незначительно смещенному относительно него (из-за преломления на гранях  $AC$  и  $BD$ ).



### Двулучевая поляризационная призма (призма из исландского шпата и стекла)

Используется различие в показателях преломления  $o$ - и  $e$ -лучей, чтобы развести их возможно дальше друг от друга. Обыкновенный луч преломляется дважды и сильно отклоняется. Необыкновенный луч при соответствующем подборе показателя преломления стекла  $n$  ( $n = n_e$ ) проходит призму без отклонения.



### Кристаллы турмалина

Поляризаторы, действие которых основано на явлении *дихроизма* — селективного поглощения света в зависимости от направления колебаний электрического вектора световой волны.

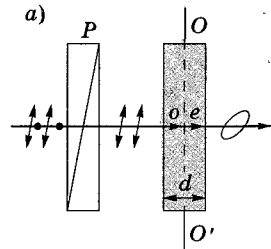
### Поляроиды

Пленки, на которые наносятся, например, кристаллики герпатита — двоякопреломляющего вещества с сильно выраженным дихроизмом в видимой области. Применяются для получения плоскополяризованного света. Так, при толщине  $\approx 0,1$  мм такая пленка полностью поглощает обыкновенные лучи видимой области спектра, являясь в тонком слое хорошим поляризатором (анализатором).

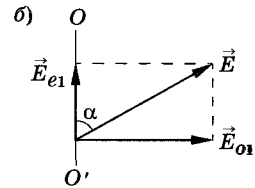
## 5.5.5. ПРОХОЖДЕНИЕ ПЛОСКОПОЛЯРИЗОВАННОГО СВЕТА СКВОЗЬ КРИСТАЛЛИЧЕСКУЮ ПЛАСТИНКУ

### 5.84 Получение эллиптически поляризованного света

Пучок естественного света, прошедший сквозь поляризатор  $P$  и ставший на выходе плоскополяризованным, нормально падает на кристаллическую пластинку толщиной  $d$ , вырезанную из одноосного отрицательного кристалла параллельно его оптической оси  $OO'$ . Внутри пластинки он разбивается на обыкновенный ( $o$ ) и необыкновенный ( $e$ ) лучи, которые распространяются в одном направлении (перпендикулярно оптической оси), но с разными скоростями. Колебания вектора  $E$  в  $e$ -луче происходят вдоль оптической оси кристалла, а в  $o$ -луче — перпендикулярно оптической оси.



Пусть электрический вектор  $\vec{E}$  вышедшего из поляризатора плоскополяризованного луча составляет с оптической осью  $OO'$  кристалла угол  $\alpha$ . Амплитудные значения электрических векторов в обыкновенном ( $E_{o1}$ ) и необыкновенном ( $E_{e1}$ ) лучах:



$$E_{o1} = E \sin \alpha, \quad E_{e1} = E \cos \alpha.$$

$$(n_o - n_e)d$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e)d$$

$$E_e = E_{e1} \cos \omega t = E \cos \alpha \cos \omega t, \\ E_o = E_{o1} \cos (\omega t - \varphi) = E \sin \alpha \cos (\omega t - \varphi)$$

$$\frac{E_o^2}{E_{o1}^2} - \frac{2E_o E_e}{E_{o1} E_{e1}} \cos \varphi + \frac{E_e^2}{E_{e1}^2} = \sin^2 \varphi$$

Оптическая разность хода  $o$ - и  $e$ -лучей, прошедших кристаллическую пластинку толщиной  $d$ .

Разность фаз между колебаниями  $o$ - и  $e$ -лучей на выходе из пластинки.

Амплитудные значения электрических векторов  $E_e$  и  $E_o$  в  $e$ - и  $o$ -лучах, прошедших кристаллическую пластинку.

Траектория результирующего колебания при сложении взаимно перпендикулярных колебаний с разными амплитудами и разностью фаз  $\varphi$  (из двух предыдущих уравнений исключили  $t$ ).

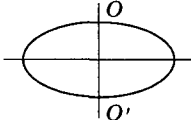
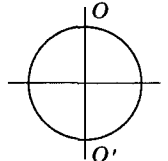
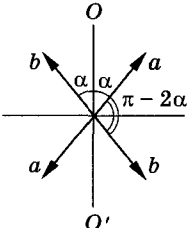
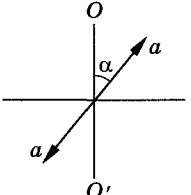
**Вывод.** Получили уравнение эллипса, ориентация осей которого зависит от направления колебаний, входящих в кристаллическую пластинку (т. е. от угла  $\alpha$ ), и от разности фаз  $\varphi$ , вносимой этой пластинкой. Таким образом, в результате прохождения через кристаллическую пластинку (ее ориентация показана на рисунке  $a$ ) плоскополяризованный свет превращается в эллиптически поляризованный.

### 5.85 Прохождение плоскополяризованного света сквозь пластинку

В результате прохождения через кристаллическую пластинку (ее ориентация показана на рисунке  $a$ , 5.84) плоскополяризованный свет превращается в эллиптически поляризованный, описываемый уравнением

$$\frac{E_o^2}{E_{o1}^2} - \frac{2E_o E_e}{E_{o1} E_{e1}} \cos \varphi + \frac{E_e^2}{E_{e1}^2} = \sin^2 \varphi. \quad (*)$$

Это уравнение эллипса, ориентация осей которого зависит от направления колебаний, входящих в кристаллическую пластинку (от угла  $\alpha$ ), и от разности фаз  $\varphi$ , вносимой этой пластинкой.

Определение пластинки	Разность фаз $\varphi$ ; уравнение	Вид поляризации света, прошедшего пластинку
<p><b>Пластинка в четверть длины волны</b>  Вырезанная параллельно оптической оси кристаллическая пластинка, для которой оптическая разность хода между обыкновенным (<math>o</math>) и необыкновенным (<math>e</math>) лучами</p> $(n_o - n_e)d = \frac{\lambda}{4}, \text{ или}$ $(n_o - n_e)d = \pm \left(m + \frac{1}{4}\right) \lambda$ <p style="text-align: center;"><math>(m = 0, 1, 2, \dots)</math>,</p> <p>где знак плюс соответствует отрицательным кристаллам, минус — положительным</p>	$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e)d = \frac{\pi}{2}.$ <p>Тогда формула (1) принимает вид</p> $\frac{E_o^2}{E_{o1}^2} + \frac{E_e^2}{E_{e1}^2} = 1$ <p>При <math>\alpha = 45^\circ</math>  <math>E_{o1} = E_{e1}</math> и (*) принимает вид</p> $E_o^2 + E_e^2 = E_{o1}^2$	 <p>(на выходе из пластинки свет эллиптически поляризован: эллипс ориентирован относительно главных осей пластинки)</p>  <p>(на выходе из пластинки свет циркулярно поляризован)</p>
<p><b>Пластинка в полдлины волны</b>  Вырезанная параллельно оптической оси кристаллическая пластинка, для которой оптическая разность хода между <math>o</math>- и <math>e</math>-лучами</p> $(n_o - n_e)d = \frac{\lambda}{2} \text{ или}$ $(n_o - n_e)d = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda$ <p style="text-align: center;"><math>(m = 0, 1, 2, \dots)</math>,</p> <p>где знак плюс соответствует отрицательным кристаллам, минус — положительным</p>	$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e)d = \pi.$ <p>Тогда формула (*) принимает вид</p> $\frac{E_o}{E_{o1}} + \frac{E_e}{E_{e1}} = 0$	 <p>(на выходе из пластинки свет плоскополяризован, но направление колебаний меняется на угол <math>\pi - 2\alpha</math>, переходя в <math>bb</math>)</p>
<p><b>Пластинка в целую длину волны</b>  Вырезанная параллельно оптической оси кристаллическая пластинка, для которой оптическая разность хода между <math>o</math>- и <math>e</math>-лучами</p> $(n_o - n_e)d = \lambda \text{ или}$ $(n_o - n_e)d = \pm m \lambda$ <p style="text-align: center;"><math>(m = 0, 1, 2, \dots)</math>,</p> <p>где знак плюс соответствует отрицательным кристаллам, минус — положительным</p>	$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e)d = 2\pi.$ <p>Тогда по формуле (*) принимает вид</p> $\frac{E_o}{E_{o1}} - \frac{E_e}{E_{e1}} = 0$	 <p>(на выходе из пластинки свет плоскополяризован, без изменения направления колебаний (колебания вдоль <math>aa</math>))</p>

[ $n_o$  и  $n_e$  — показатели преломления кристалла для обыкновенного и необыкновенного лучей;  $d$  — толщина пластинки;  $\varphi$  — разность фаз между колебаниями  $o$ - и  $e$ -лучей на выходе из пластинки;  $\alpha$  — угол между направлением вектора  $\vec{E}$  в падающем на пластинку плоскополяризованном свете и оптической осью пластинки;  $E_{o1}$  и  $E_{e1}$  — амплитудные значения электрических векторов в  $o$ - и  $e$ -лучах;  $E_o$  и  $E_e$  — амплитудные значения электрических векторов в  $o$ - и  $e$ -лучах, прошедших пластинку]

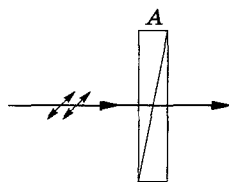
## 5.5.6. АНАЛИЗ ПОЛЯРИЗОВАННОГО СВЕТА

### 5.86 Возможные методы анализа света

#### Плоскополяризованный свет

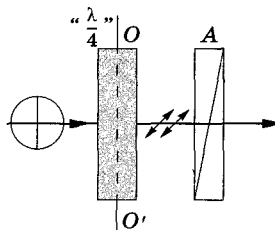
При вращении анализатора ( $A$ ) вокруг направления луча интенсивность света изменяется, и если при некотором положении  $A$  свет полностью гасится, то свет — плоскополяризованный.

Если падающий свет — естественный, то при вращении анализатора интенсивность проходящего света не изменяется.



#### Циркулярно поляризованный свет

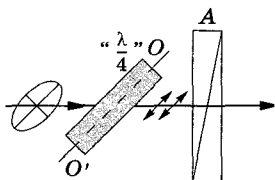
В циркулярно поляризованном свете разность фаз  $\phi$  между любыми двумя взаимно перпендикулярными колебаниями равна  $\pm\pi/2$ . Если на пути этого света поставить пластинку « $\lambda/4$ », то она внесет дополнительную разность фаз  $\pm\pi/2$ . Результирующая разность фаз будет 0 или  $\pi$ . Тогда на выходе из пластинки 5.85 свет — плоскополяризованный и может быть погашен поворотом анализатора.



Если падающий свет — естественный, то при вращении анализатора при любом положении пластинки « $\lambda/4$ » интенсивность не меняется. Если полного гашения не достичь, то падающий свет — смесь естественного и циркулярно поляризованного.

#### Эллиптически поляризованный свет

Если на пути эллиптически поляризованного света поместить пластинку « $\lambda/4$ », оптическая ось которой ориентирована параллельно одной из осей эллипса, то она внесет дополнительную разность фаз  $\pm\pi/2$ . Результирующая разность фаз будет 0 или  $\pi$ . Тогда на выходе из пластинки свет — плоскополяризованный и может быть погашен поворотом анализатора.



Если падающий свет — частично поляризованный, то при вращении анализатора при любом положении пластинки интенсивность изменяется от минимальной до максимальной, но полного гашения не достичь.

## 5.5.7. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ПОЛЯРИЗОВАННОГО СВЕТА

#### Интерференция поляризованного света

Опытным путем доказано, что когерентные лучи, поляризованные в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, не интерferируют. Интерференция наблюдается лишь тогда, когда колебания во взаимодействующих лучах совершаются вдоль одного направления. Поэтому обыкновенный и необыкновенный лучи, выходящие из кристаллической пластинки, хотя и являются когерентными и между ними возникает разность фаз, зависящая от расстояния, пройденного ими в пластинке, интерферировать не могут, поскольку они поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях. Чтобы наблюдать интерференцию поляризованных лучей, надо выделить из обоих лучей компоненты с одинаковыми направлениями колебаний.

## 5.87 Выделение компонентов с одинаковыми направлениями колебаний

Кристаллическая пластинка, вырезанная из одноосного кристалла параллельно оптической оси  $OO'$ , помещается между поляризатором  $P$  и анализатором  $A$ . Параллельный пучок света на выходе из  $P$  превращается в плоскополяризованный. В кристаллической пластинке  $o$ - и  $e$ -лучи распространяются в направлении падения, но с разными скоростями. Анализатор  $A$  пропускает колебания, поляризованные в одной плоскости: электрические векторы вышедших из анализатора  $A$   $o$ - и  $e$ -лучей совершают колебания вдоль одного направления, т. е. возможна интерференция.

## 5.88 Интерференционные максимумы и минимумы

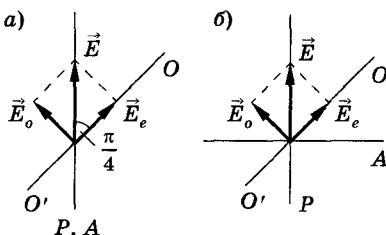
Результат интерференции зависит от разности фаз  $\varphi$ , приобретенной  $o$ - и  $e$ -лучами в кристаллической пластинке, и угла  $\beta$  между главными плоскостями  $A$  и  $P$ .

$$\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda_0} (n_o - n_e) = \begin{cases} \pm 2m\pi, \\ \pm (2m + 1)\pi \end{cases}$$

$(m = 0, 1, 2, \dots)$

Предельные случаи для разности фаз, возникающей при прохождении света сквозь пластинку.

На рисунке для примера угол между главной плоскостью  $P$  и оптической осью  $OO'$  составляет  $\pi/4$ . Световое колебание, вышедшее из  $P$ , задается вектором  $\vec{E}$ , лежащим в главной плоскости  $P$ . При входе в пластинку колебание  $\vec{E}$  возбудит два колебания: перпендикулярное оптической оси  $OO'$  ( $o$ -луч) и параллельное ей ( $e$ -луч). Так как  $\alpha = \pi/4$ , то амплитуды и интенсивности обыкновенной и необыкновенной волн одинаковы.



$\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda_0} (n_o - n_e) = \pm 2m\pi$ <p style="text-align: center;"><math>(m = 0, 1, 2, \dots)</math></p> <p>соответствует пластинке «<math>\lambda</math>»</p>	<p>На <math>A</math> падает свет, плоскополяризованный в главной плоскости поляризатора.</p> <p>При <math>\beta = 0</math> (главные плоскости <math>P</math> и <math>A</math> параллельны) наблюдается <i>интерференционный максимум</i>.</p> <p>При <math>\beta = \pi/2</math> (анализатор скрещен с поляризатором) наблюдается <i>интерференционный минимум</i></p>
$\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda_0} (n_o - n_e) = \pm (2m + 1)\pi$ <p style="text-align: center;"><math>(m = 0, 1, 2, \dots)</math></p> <p>соответствует пластинке «<math>\lambda/2</math>»</p>	<p>На <math>A</math> падает свет, плоскополяризованный в плоскости, составляющей с главной плоскостью <math>P</math> угол <math>2\alpha = \pi/2</math>.</p> <p>При <math>\beta = 0</math> (главные плоскости <math>P</math> и <math>A</math> параллельны) наблюдается <i>интерференционный минимум</i>.</p> <p>При <math>\beta = \pi/2</math> (анализатор скрещен с поляризатором) наблюдается <i>интерференционный максимум</i></p>

[ $\varphi$  — разность фаз, возникающая при прохождении света сквозь кристаллическую пластинку;  $d$  — толщина пластинки;  $\lambda_0$  — длина волны света;  $n_o$  и  $n_e$  — показатели преломления кристалла для обыкновенного и необыкновенного лучей]



## 5.5.8. ИСКУССТВЕННАЯ ОПТИЧЕСКАЯ АНИЗОТРОПИЯ

### Искусственная оптическая анизотропия

Сообщение оптической анизотропии естественно изотропным веществам, если они подвергаются механическим напряжениям, помещаются в электрическое или магнитное поле. В результате вещество приобретает свойства одноосного кристалла, оптическая ось которого совпадает соответственно с направлениями деформации, электрического или магнитного полей.

### 5.89 Получение оптически анизотропных веществ

Вид воздействия	Вещества	Мера возникающей оптической анизотропии
Одностороннее сжатие или растяжение	Кристаллы кубической системы	$n_o - n_e = k_1 \sigma$
Электрическое поле	Жидкости, аморфные тела, газы, стекла	$n_o - n_e = k_2 E^2$
Магнитное поле	Жидкости, стекла, коллоиды	$n_o - n_e = k_3 H^2$

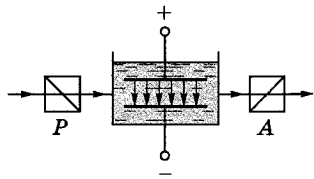
[ $k_1, k_2, k_3$  — постоянные, зависящие от свойств вещества;  $\sigma$  — напряжение, вызвавшее деформацию;  $E$  и  $H$  — напряженности электрического и магнитного полей; ( $n_o - n_e$ ) — разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей в направлении, перпендикулярном оптической оси]

### 5.90 Эффект Керра

Оптическая анизотропия прозрачных веществ под воздействием однородного электрического поля.

#### Ячейка Керра

Кювета с жидкостью, в которую внесены пластины конденсатора, помещена между скрещенными поляризатором и анализатором. При отсутствии электрического поля свет через систему не проходит. При его наложении среда становится анизотропной, а выходящий из ячейки свет — эллиптически поляризованным и частично проходит через анализатор.



#### Разность фаз $\varphi$ ,

возникающая между обыкновенным и необыкновенным лучами

$$\varphi = 2\pi l \frac{n_o - n_e}{\lambda} = 2\pi B l E^2$$

$$(B = k_2/\lambda)$$

Измеряется с помощью помещаемого перед анализатором компенсатора (устройства, с помощью которого разность хода между двумя лучами сводится к нулю).

[ $l$  — длина кюветы;  $B = k_2/\lambda$  — постоянная Керра ( $k_2$  — постоянная, зависящая от свойств вещества);  $E$  — напряженность электрического поля;  $\lambda$  — длина волны;  $n_o$  и  $n_e$  — показатели преломления вещества для обыкновенного и необыкновенного лучей]

#### Механизм эффекта Керра

Обусловлен различной поляризуемостью молекул диэлектрика по разным направлениям. Электрическое поле ориентирует полярные молекулы вдоль поля и индуцирует электрический момент у неполярных молекул. Поэтому показатели преломления (следовательно, и скорости распространения в веществе волн, поляризованных вдоль и перпендикулярно вектору напряженности электрического поля) становятся различными и возникает двойное лучепреломление.

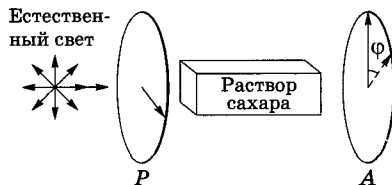
## 5.5.9. ВРАЩЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ПОЛЯРИЗАЦИИ

### Вращение плоскости поляризации (или оптическая активность)

Способность некоторых веществ (кварц, сахар, водный раствор сахара, скипидар и др.) в отсутствие внешних воздействий вращать плоскость поляризации (плоскость, проходящую через электрический вектор  $\vec{E}$  и световой луч). Вещества, вращающие плоскость поляризации, называются *оптически активными*.

### 5.91 Наблюдение вращения плоскости поляризации

Плоскополяризованный свет, выходя из поляризатора, проходит через раствор сахара. *Скрещенные* поляризатор и анализатор за кюветой с раствором гасят свет не полностью. Если  $A$  повернуть на угол  $\varphi$ , то наступает полное гашение света. Следовательно, свет после прохождения системы остается плоскополяризованным, но раствор поворачивает плоскость поляризации света на угол  $\varphi$ .



### 5.92 Угол поворота плоскости поляризации

#### Оптически активные кристаллы и чистые жидкости

$$\varphi = \alpha d$$

#### Оптически активные растворы

$$\varphi = [\alpha] C d$$

Оптическая активность обусловлена как строением молекул вещества (их асимметрией), так и особенностями расположения частиц в кристаллической решетке.

$d$  — расстояние, пройденное светом в оптически активном веществе;  $\alpha$   $[\alpha]$  — *удельное вращение*, численно равное углу поворота плоскости поляризации света слоем оптически активного вещества единичной толщины (единичной концентрации для растворов);  $C$  — массовая концентрация оптически активного вещества в растворе (кг/м<sup>3</sup>)

### 5.93 Право- и левовращающие оптически активные вещества

#### Правовращающие вещества

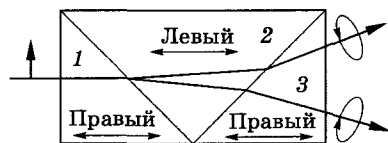
Вещества, у которых плоскость поляризации, если смотреть навстречу лучу, поворачивается вправо (по часовой стрелке).

#### Левовращающие вещества

Вещества, у которых плоскость поляризации, если смотреть навстречу лучу, поворачивается влево (против часовой стрелки).

#### Объяснение вращения плоскости поляризации (Френель; 1817)

В оптически активных веществах скорость распространения света различна для лучей, поляризованных по правому и левому кругу. Для правовращающих веществ  $v_{\text{пр}} > v_{\text{лев}}$  ( $n_{\text{пр}} < n_{\text{лев}}$ ), для левовращающих веществ  $v_{\text{пр}} < v_{\text{лев}}$  ( $n_{\text{пр}} > n_{\text{лев}}$ ).



Эта гипотеза была подтверждена с помощью опытов на составной призме из «правого» и «левого» кварца (см. рисунок). Оптические оси всех

призм, изображенные на рисунке стрелками, направлены параллельно падающему лучу. Так как для правовращающего кварца  $n_{\text{пр}} < n_{\text{лев}}$ , а для левовращающего  $n_{\text{пр}} > n_{\text{лев}}$ , то на границе раздела призм 1 и 2 пучок плоскополяризованного света раздваивается, а на границе призм 2 и 3 пучки разойдутся еще больше. Из призмы 3, как показал Френель, выходят действительно два циркулярно поляризованных в разные стороны луча света.

## 5.6. Квантовая природа излучения

### 5.6.1. ТЕПЛОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ И ЕГО ОПИСАНИЕ

#### Теп л о в о е (температурное) и з л у ч е н и е

Свечение тел, обусловленное нагреванием.

Тепловое излучение *равновесно*. Если нагретые (излучающие) тела поместить в полость, ограниченную идеально отражающей оболочкой, то через некоторое время (в результате непрерывного обмена энергией между телами и излучением, заполняющим полость) наступит равновесие, т. е. каждое тело в единицу времени будет поглощать столько же энергии, сколько и излучать.

### 5.94 Основные характеристики теплового излучения

#### Спектральная плотность энергетической светимости

$$R_{\nu, T} = \frac{dW_{\nu, \nu + d\nu}^{\text{изл}}}{d\nu} \quad (\text{Дж/м}^2)$$

Энергия, излучаемая с единицы площади поверхности тела в единицу времени в интервале частот единичной ширины.

#### Спектральная поглощательная способность

$$A_{\nu, T} = \frac{dW_{\nu, \nu + d\nu}^{\text{погл}}}{dW_{\nu, \nu + d\nu}} \quad (\text{безразмерная})$$

Показывает, какая доля энергии, приносимой за единицу времени на единицу площади поверхности тела падающими на нее электромагнитными волнами с частотами от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$ , поглощается телом.

#### Связь между $R_{\nu, T}$ и $R_{\lambda, T}$

$$R_{\nu, T} = R_{\lambda, T} \frac{\lambda^2}{c}$$

$$dW_{\nu, \nu + d\nu}^{\text{изл}} = R_{\nu, T} d\nu = R_{\lambda, T} d\lambda, \quad c = \lambda\nu, \quad \frac{d\lambda}{d\nu} = -\frac{c}{\nu^2} = -\frac{\lambda^2}{c}$$

(знак минус указывает, что  $\lambda$  уменьшается с возрастанием  $\nu$ ).

#### Энергетическая светимость тела

$$R_T = \int_0^{\infty} R_{\nu, T} d\nu = \int_0^{\infty} R_{\lambda, T} d\lambda$$

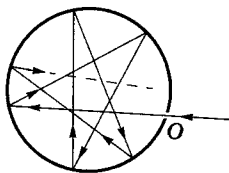
Суммирование производится по всем частотам (длинам волн).

### 5.95 Черное и серое тела

Тело	Определение	Спектральная поглощательная способность
Черное	Тело, способное поглощать полностью при любой температуре все падающее на него излучение любой частоты	$A_{\nu, T} \equiv 1$
Серое	Тело, поглощательная способность которого меньше единицы, но одинакова для всех частот и зависит только от температуры	$A_{\nu, T}^c = A_T = \text{const} < 1$

## 5.96 Модель черного тела

Идеальная модель черного тела — замкнутая полость с небольшим отверстием  $O$ , внутренняя поверхность которой зачернена. Луч света, попавший внутрь такой полости, испытывает многократные отражения от стенок, в результате чего интенсивность вышедшего излучения оказывается практически равной нулю. Черное тело — *идеализированная модель*. Таких тел в природе нет, но, например, сажа, платиновая чернь, черный бархат в определенном интервале частот по своим свойствам близки к черным телам.



## 5.97 Закон Кирхгофа

### Формулировка закона Кирхгофа

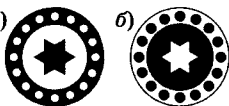
$$\frac{R_{\nu, T}}{A_{\nu, T}} = r_{\nu, T}$$

Отношение спектральной плотности энергетической светимости к спектральной поглощательной способности не зависит от природы тела; оно является для всех тел универсальной функцией частоты (длины волны) и температуры.

[ $r_{\nu, T}$  — *универсальная функция Кирхгофа* (спектральная плотность энергетической светимости черного тела)]

### Объяснение свечения накаливаемых тел по закону Кирхгофа

Темные места разрисованного фарфора (рисунок *а*) при накаливании излучают сильнее (рисунок *б*). Согласно закону Кирхгофа, тело, сильнее поглощающее, сильнее и излучает, если сравнение происходит при *одинаковой* температуре (отдельные части фарфора нагреты до одинаковой температуры).



## 5.98 Энергетическая светимость тел

### Энергетическая светимость тела

$$R_T = \int_0^{\infty} A_{\nu, T} r_{\nu, T} d\nu$$

Использовали закон Кирхгофа [5.97](#).

### Энергетическая светимость серого тела

$$R_T^c = A_T \int_0^{\infty} r_{\nu, T} d\nu = A_T R_e$$

Учли, что для серого тела  $A_{\nu, T}^c = A_T = \text{const}$  [5.95](#).

### Энергетическая светимость черного тела

$$R_e = \int_0^{\infty} r_{\nu, T} d\nu = \int_0^{\infty} r_{\lambda, T} d\lambda$$

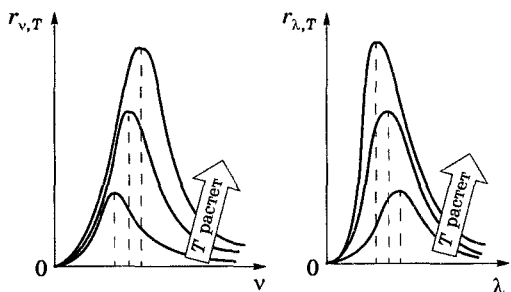
$R_e$  зависит только от температуры.

## 5.99 Законы Стефана—Больцмана и Вина

Закон	Формулировка закона	Формула	Постоянная
Закон Стефана—Больцмана	Энергетическая светимость черного тела пропорциональна четвертой степени его термодинамической температуры	$R_e = \sigma T^4$	$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ (постоянная Стефана—Больцмана)
Закон смещения Вина	Длина волны $\lambda_{\text{max}}$ , соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости черного тела, обратно пропорциональна его термодинамической температуре	$\lambda_{\text{max}} = \frac{b}{T}$	$b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ (постоянная Вина)

## Экспериментальные кривые зависимости $r_{\nu, T}$ от частоты $\nu$ и $r_{\lambda, T}$ от длины волны $\lambda$

Экспериментальные кривые подтверждают выводы закона смещения Вина: происходит смещение максимума  $r_{\lambda, T}$  по мере возрастания температуры в область коротких длин волн (или смещение максимума  $r_{\nu, T}$  в область больших частот).



### 5.100 Формулы Рэлея—Джинса и Вина

Формула	Спектральная плотность энергетической светимости черного тела	Замечания
Формула Рэлея—Джинса	$r_{\nu, T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \langle \varepsilon \rangle = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT$	Дает правильное спектральное распределение лишь при малых частотах ( $h\nu \ll kT$ ); при больших $\nu$ — резкое расхождение с опытом и законом смещения Вина
Формула Вина	$r_{\nu, T} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/(kT)}$	«Работает» только при больших частотах ( $h\nu \gg kT$ )

[ $\langle \varepsilon \rangle = kT$  — средняя энергия осциллятора с собственной частотой  $\nu$ ;  $h$  — постоянная Планка;  $T$  — термодинамическая температура;  $c$  — скорость распространения света в вакууме]

### 5.101 Квантовая гипотеза. Фотоны

#### Квантовая гипотеза Планка

Излучение и поглощение света происходит не непрерывно, а дискретно, т. е. определенными порциями (квантами), энергия которых определяется частотой  $\nu$ :  $\varepsilon = h\nu$ .

#### Фотоны

Кванты электромагнитного излучения. Фотоны движутся со скоростью света, они не существуют в состоянии покоя, их масса покоя равна нулю.

#### Основные характеристики фотонов

энергия

$$\varepsilon = h\nu = hc/\lambda$$

импульс

$$p = h\nu/c = hc/\lambda$$

Эти формулы связывают корпускулярные характеристики фотона — энергию, импульс — с волновой характеристикой излучения — частотой (длиной волны). Таким образом, свет представляет собой единство противоположных видов движения — корпускулярного (квантового) и волнового (электромагнитного), т. е. необходимо говорить о двойственной корпускулярно-волновой природе света (о корпускулярно-волновом дуализме).

[ $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с — постоянная Планка;  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с — скорость распространения света в вакууме;  $\nu$  — частота излучения;  $\lambda$  — длина волны излучения в вакууме]

## 5.102 Формула Планка для универсальной функции Кирхгофа

в переменных  $\nu, T$

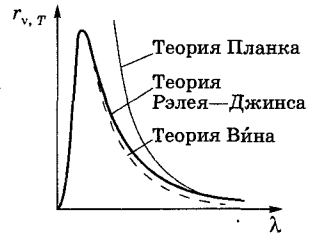
$$r_{\nu, T} = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1}$$

в переменных  $\lambda, T$

$$r_{\lambda, T} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/(kT\lambda)} - 1}$$

Формула блестяще согласуется с опытом по распределению энергии в спектрах излучения черного тела во всем интервале частот (длин волн) и температур.

[ $h$  — постоянная Планка;  $\nu$  — частота излучения;  $\lambda$  — длина волны излучения в вакууме;  $k$  — постоянная Больцмана;  $c$  — скорость света в вакууме;  $T$  — термодинамическая температура]



Сравнение теорий Рэлея—Джинса и Вина с теорией Планка, хорошо согласующейся с опытом.

## 5.103 Вывод частных формул и законов из формулы Планка

Формула Рэлея—Джинса

$$r_{\nu, T} = \frac{2\pi \nu^2}{c^2} kT$$

$h\nu \ll kT$  (энергия кванта много меньше энергии теплового движения).

$$e^{h\nu/(kT)} \approx 1 + \frac{h\nu}{kT}, \quad e^{h\nu/(kT)} - 1 \approx \frac{h\nu}{kT}, \quad r_{\nu, T} \approx \frac{2\pi \nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{h\nu/(kT)} = \frac{2\pi \nu^2}{c^2} kT,$$

т. е. получили формулу Рэлея—Джинса **5.100**.

Формула Вина

$$r_{\nu, T} = \frac{2\pi \nu^3}{c^2} e^{-h\nu/(kT)}$$

$h\nu \gg kT$  (энергия кванта много больше энергии теплового движения).

$$r_{\nu, T} = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1} = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} e^{-h\nu/(kT)},$$

т. е. получили формулу Вина **5.100**.

Закон Стефана—Больцмана

$$R_e = \sigma T^4$$

$R_e = \int_0^\infty r_{\nu, T} d\nu$  — энергетическая светимость черного тела.

$$R_e = \int_0^\infty r_{\nu, T} d\nu = \int_0^\infty \frac{2\pi \nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)} - 1} d\nu. \text{ Введем } x = \frac{h\nu}{kT}; dx = \frac{h d\nu}{kT}; d\nu = \frac{kT}{h} dx.$$

Тогда  $R_e = \frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \sigma T^4$ , т. е. получили закон Стефана—Больцмана **5.99**, где  $\sigma = \frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3}$ . Подстановка  $k, c$  и  $h$  в выражение

для  $\sigma$  дает величину, хорошо согласующуюся с опытными данными.

Закон Вина

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}$$

$r_{\lambda, T} = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/(kT\lambda)} - 1}$  — формула Планка в переменных  $\lambda$  и  $T$ .

$$\frac{\partial r_{\lambda, T}}{\partial \lambda} = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^6 e^{hc/(kT\lambda)} - 1} \left( \frac{hc/(kT\lambda)}{e^{hc/(kT\lambda)} - 1} - 5 \right).$$

Приравняв нулю эту производную, получим  $\lambda_{\max}$ , при которой  $r_{\lambda, T}$  достигает максимума. Введя  $x = \frac{hc}{kT\lambda_{\max}}$ , получим  $x e^x - 5(e^x - 1) = 0$ . Это —

трансцендентное уравнение, решение которого методом последовательных приближений дает  $x = 4,965$ . Тогда

$$T \lambda_{\max} = \frac{hc}{4,965k} = b, \text{ т. е. получили закон Вина } 5,99.$$

[ $h$  — постоянная Планка;  $\nu$  — частота излучения;  $k$  — постоянная Больцмана;  $T$  — термодинамическая температура;  $r_{\nu, T}$  и  $r_{\lambda, T}$  — спектральная плотность энергетической светимости черного тела (универсальная функция Кирхгофа) в переменных  $\nu, T$  и  $\lambda, T$ ;  $\lambda$  — длина волны излучения в вакууме;  $c$  — скорость света в вакууме;  $\sigma$  — постоянная Стефана—Больцмана;  $b$  — постоянная Вина]

**Выводы.** Формула Планка не только хорошо согласуется с экспериментальными данными, но и содержит в себе частные законы теплового излучения, а также позволяет вычислить постоянные в законах теплового излучения. Следовательно, формула Планка является *полным решением* основной задачи теплового излучения, поставленной Кирхгофом.

### 5.104 Радиационная, цветовая и яркостная температура

Температура	Определение	Определяющие формулы	Пояснения
Радиационная ( $T_p$ )	Температура черного тела, при которой его энергетическая светимость $R_e$ равна энергетической светимости $R_T$ исследуемого тела	$R_e = \sigma T^4,$ $R_T = \sigma T^4,$ $T_p = \sqrt[4]{R_T / \sigma}$	<p>Радиационная температура <math>T_p</math> всегда меньше его истинной температуры <math>T</math>.</p> <p>Так, если тело серое, то <math>R_T^c = A_T R_e = A_T \sigma T^4 = \sigma T_p^4</math>, откуда <math>T_p = \sqrt[4]{A_T} T</math> (<math>A_T &lt; 1, T_p &lt; T</math>)</p>
Цветовая ( $T_c$ )	Температура черного тела, при которой распределение энергии в спектре излучения исследуемого тела такое же, как в спектре черного тела при той же температуре	$T_c = \frac{b}{\lambda_{\max}}$	<p>В случае серого тела <math>R_{\lambda, T} = A_T r_{\lambda, T}</math>, где <math>A_T = \text{const} &lt; 1</math>. Поэтому распределение энергии в спектрах излучения черного и серого тел одинаково, и можно применять закон смещения Вина. Для серых тел (или тел, близких к им по свойствам) цветовая температура совпадает с истинной</p>
Яркостная ( $T_y$ )	Температура черного тела, при которой для определенной длины волны его спектральная плотность энергетической светимости равна спектральной плотности энергетической светимости исследуемого тела	$r_{\lambda, T_y} = R_{\lambda, T}$	<p>По закону Кирхгофа для исследуемого тела для длины волны <math>\lambda</math> имеем <math>\frac{R_{\lambda, T}}{A_{\lambda, T}} = r_{\lambda, T}</math>, или, учитывая, что <math>r_{\lambda, T_y} = R_{\lambda, T}</math>, <math>A_{\lambda, T} = \frac{r_{\lambda, T_y}}{r_{\lambda, T}}</math>.</p> <p>Так как для нечерных тел <math>A &lt; 1</math>, то <math>r_{\lambda, T_y} &lt; r_{\lambda, T}</math>, т. е. <math>T_y &lt; T</math> (истинная температура тела всегда выше яркостной)</p>

[ $T$  — истинная температура тела;  $R_e = \int_0^{\infty} r_{\nu, T} d\nu = \int_0^{\infty} r_{\lambda, T} d\lambda$  — энергетическая светимость черного тела;  $r_{\nu, T}$  и  $r_{\lambda, T}$  — спектральная плотность энергетической светимости черного тела в переменных  $\nu, T$  и  $\lambda, T$ ;  $\nu$  — частота излучения;  $\lambda$  — длина волны излучения в вакууме;  $\sigma$  — постоянная Стефана—Больцмана;  $R_T^c$  — энергетическая светимость серого тела;  $R_{\lambda, T}$  — спектральная плотность энергетической светимости тела;  $A_{\nu, T}$  — спектральная поглощательная способность тела;  $b$  — постоянная Вина]

## 5.6.2. ФОТОЭФФЕКТ: ЕГО ВИДЫ И ЗАКОНЫ

### 5.105 Виды фотоэффекта

#### Внешний фотоэффект

Испускание электронов веществом (металлом, полупроводником, диэлектриком) под действием электромагнитного излучения.

#### Внутренний фотоэффект

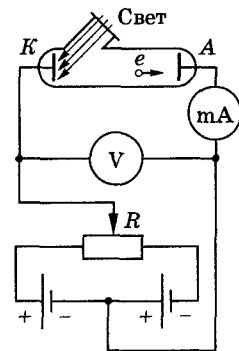
Вызываемые электромагнитным излучением переходы электронов внутри полупроводника или диэлектрика из связанных состояний в свободные без вылета наружу. В результате концентрация носителей тока внутри тела увеличивается, что приводит к возникновению *фотопроводимости* (повышению электропроводности полупроводника или диэлектрика при его освещении) или к возникновению ЭДС.

#### Вентильный фотоэффект

Возникновение ЭДС (фото-ЭДС) при освещении контакта двух разных полупроводников или полупроводника и металла (при отсутствии внешнего электрического поля). Вентильный фотоэффект — разновидность внутреннего фотоэффекта.

### 5.106 Принципиальная схема для исследования фотоэффекта

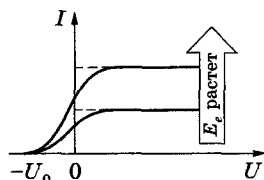
Два электрода (катод  $K$  из исследуемого металла и анод  $A$  — в схеме Столетова применялась металлическая сетка) в вакуумной трубке подключены к батарее так, что с помощью потенциометра  $R$  можно изменять не только значение, но и знак подаваемого на них напряжения. Ток, возникающий при освещении катода монохроматическим светом (через кварцевое окошко), измеряется включенным в цепь миллиамперметром. Облучая катод светом различных длин волн, Столетов установил следующие закономерности, не утратившие своего значения до нашего времени: 1) наиболее эффективное действие оказывает ультрафиолетовое излучение; 2) под действием света вещество теряет только отрицательные заряды; 3) сила тока, возникающего под действием света, прямо пропорциональна его интенсивности. Впоследствии (Томсон, 1898 г.) показали, что под действием света вырываются электроны.



### 5.107 Вольт-амперная характеристика фотоэффекта

Зависимость фототока  $I$  от напряжения  $U$  между электродами.

Приведенные кривые соответствуют двум разным освещенностям  $E_e$  катода, но одинаковой частоте света. С увеличением  $U$  фототок постепенно возрастает, т. е. все большее число фотоэлектронов достигает анода. Из пологого характера кривых следует, что электроны вылетают из катода с различными скоростями. Максимальное значение  $I_{\text{нас}}$  — *фототок насыщения* — определяется таким значением  $U$ , при котором все электроны, испускаемые катодом, достигают анода. Из вольт-амперной характеристики следует, что при  $U = 0$  фототок не исчезает. Следовательно, электроны, выбитые светом из катода, обладают некоторой начальной скоростью  $v$ , значит, и отличной от нуля кинетиче-





ской энергией и могут достигнуть анода без внешнего поля. Для того чтобы фототок стал равным нулю, необходимо приложить *задерживающее напряжение*  $U_0$ . При  $U = U_0$  ни один из электронов, даже обладающий при вылете из катода максимальной скоростью  $v_{\max}$ , не может преодолеть задерживающего поля и достигнуть анода. Следовательно,

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = eU_0.$$

Измерив задерживающее напряжение  $U_0$ , можно определить максимальные значения скорости и кинетической энергии фотоэлектронов.

## 5.108 Законы внешнего фотоэффекта

### Первый закон (Столетова)

При фиксированной частоте падающего света число фотоэлектронов, вырванных из катода в единицу времени, пропорционально интенсивности света (сила фототока насыщения пропорциональна энергетической освещенности  $E_e$  катода).

### Второй закон

Максимальная начальная скорость (максимальная начальная кинетическая энергия) фотоэлектронов не зависит от интенсивности падающего света, а определяется только его частотой  $\nu$ .

### Третий закон

Для каждого вещества существует *красная граница* фотоэффекта, т. е. минимальная частота  $\nu_0$  света (зависящая от химической природы вещества и состояния его поверхности), ниже которой фотоэффект невозможен.

## 5.109 Уравнение Эйнштейна

$$h\nu = A + T_{\max}$$

или

$$h\nu = A + \frac{mv_{\max}^2}{2}$$

Энергия падающего фотона расходуется на совершение электронном работы выхода  $A$  из металла и на сообщение вылетевшему фотоэлектрону максимальной кинетической энергии.

Уравнение Эйнштейна — *закон сохранения энергии* при фотоэффекте.

## 5.110 Объяснение законов фотоэффекта на основе квантовой теории (на основе волновой теории не объясняется)

### Первый закон фотоэффекта

По Эйнштейну, каждый квант поглощается только одним электроном. Поэтому число вырванных фотоэлектронов должно быть пропорционально интенсивности света.

### Второй закон фотоэффекта

Из уравнения Эйнштейна ( $h\nu = A + T_{\max}$ ) следует, что максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона линейно возрастает с увеличением частоты падающего излучения и не зависит от его интенсивности (числа фотонов), так как ни  $A$ , ни  $\nu$  от интенсивности света не зависят.

### Третий закон фотоэффекта

С уменьшением частоты света кинетическая энергия фотоэлектронов уменьшается (для данного металла  $A = \text{const}$ ), поэтому при некоторой достаточно малой частоте  $\nu = \nu_0$  кинетическая энергия фотоэлектронов станет равной нулю и фотоэффект прекратится.

## Безынерционность фотоэффекта

Испускание фотоэлектронов происходит сразу, как только на фотокатод падает излучение с  $\nu \geq \nu_0$ .

### 5.111 «Красная граница» фотоэффекта

$$\nu_0 = \frac{A}{h}$$

Зависит лишь от работы выхода электрона, т. е. от химической природы вещества и состояния его поверхности.

[ $A$  — работа выхода электрона;  $h$  — постоянная Планка]

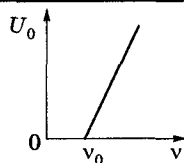
Значения  $\lambda_0$  ( $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}$ ) для металлов

Металл	Cs	Na	Zn	Ag	Pt
$\lambda_0$ (нм)	660	500	372	260	196

### 5.112 Линейная зависимость задерживающего потенциала $U_0$ от частоты $\nu$

Согласно формуле  $eU_0 = \frac{m\nu_{\max}^2}{2}$ ,  $\nu_{\max}$  электронов, вырываемых из вещества при фотоэффекте, тем больше, чем больше  $\nu$ .

При  $\nu < \nu_0$  испускания электронов не происходит.



### 5.6.3. ДАВЛЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ

Давление, оказываемое на тела электромагнитным излучением.

### 5.113 Давление излучения на основе квантовой и волновой теорий

#### Квантовая теория

$$p = \frac{E_e}{c} (1 + \rho) = w(1 + \rho)$$

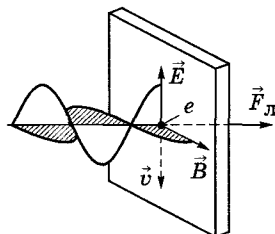
Давление излучения — следствие того, что фотон обладает импульсом. Каждый фотон при соударении с поверхностью передает ей свой импульс. Если на  $1 \text{ м}^2$  в  $1 \text{ с}$  падает  $N$  фотонов, то при коэффициенте отражения  $\rho$  от поверхности отразится  $\rho N$  фотонов, а  $(1 - \rho)N$  — поглотится. Давление  $p$  излучения на поверхность равно импульсу, который передают за  $1 \text{ с}$   $N$  фотонов:

$$p = \frac{2h\nu}{c} \rho N + \frac{h\nu}{c} (1 - \rho)N = \frac{Nh\nu}{c} (1 + \rho) = \frac{E_e}{c} (1 + \rho).$$

◆ Каждый отраженный фотон передает поверхности импульс  $-\frac{2h\nu}{c}$ , поглощенный —  $\frac{h\nu}{c}$ ;  $E_e = Nh\nu$  — *облученность поверхности* (энергия всех фотонов, падающих на  $1 \text{ м}^2$  поверхности тела за  $1 \text{ с}$ );  $w = \frac{E_e}{c}$  — *объемная плотность энергии излучения*.

#### Волновая теория

Если электромагнитная волна падает, например, на металл, то под действием электрического поля волны с напряженностью  $\vec{E}$  электроны будут двигаться со скоростью  $\vec{v}$  в направлении, противоположном  $\vec{E}$ . Магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$  действует на движущиеся электроны с силой Лоренца  $\vec{F}_L$  (определяется по правилу левой руки) в направлении, перпендикулярном поверхности металла. Следовательно, волна оказывает на поверхность металла давление.



## 5.6.4. ЭФФЕКТ КОМПТОНА

Упругое рассеяние коротковолнового электромагнитного излучения (рентгеновского и  $\gamma$ -излучений) на свободных (или слабосвязанных) электронах вещества, сопровождающееся увеличением длины волны.

### 5.114 Комптоновский сдвиг

Комптоновский сдвиг

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$$

$$\Delta\lambda = 2\lambda_C \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = \lambda_C (1 - \cos \vartheta)$$

Разность  $\Delta\lambda$  не зависит от длины волны  $\lambda$  падающего излучения и от природы рассеивающего вещества, а зависит только от угла  $\vartheta$  между направлениями рассеянного и первичного излучений.

[ $\lambda'$  — длина волны рассеянного излучения;  $\lambda$  — длина волны падающего излучения;  $\lambda_C = \frac{h}{mc} = 2,43$  пм — *комптоновская длина волны электрона*;  $h$  — постоянная Планка;  $m$  — масса электрона;  $c$  — скорость света в вакууме]

### 5.115 Интерпретация эффекта Комптона

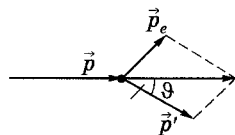
Волновая теория

*Эффект Комптона необъясним на основе волновых представлений.* Согласно волновой теории, механизм рассеяния объясняется «раскачиванием» электронов электромагнитным полем падающей волны. В таком случае частота рассеянного излучения должна совпадать с частотой излучения падающего.

Квантовая теория

Эффект Комптона рассматривается как упругое рассеяние фотона на свободном покоящемся электроне. Фотон, столкнувшись с электроном, передает ему часть своей энергии и импульса и изменяет направление движения (рассеивается). Уменьшение энергии фотона означает увеличение длины волны рассеянного излучения.

[ $\vec{p}$  — импульс налетающего фотона;  $\vec{p}'$  — импульс фотона, рассеянного под углом  $\vartheta$ ;  $\vec{p}_e$  — импульс электрона отдачи]



### 5.116 Изменение длины волны при эффекте Комптона

	До столкновения			После столкновения		
Закон сохранения энергии	Энергия электрона		Энергия фотона	=	Энергия электрона	Энергия фотона
	$W_0$	+	$\varepsilon$	=	$W$	$\varepsilon'$
	$mc^2$	+	$h\nu$	=	$\sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4}$	$h\nu'$
Закон сохранения импульса	Импульс фотона		Импульс электрона	=	Импульс электрона	Импульс фотона
	$\vec{p}$	+	$0$	=	$\vec{p}_e$	$\vec{p}'$

Определение  $\Delta\lambda$  при эффекте Комптона

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \vartheta) = \frac{2h}{mc} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$$

Из законов сохранения энергии ( $mc^2 + h\nu = \sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4} + h\nu'$ ) и импульса ( $p_e^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \vartheta$ )

(использовали теорему косинусов (см. рисунок 5.115) с учетом формул  $p = \frac{h\nu}{c}$ ;  $p' = \frac{h\nu'}{c}$ ;  $\nu = \frac{c}{\lambda}$ ;  $\nu' = \frac{c}{\lambda'}$ ;  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ , получаем формулу для комптоновского сдвига.

## 5.6.5. КОРПУСКУЛЯРНО-ВОЛНОВАЯ ДВОЙСТВЕННОСТЬ СВОЙСТВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

### 5.117 Единство корпускулярных и волновых свойств света

<i>Явления, подтверждающие квантовые представления о природе света</i>	Излучение черного тела, фотоэффект, эффект Комптона
<i>Явления, подтверждающие волновую природу света</i>	Интерференция, дифракция, поляризация света
<i>Явления, объясняемые как волновой, так и квантовой теориями</i>	Давление и преломление света
<i>Уравнения, связывающие корпускулярные свойства электромагнитного излучения (энергия и импульс фотона) с волновыми свойствами (частота (длины волны))</i>	$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$ $p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$

**Вывод.** Электромагнитное излучение обнаруживает единство корпускулярных и волновых свойств.

### 5.118 Проявление волновых и корпускулярных свойств света

Рассмотрение оптических явлений приводит к выводу, что свойства непрерывности, характерные для электромагнитного поля световой волны, не следует противопоставлять свойствам дискретности, характерным для фотонов. Свет, обладая *одновременно* корпускулярными и волновыми свойствами, обнаруживает определенные закономерности в их проявлении.

#### Проявление волновых свойств света

*В закономерностях его распространения, интерференции, дифракции, поляризации света.*

◆ Чем больше длина волны, тем меньше энергия и импульс фотона и тем труднее обнаруживаются квантовые свойства света (с этим связано, например, существование «красной границы» фотоэффекта).

#### Проявление корпускулярных свойств света

В процессах взаимодействия света с веществом.

◆ Чем меньше длина волны, тем больше энергия и импульс фотона и тем труднее обнаруживаются волновые свойства света (например, дифракция рентгеновского излучения обнаружена лишь после применения в качестве дифракционной решетки кристаллов).

## 6. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ АТОМОВ, МОЛЕКУЛ И ТВЕРДЫХ ТЕЛ

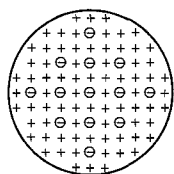
### 6.1. Теория атома водорода по Бору

#### 6.1.1. МОДЕЛИ АТОМОВ

##### 6.1 Модели атома Томсона и Резерфорда

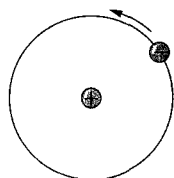
###### Модель атома Томсона

Атом представляет собой непрерывно заряженный положительным зарядом шар радиуса порядка  $10^{-10}$  м, внутри которого около своих положений равновесия колеблются электроны. Суммарный отрицательный заряд электронов равен положительному заряду шара, поэтому атом в целом нейтрален.



###### Модель атома Резерфорда (ядерная (планетарная) модель атома)

Вокруг положительного ядра, имеющего заряд  $Ze$ , размер  $10^{-15}—10^{-14}$  м и массу, практически равную массе атома, в области с линейными размерами порядка  $10^{-10}$  м по круговым (или эллиптическим) орбитам под действием сил электростатического притяжения движутся электроны (подобно тому как планеты обращаются вокруг Солнца под действием сил гравитационного притяжения). Заряд ядра равен суммарному заряду электронов, так как атомы нейтральны.



[ $Z$  — порядковый номер элемента в системе Менделеева;  $e$  — элементарный заряд (масштаб не выдержан)]

##### 6.2 Недостатки атома Резерфорда

Эта модель не согласуется с наблюдаемой *стабильностью атомов*; противоречит законам классической физики

По законам классической электродинамики вращающийся вокруг ядра электрон должен *непрерывно* излучать электромагнитные волны, а поэтому терять свою энергию. В результате электроны будут приближаться к ядру и в конце концов упадут на него.

Эта модель не объясняет наблюдаемые на опыте оптические спектры атомов

Оптические спектры атомов не непрерывны, как это следует из теории Резерфорда, а состоят из узких спектральных линий, т. е. атомы излучают и поглощают электромагнитные волны лишь определенных частот, характерных для данного химического элемента.

### 6.1.2. ЛИНЕЙЧАТЫЙ СПЕКТР АТОМА ВОДОРОДА

#### Спектры излучения атомов

Спектры излучения — важнейшие характеристики их оптических свойств — состоят из отдельных спектральных линий или групп близко расположенных линий; их называют *линейчатыми спектрами*. Каждому элементу присущ свой, характерный только для него, спектр излучения, служащий своего рода «отпечатком пальцев», позволяющим определить элемент, которому он принадлежит. Вид линейчатого спектра не зависит от способа возбуждения атома.

Наиболее изученным спектром излучения является спектр излучения атома водорода — простейшего атома, состоящего из массивного ядра (протона) и электрона, движущегося в кулоновском поле ядра.

### 6.3 Экспериментальный спектр излучения атома водорода

Область спектра	Название серии	Серийная формула
Ультрафиолетовая	Серия Лаймана	$\nu = R \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) [n = 2, 3, 4, \dots]$
Видимая	Серия Бальмера	$\nu = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) [n = 3, 4, 5, \dots]$
	Серия Пашена	$\nu = R \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right) [n = 4, 5, 6, \dots]$
	Серия Брэкета	$\nu = R \left( \frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right) [n = 5, 6, 7, \dots]$
	Серия Пфунда	$\nu = R \left( \frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right) [n = 6, 7, 8, \dots]$
Инфракрасная	Серия Хэмфри	$\nu = R \left( \frac{1}{6^2} - \frac{1}{n^2} \right) [n = 7, 8, 9, \dots]$

$[R = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1} — \text{ постоянная Ридберга}]$

### 6.4 Обобщенная формула Бальмера

#### Обобщенная формула Бальмера (для частоты)

$$\nu = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

В каждой данной серии  $m$  имеет постоянное значение,  $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  (*определяет серию*),  $n$  принимает целочисленные значения начиная с числа  $m + 1$  (*определяет отдельные линии данной серии*).

#### Обобщенная формула Бальмера (для длины волны)

$$\frac{1}{\lambda} = R' \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Спектральную линию с наибольшей длиной волны из всех линий данной серии называют *головной линией* серии. Линия, соответствующая  $n = \infty$ , — *коротковолновая граница*; к ней примыкает *непрерывный спектр*.

Приведенные выше серийные формулы подобраны эмпирически и долгое время не имели теоретического обоснования, хотя и были подтверждены экспериментально с очень большой точностью. Вид серийных формул, удивительная повторяемость в них целых чисел, универсальность постоянной Ридберга свидетельствуют о глубоком физическом смысле найденных закономерностей, вскрыть который в рамках классической физики оказалось невозможным.

$[R = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1} — \text{ постоянная Ридберга}; R' = R/c = 1,1 \cdot 10^8 \text{ м}^{-1} — \text{ постоянная Ридберга}; 1/\lambda — \text{ волновое число}]$

### 6.1.3. ПОСТУЛАТЫ БОРА. СПЕКТР АТОМА ВОДОРОДА ПО БОРУ

#### Первый постулат Бора (постулат стационарных состояний)

*В атоме существуют стационарные (не изменяющиеся со временем) состояния, в которых он не излучает энергии; эти состояния характеризуются определенными дискретными значениями энергии.*

Стационарным состояниям атома соответствуют стационарные орбиты, по которым движутся электроны. Движение электронов по стационарным орбитам не сопровождается излучением электромагнитных волн.

В стационарном состоянии атома электрон, двигаясь по круговой орбите, должен иметь дискретные (квантованные) значения момента импульса, удовлетворяющие условию

$$m_e v_n r_n = n \hbar \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

## Второй постулат Бора (правило частот)

При переходе атома из одного стационарного состояния в другое излучается (поглощается) фотон с энергией

$$h\nu = E_n - E_m,$$

равной разности энергий соответствующих стационарных состояний.

[ $m_e$  — масса электрона;  $v_n$  — его скорость на  $n$ -й орбите радиуса  $r_n$ ;  $\hbar = h/(2\pi)$  — постоянная Планка;  $E_n$  и  $E_m$  — соответственно энергии стационарных состояний атома до и после излучения (поглощения). При  $E_m < E_n$  происходит излучение фотона, при  $E_m > E_n$  — его поглощение. Набор возможных дискретных частот  $\nu = (E_n - E_m)/h$  квантовых переходов и определяет линейчатый спектр атома]

## 6.5 Возможные орбиты в модели атома водорода

### Исходные уравнения для вычисления радиусов орбит

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} = \frac{m_e v_n^2}{r_n}$$

Уравнение движения электрона, движущегося по круговой орбите атома водорода.

$$m_e v_n r_n = n\hbar$$

$(n = 1, 2, 3, \dots)$

Электрон, двигаясь по круговой орбите, обладает дискретными квантовыми значениями момента импульса.

### Радиус $n$ -й стационарной орбиты

$$r_n = n^2 \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{m_e e^2}$$

$(n = 1, 2, 3, \dots)$

Получается при решении исходных уравнений.

### Радиус ближайшей к ядру орбиты ( $n = 1$ ); первый боровский радиус

$$r_1 = a = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{m_e e^2}$$

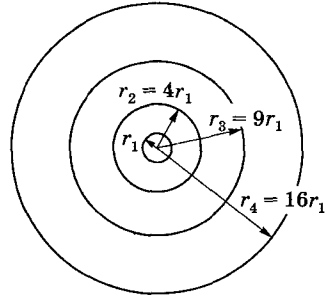
Зависит лишь от фундаментальных постоянных;

$$a = 52,8 \text{ пм.}$$

### Связь $r_n$ и $r_1$

$$r_n = n^2 r_1$$

Радиусы орбит квантованы:  $r_1, 4r_1, 9r_1, \dots$



[ $e$  — элементарный заряд;  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная;  $r_n$  — радиус  $n$ -й стационарной орбиты;  $v_n$  — скорость электрона на  $n$ -й орбите;  $m_e$  — масса электрона;  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  — постоянная Планка;  $n$  — квантовое число;  $a$  — первый боровский радиус]

## 6.6 Значения для радиусов и скоростей электрона в атоме водорода

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
$r_n = n^2 \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = n^2 r_1$ (пм)	52,8	212	476	847	1323	1905
$v_n = \frac{1}{n} \frac{e^2}{2\epsilon_0 \hbar} = \frac{v_1}{n}$ (м/с)	2,19	1,09	0,729	0,547	0,437	0,365

## 6.7 Энергия электрона в атоме водорода

Кинетическая энергия электрона

$$\frac{m_e v_n^2}{2} = \frac{1}{24\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n}$$

Потенциальная энергия электрона в электростатическом поле ядра

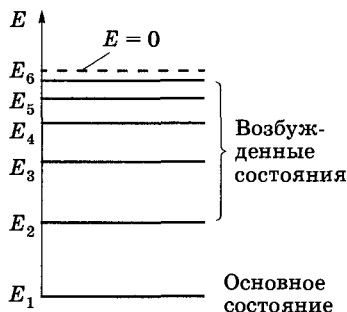
$$-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}$$

Полная энергия электрона в атоме водорода

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{1}{n^2} \frac{m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2}$$

Учли значение  $r_n$

6.6.



Полная энергия электрона в атоме водорода в электрон-вольтах

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ (эВ)}$$

Подставили в формулу для  $E_n$  фундаментальные постоянные.

[ $m_e$  — масса электрона;  $n = 1, 2, 3, \dots$ ;  $r_n$  — радиус  $n$ -й стационарной орбиты;  $v_n$  — скорость электрона на  $n$ -й орбите;  $e$  — элементарный заряд;  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная;  $h$  — постоянная Планка]

Квантование энергии

Энергия электрона в атоме водорода может принимать только дискретные значения, т. е. *квантуется*: энергетические состояния атома водорода образуют последовательность энергетических уровней, изменяющихся в зависимости от  $n$ . Состояние с минимальной энергией, или *основное состояние*, соответствует  $n = 1$ , а его энергия  $E_1 = -13,6$  эВ. Состояния с  $n > 1$  являются *возбужденными* (см. рисунок).

Придавая  $n$  целочисленные значения, получаем для атома водорода возможные уровни энергии стационарных состояний электрона, схематически изображенные на рисунке в виде горизонтальных прямых. С увеличением  $n$  энергетические уровни сближаются и при  $n \rightarrow \infty$   $E_n \rightarrow 0$ . Электрон в атоме водорода обладает минимальной энергией  $E_1 = -13,6$  эВ при  $n = 1$  (знак минус означает, что электрон находится в связанном состоянии) и максимальной  $E_\infty = 0$  при  $n = \infty$ . Если  $E > 0$ , то электрон может иметь любую энергию, так как в данном случае он является свободным.

## 6.8 Спектр атома водорода по Бору

Энергия испущенного фотона при переходе атома водорода из состояния  $n$  в состояние  $m$  с меньшей энергией (см. второй постулат Бора)

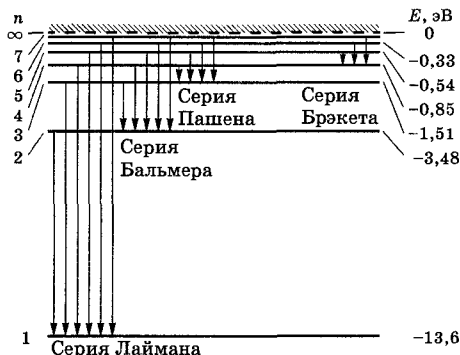
$$h\nu = E_n - E_m = -\frac{m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

Частота излучения

$$\nu = \frac{m_e e^4}{8h^3 \epsilon_0^2} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

[ $R = \frac{m_e e^4}{8h^3 \epsilon_0^2}$  — постоянная Ридберга,

совпадающая со значением в эмпирических формулах для спектра излучения атома водорода 6.3]





Подставляя в формулу для частоты  $m = 1$  и  $n = 2, 3, 4, \dots$ , получаем группу линий, образующих серию Лаймана и соответствующих переходам с возбужденных уровней  $n = 2, 3, 4, \dots$  на основной ( $m = 1$ ). При подстановке  $m = 2$  и  $3, 4, 5, 6$  и соответствующих им значений  $n$  получаем серии Бальмера, Пашена, Брэкета, Пфунда и Хэмфри.

## 6.9 Энергии ионизации, связи и возбуждения

### Энергия ионизации

Энергия, необходимая для удаления электрона из атома, находящегося в основном состоянии. Для атома водорода  $E_i = 13,6$  эВ (см. рисунок 6.8).

### Энергия связи данного состояния

Энергия, необходимая для удаления электрона из атома, находящегося в данном возбужденном состоянии. Например, энергия связи первого возбужденного состояния ( $n = 2$ ) равна  $3,48$  эВ (см. рисунок 6.8).

### Энергия возбуждения

Энергия, которую надо сообщить атому, чтобы электрон из основного состояния перешел в возбужденное. Например, энергия для первого возбужденного состояния ( $n = 2$ )  $E_{\text{возб}} = -3,48$  эВ  $- (-13,6$  эВ)  $\approx 10,1$  эВ 6.9.

## 6.10 Достоинства и недостатки теории Бора

### Достоинства

- ◆ Объяснила линейчатый спектр атомов.
- ◆ Предсказала правильные значения частот спектральных линий атома водорода.
- ◆ Правильно определила размеры атома водорода.
- ◆ Получила верное значение постоянной Ридберга.

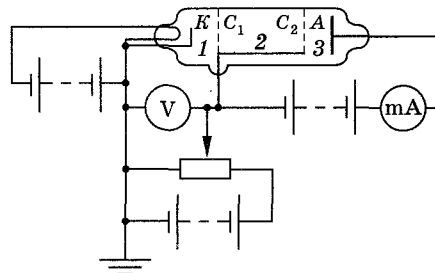
### Недостатки

- ◆ Обладает внутренними противоречиями (с одной стороны, применяет законы классической физики, с другой — основывается на квантовых постулатах).
- ◆ Не смогла объяснить интенсивности линий.
- ◆ Не смогла ответить на вопрос, почему совершаются те или иные переходы
- ◆ Оказалась несостоятельной в отношении многоэлектронных атомов (даже атома гелия — следующего за атомом водорода).

## 6.1.4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ПОДТВЕРЖДЕНИЕ КВАНТОВАНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УРОВНЕЙ АТОМОВ

### 6.11 Принципиальная схема опытов Франка и Герца

Вакуумная трубка, заполненная парами ртути ( $p \approx 13$  Па), содержит катод  $K$ , две сетки  $C_1$  и  $C_2$  и анод  $A$ . Электроны, эмиттируемые катодом, ускоряются разностью потенциалов  $\phi$ , приложенной между катодом и сеткой  $C_1$ . Между сеткой  $C_2$  и анодом прикладывается небольшой ( $\approx 0,5$  В) задерживающий потенциал. Электроны, ускоренные в области 1, попадают в область 2 между сетками,



где испытывают соударения с атомами паров ртути. Электроны, обладающие после соударения достаточной энергией для преодоления задерживающего потенциала в области  $Z$ , достигают анода.

## 6.12 Опытное подтверждение постулатов Бора

### Идея опытов Франка и Герца

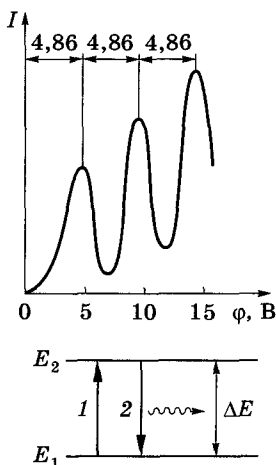
Если в атомах действительно существуют стационарные состояния, то электроны, сталкиваясь с атомами ртути, должны терять энергию *дискретно, определенными порциями*, равными разности энергий соответствующих стационарных состояний атома.

### Опытное подтверждение первого постулата Бора

Из вольт-амперной характеристики (зависимость анодного тока  $I$  от напряжения  $\phi$ ) следует, что при увеличении ускоряющего напряжения вплоть до 4,86 эВ сила тока монотонно растет, проходит через максимум (4,86 В), затем резко падает. Дальнейшие максимумы наблюдаются при  $2 \cdot 4,86$  и  $3 \cdot 4,86$  В.

Ближайшим к основному, невозбужденному состоянию атома ртути является возбужденное состояние, отстоящее от основного по шкале энергий на  $\Delta E = 4,86$  эВ (см. рисунок). Энергия, необходимая, таким образом, для перехода электрона из основного состояния в первое возбужденное (переход 1), равна 4,86 эВ.

Из вольт-амперной характеристики действительно следует, что электроны при столкновениях с атомами ртути передают им только определенные порции энергии (причем 4,86 эВ — наименьшая возможная такая порция, наименьший квант энергии, которая может быть поглощена атомом ртути в основном энергетическом состоянии), убедительно доказывают существование у атомов ртути дискретных энергетических уровней (*опытное подтверждение первого постулата Бора*).



### Опытное подтверждение второго постулата Бора

Время жизни атома ртути в возбужденном состоянии  $\tau \approx 10^{-8}$  с, поэтому электрон спустя время  $\tau$  возвратится в основное состояние (переход 2), излучая при этом фотон с энергией  $\Delta E = 4,86$  эВ и длиной волны  $\lambda = hc/\Delta E = 253,6$  нм. Спектральный анализ действительно показал, что длина волны излучения, испускаемого ртутными парами, на самом деле равна 253,6 нм, т. е. соответствует переходам атома ртути из первого возбужденного состояния в основное (*опытное подтверждение второго постулата Бора*).

## 6.2. Элементы квантовой механики

### 6.2.1. ГИПОТЕЗА ДЕ БРОЙЛЯ. ВОЛНЫ ДЕ БРОЙЛЯ

## 6.13 Универсальность корпускулярно-волнового дуализма

### Гипотеза де Бройля

*Корпускулярно-волновой дуализм имеет универсальный характер и распространяется не только на фотоны, но и на все частицы материи: частицы вещества (в частности, электроны) обладают наряду с корпускулярными также и волновыми свойствами.*

**Уравнения, связывающие корпускулярные свойства (энергия и импульс) и волновые (частота (длина волны)) характеристики микрочастиц**

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

Формулы такие же, что и для фотона.

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

$[k = \frac{2\pi}{\lambda}$  — волновое число;  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  — постоянная Планка;  $\omega = 2\pi\nu$  — циклическая частота]

## 6.14 Длина волны де Бройля

Длина волны де Бройля	Формула	Пояснение
Общее выражение	$\lambda = \frac{h}{p}$	Длина волны, связываемая с частицей
Нерелятивистская частица	$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mT}}$	Учли, что кинетическая энергия частицы $T = \frac{p^2}{2m}$
Релятивистская частица	$\lambda = \frac{h}{mc} \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{v/c}$	Релятивистский импульс $p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$
	$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{E^2 - m^2c^4}} = \frac{hc}{E} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{mc^2}{E^2}}}$	Полная энергия частицы $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$
	$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{T(T + 2mc^2)}}$	Полная энергия частицы $E = T + mc^2$

$[h$  — постоянная Планка;  $p$  — импульс;  $m$  — масса частицы;  $v$  — скорость частицы;  $T$  — кинетическая энергия частицы;  $c$  — скорость распространения света в вакууме;  $E$  — полная энергия частицы]

## 6.15 Экспериментальное подтверждение волновых свойств микрочастиц

### Опыты Девиссона и Джермера

Пучок электронов, рассеивающийся от естественной дифракционной решетки — кристалла никеля, дает отчетливую дифракционную картину. Дифракционные максимумы соответствовали формуле Вульфа—Брэггов  $\lambda = 2d \sin \theta$ , а брэгговская длина волны оказалась в точности равной длине волны, вычисленной по формуле  $\lambda = h/p$ .

### Опыты Тартаковского и Томсона

Наблюдалась дифракционная картина при прохождении пучка быстрых электронов ( $\approx 50$  кэВ) через металлическую фольгу (толщиной  $\approx 1$  мкм).

### Опыты Тартаковского

Даже в случае столь слабого электронного пучка, когда каждый электрон проходит через прибор независимо от других (промежутки времени между двумя электронами в  $10^4$  раз больше времени прохождения электроном прибора), возникающая при длительной экспозиции дифракционная картина не отличается от дифракционных картин, получаемых при короткой экспозиции для потоков электронов, в десятки миллионов раз

более интенсивных. Следовательно, волновые свойства частиц не являются свойством их коллектива, а присущи *каждой частице* в отдельности.

◆ Дифракционные явления обнаружены также для нейтронов, протонов, атомных и молекулярных пучков. Это окончательно послужило доказательством наличия волновых свойств микрочастиц и позволило описывать движение микрочастиц в виде волнового процесса, характеризующегося определенной длиной волны, рассчитываемой по формуле де Бройля.

## 6.16 Плоская волна де Бройля

$$\Psi(x, t) = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}$$

Согласно корпускулярно-волновому дуализму материи и гипотезе де Бройля, с движением частицы, обладающей определенной энергией и импульсом, связывается *плоская волна де Бройля*.

◆ Рассмотрен одномерный случай. Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ , имеет вид  $\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$ , или в комплексной записи  $\xi(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)}$ . При записи плоской волны де Бройля учтено, что  $\omega = \frac{E}{\hbar}$ ,  $k = \frac{p}{\hbar}$  ( $\omega$  — циклическая частота,  $k$  — волновое число). Показатель экспоненты в плоской волне де Бройля берется со знаком минус, но это несущественно, так как физический смысл имеет  $|\Psi|^2$  **6.22**.

## 6.17 Свойства волн де Бройля

### Фазовая скорость **4.47**

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v}$$

На фазовую скорость не накладываются релятивистские ограничения.

### Групповая скорость **4.49**

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp}$$

### Групповая скорость для нерелятивистских частиц

$$u = \frac{dE}{dp} = \frac{d\left(\frac{p^2}{2m}\right)}{dp} = \frac{p}{m} = \frac{mv}{m} = v$$

Формула для  $u$  выражает важный физический смысл: групповая скорость волны де Бройля равна скорости частицы, т. е. волны де Бройля перемещаются вместе с частицей.

### Групповая скорость для релятивистских частиц

$$u = \frac{dE}{dp} = \frac{d}{dp}(\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}) = \frac{pc^2}{\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}} = \frac{pc^2}{E} = \frac{mvc^2}{mc^2} = v$$

### Дисперсия волн де Бройля

#### нерелятивистский случай

$$v = \frac{E}{p} = \frac{p}{2m} = \frac{\hbar k}{2m}$$

#### релятивистский случай

$$v = \frac{E}{p} = \frac{\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}}{p} = \frac{\sqrt{m^2c^4 + \hbar^2k^2}}{\hbar k} + c^2$$

Фазовая скорость, как для нерелятивистских, так и релятивистских частиц, *зависит от длины волны (частоты)*, поскольку  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ;  $p = \hbar k$ .

[ $\omega$  — циклическая частота;  $k$  — волновое число;  $\hbar = h(2\pi)$  — постоянная Планка;  $E$  — полная энергия частицы;  $p$  — импульс частицы;  $v$  — скорость движения частицы;  $c$  — скорость распространения света в вакууме;  $m$  — масса частицы]

## 6.2.2. СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Во многих случаях классические представления (например, в каждый момент времени частица занимает в пространстве строго определенное место и обладает определенным импульсом) неприменимы для описания микробъектов. Гейзенберг выдвинул идею о *принципиальной невозможности* измерения *определенных пар* связанных между собой характеристик так, чтобы они одновременно имели точные значения.

### 6.18 Соотношение неопределенностей для координат и импульсов

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta p_x &\geq \hbar, \\ \Delta y \Delta p_y &\geq \hbar, \\ \Delta z \Delta p_z &\geq \hbar \end{aligned}$$

Микрочастица (микробъект) не может иметь *одновременно* точных значений координаты ( $x, y, z$ ) и соответствующих компонентов импульса ( $p_x, p_y, p_z$ ), причем произведение неопределенностей координаты и соответствующей ей проекции импульса не может быть меньше величины порядка  $\hbar$ .

#### Физический смысл соотношения

Из соотношения неопределенностей следует, что, например, если микрочастица находится в состоянии с точным значением координаты ( $\Delta x = 0$ ), то в этом состоянии соответствующая проекция ее импульса оказывается совершенно неопределенной ( $\Delta p_x \rightarrow \infty$ ), и наоборот. Таким образом, для микрочастицы не существует состояний, в которых ее координаты и импульс имели бы одновременно точные значения.

### 6.19 Соотношение неопределенностей для энергии и времени

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar$$

$[\Delta E$  — неопределенность энергии некоторого состояния системы;  $\Delta t$  — промежуток времени, в течение которого оно существует]

#### Физический смысл соотношения

Из-за конечности времени жизни атомов в возбужденном состоянии энергия возбужденных состояний атомов не является точно определенной, поэтому частота излученного фотона также должна иметь неопределенность  $\Delta \nu = \Delta E/h$ . Тогда линии спектра должны иметь частоту  $\nu = \pm \Delta E/h$ . Опыт действительно показывает, что все спектральные линии размыты.

### 6.20 Соотношение неопределенностей — следствие специфики микробъектов

Невозможность одновременно точно определить координату и соответствующую проекцию импульса не связана с несовершенством методов измерения или измерительных приборов, а является *следствием специфики микробъектов*, отражающей особенности их объективных свойств, а именно *двойственной корпускулярно-волновой природы*. Соотношение неопределенностей получено при одновременном использовании классических характеристик движения частицы (координаты, импульса) и наличия у нее волновых свойств. Так как в классической механике принимается, что измерение координаты и импульса может быть произведено с любой точностью, то *соотношение неопределенностей является*, таким образом, *квантовым ограничением применимости классической механики к микробъектам*.

◆ Повышение точности в знании одной переменной, таким образом, ведет к понижению точности в знании другой, и наоборот. Поэтому если в классической механике наличие координат и импульсов (скоростей) системы точно задает ее поведение во времени и пространстве, то предсказание поведения квантовой системы должно носить вероятностный характер.

### 6.2.3. ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ СТАТИСТИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

В общем случае (произвольное движение частицы в произвольных силовых полях) состояние частицы в квантовой механике задается *волновой функцией* (или *пси-функцией*)  $\Psi(\vec{r}, t)$ , зависящей от координат и времени. Она — *основной носитель информации* о корпускулярных и волновых свойствах микрочастиц. В частном случае свободного движения частицы волновая функция — плоская волна де Бройля **6.16**.

#### 6.21 Статистическая интерпретация волновой функции

$$|\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^*$$

На основании статистической интерпретации вероятность нахождения частицы в момент времени  $t$  с координатами  $x$  и  $x + dx$ ,  $y$  и  $y + dy$ ,  $z$  и  $z + dz$  определяется *интенсивностью волновой функции*, т. е. квадратом пси-функции. Поскольку в общем случае  $\Psi$  — комплексная функция, а вероятность должна быть всегда действительной и положительной величиной, то за меру интенсивности принимается *квадрат модуля волновой функции*.

[ $\Psi^*$  — функция, комплексно сопряженная  $\Psi$ ]

#### 6.22 Физический смысл $\Psi$ -функции

$$dW = |\Psi|^2 dV$$

Вероятность  $dW$  нахождения частицы в элементе объема  $dV$  в момент времени  $t$ .

$$w = \frac{dW}{dV} = |\Psi|^2$$

*Плотность вероятности*, т. е. вероятность нахождения частицы в момент времени  $t$  в окрестности данной точки пространства. Плотность вероятности — величина, наблюдаемая

на опыте, в то время как сама волновая функция, являясь комплексной, наблюдению недоступна. В этом заключается существенное отличие в описании состояний частиц в квантовой и классической механике (в классической механике величины, описывающие состояние частиц, наблюдаемы).

$$W = \int_V dW = \int_V |\Psi|^2 dV$$

Вероятность найти частицу в момент времени  $t$  в некотором объеме  $V$ .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, y, z, t)|^2 dV = 1$$

*Условие нормировки вероятностей*. Так как  $|\Psi|^2 dV$  определяется как вероятность, то, проинтегрировав это выражение в бесконечных пределах, получим вероятность того, что частица

в момент времени  $t$  находится где-то в пространстве. Это есть вероятность достоверного события, а ее в теории вероятностей считают равной 1.

◆ Волновая функция — объективная характеристика состояния микрочастиц и должна удовлетворять ряду ограничений. Она должна быть *конечной* (вероятность не может быть больше единицы), *однозначной* (вероятность не может быть неоднозначной величиной) и *непрерывной* (вероятность не может изменяться скачком).

#### 6.23 Принцип суперпозиции состояний для волновых функций

$$\Psi = \sum_n C_n \Psi_n$$

Если какая-либо система (частица или их совокупность) может находиться в различных состояниях, описываемых волновыми функциями  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n, \dots$ , то она может находиться в состоянии  $\Psi$ , описываемом линейной комбинацией этих функций.

[ $C_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — произвольные (в общем случае комплексные) числа, при этом квадрат модуля коэффициента  $C_n$ , т. е.  $|C_n|^2$ , равен вероятности обнаружить, что система, представленная состоянием  $\Psi$ , может оказаться в состоянии  $\Psi_n$ . Сложение *волновых функций* (амплитуд вероятностей), а не *вероятностей* (определяемых квадратами модулей волновых функций) принципиально отличает квантовую теорию от классической статистической теории, в которой для независимых событий справедлива *теорема сложения вероятностей*]

## 6.2.4. ВРЕМЕННОЕ И СТАЦИОНАРНОЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

### 6.24 Основное уравнение нерелятивистской квантовой механики

Статистическое толкование волн де Бройля 6.22 и соотношение неопределенностей Гейзенберга 6.16 привели к выводу, что уравнением движения в квантовой механике, описывающим движение микрочастиц в различных силовых полях, должно быть уравнение, из которого бы вытекали наблюдаемые на опыте волновые свойства частиц. Основное уравнение должно быть уравнением относительно волновой функции  $\Psi(x, y, z, t)$ , так как именно она, или, точнее, величина  $|\Psi|^2$ , определяет вероятность пребывания частицы в момент времени  $t$  в объеме  $dV$ , т. е. в области с координатами  $x$  и  $x + dx$ ,  $y$  и  $y + dy$ ,  $z$  и  $z + dz$ . Так как искомое уравнение должно учитывать волновые свойства частиц, то оно должно быть *волновым уравнением*, подобно уравнению, описывающему электромагнитные волны.

#### Временное уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U(x, y, z, t) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

Это уравнение *постулируется*, а его правильность подтверждается согласием с опытом получаемых с его помощью результатов.

#### Условия, накладываемые на волновую функцию

- ◆ Волновая функция должна быть конечной, однозначной и непрерывной.
- ◆ Производные  $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \Psi}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$  должны быть непрерывны.
- ◆ Функция  $|\Psi|^2$  должна быть интегрируема (это условие сводится к условию нормировки вероятностей 6.22).
- ◆ Уравнение Шредингера справедливо для *нерелятивистских частиц* (скорости  $v \ll c$ ). [ $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ,  $m$  — масса частицы,  $\Delta$  — оператор Лапласа ( $\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$ ),  $i$  — мнимая единица,  $U(x, y, z, t)$  — потенциальная функция частицы в силовом поле, в котором она движется,  $\Psi(x, y, z, t)$  — искомая волновая функция частицы]

### 6.25 Стационарное уравнение Шредингера

#### Представление волновой функции для стационарных состояний (состояний с фиксированными значениями энергии)

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

В случае стационарного силового поля (функция  $U = U(x, y, z)$  не зависит от времени и имеет смысл потенциальной энергии) волновая функция представляется в виде произведения двух функций: одна — функция только координат, другая функция — только времени (зависимость от времени выражается множителем  $e^{-i\omega t} = e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ ).

#### Стационарное уравнение Шредингера

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0$$

Получилось после подстановки волновой функции во временное уравнение Шредингера и преобразований.

[ $\psi$  — *координатная (амплитудная)* часть волновой функции  $\Psi(x, y, z, t)$  стационарного состояния ( $\psi$  также называют *волновой функцией*);  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ;  $E$  — полная энергия частицы;  $U = U(x, y, z)$  — ее потенциальная энергия;  $\Delta$  — оператор Лапласа]

## Собственные значения энергии

В уравнение Шредингера в качестве параметра входит полная энергия  $E$ . Реальный физический смысл имеют только решения, которые выражаются регулярными функциями  $\Psi$  ( $\Psi$  должны быть конечными, однозначными и непрерывными вместе со своими первыми производными). Регулярные решения имеют место лишь при определенном наборе  $E$ , отвечающем данной задаче. Эти значения энергии называются *собственными*. Они могут образовывать как *непрерывный*, так и *дискретный спектр* энергий.

## 6.2.5. ОПЕРАТОРЫ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ И ИХ СВОЙСТВА

### 6.26 Математический аппарат квантовой механики

Согласно соотношению неопределенностей, в квантовой области не существует таких состояний, в которых координата частицы и соответствующая ей проекция импульса имели бы одновременно точные значения. Это находит свое отражение и в формальной стороне теории — *математический аппарат квантовой механики резко отличается от математического аппарата классической механики*. Кроме того, он должен соответствовать физической постановке задач квантовой механики, например, учитывать волновые свойства микрочастиц. В квантовой механике используют *представление физических величин с помощью математических операторов*.

### 6.27 Свойства операторов

#### Оператор

$$f(x) = \hat{L}\varphi(x)$$

Правило, с помощью которого какой-то функции  $\varphi(x)$  некоторой переменной сопоставляется функция  $f(x)$  той же переменной. Символически это записывается в виде умножения  $\hat{L}$  (операторы обозначаются буквами со «шляпкой» над ними) на  $\varphi(x)$ .

#### Сумма операторов

$$\hat{C}\varphi = \hat{A}\varphi + \hat{B}\varphi$$

#### Разность операторов

$$\hat{D}\varphi = \hat{A}\varphi - \hat{B}\varphi$$

Сложение, вычитание и умножение операторов производится по обычным алгебраическим правилам сложения, вычитания и умножения чисел.

#### Произведение операторов

$$\hat{F}\varphi = \hat{A}(\hat{B}\varphi)$$

При умножении операторов не всегда  $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$ .

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$$

*Коммутирующие операторы.*

$$\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$$

*Некоммутирующие операторы.*

### 6.28 Линейные и эрмитовы операторы

#### Линейный оператор

$$\hat{L}(C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2) = C_1\hat{L}\varphi_1 + C_2\hat{L}\varphi_2$$

Оператор *линейный*, если для любых двух функций  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  и любых постоянных  $C_1$  и  $C_2$  выполняется записанное условие. В *квантовой механике*



применяются только линейные операторы (чтобы применение операторов не нарушало принципа суперпозиции состояний).

Примеры:  $\hat{L} = 1$ ;  $\hat{L} = 2$ ;  $\hat{L} = \frac{d}{dx}$ ;  $\hat{L} = \frac{d^2}{dx^2}$ .

### Линейный эрмитов оператор

$$\int \psi_1^* \hat{L} \psi_2 dV = \int \psi_2 \hat{L}^* \psi_1^* dV$$

Оператор *эрмитов*, если выполняется записанное условие;  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — произвольные функции (звездочка означает операцию комплексного сопряжения), а интегрирование производится по всей области изменения независимых переменных.

Примеры:  $\hat{L} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ ;  $\hat{L} = \Delta$ .

## 6.29 Свойства собственных функций

### Уравнение для собственных функций и собственных значений оператора

$$\hat{L} \psi = L \psi$$

В уравнении  $\hat{L}$  — оператор, отвечающий данной физической величине; если оператор  $\hat{L}$  воспроизводит функцию  $\psi$  с точностью до множителя  $L$ , то  $\psi$  — *собственная функция оператора  $\hat{L}$* , а множитель  $L$  — *собственное значение оператора  $\hat{L}$* .

◆ Функция  $\psi$  удовлетворяет *стандартным условиям* (определена по всей области независимых переменных, непрерывна, однозначна и конечна) и условию квадратичной интегрируемости (интеграл  $\int |\psi|^2 dV$  сходится).

### Взаимно ортогональные собственные функции

$$\int \psi_m^* \psi_n dV = 0, \text{ если } m \neq n$$

Собственные функции  $\psi_m$  и  $\psi_n$  линейного эрмитова оператора  $\hat{L}$ , отвечающие различным собственным значениям  $L_m$  и  $L_n$ , взаимно ортогональны, если они отвечают записанному условию.

### Ортогональные и нормированные системы функций

$$\int \psi_m^* \psi_n dV = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{если } m = n, \\ 0, & \text{если } m \neq n \end{cases}$$

Предыдущее равенство объединено с условием нормировки вероятностей 6.22.

В квантовой механике используются *эрмитовы операторы*, так как собственные значения эрмитовых операторов — действительные числа.

## 6.30 Обобщенный ряд Фурье

### Разложение функции $\psi(x)$ по собственным функциям $\psi_n(x)$

$$\psi(x) = \sum_n C_n \psi_n(x)$$

Любая функция  $\psi(x)$ , определенная в той же области переменных и подчиненная тому же классу граничных условий, что и собственные функции  $\psi_n(x)$ , может быть разложена в ряд (в обобщенный ряд Фурье).

[ $\psi_n(x)$  — ортогональные собственные функции оператора  $\hat{L}$ , отвечающего данной физической величине]

### Вероятность результатов измерения

Квадраты модулей коэффициентов разложения в ряд играют роль вероятностей получить при измерениях физической величины одно из чисел  $L_1, L_2, \dots, L_n, \dots$ , являющихся собственными значениями оператора  $\hat{L}$ . Иными словами, *вероятность того, что при измерении физической величины  $L$  будет получено числовое значение  $L_n$ , равна  $|C_n|^2$ .*

### 6.31 Средние значения физических величин

Среднее значение физической величины  $L$  в состоянии  $\psi$

$$\langle L \rangle = \int \psi^* \hat{L} \psi dV$$

[ $\hat{L}$  — соответствующий оператор;  $\psi$  — нормированная волновая функция,  $dV$  — элемент объема в пространстве независимых переменных, а интеграл берется по всей области изменения этих переменных]

### 6.32 Возможность одновременного измерения физических величин

Если двум физическим величинам отвечают *коммутирующие операторы*, то эти величины могут иметь одновременно определенные значения (поэтому в принципе могут быть измерены одновременно).

Если двум физическим величинам отвечают *некоммутирующие операторы*, то они не могут одновременно иметь определенных значений.

## 6.2.6. ОПЕРАТОРЫ ВАЖНЕЙШИХ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

### 6.33 Связь между изображением физических величин операторами и опытом

Постулат, устанавливающий связь между изображением физических величин операторами и опытом

Совокупность собственных значений оператора  $\hat{L}$  ( $L_1, L_2, \dots, L_n, \dots$ ) тождественна с совокупностью всех возможных результатов измерений механической величины  $L$ , изображаемой оператором  $\hat{L}$ .

Иными словами, на опыте наблюдаются только те значения величины  $L$ , которые совпадают с одним из собственных значений оператора  $\hat{L}$ , соответствующего рассматриваемой величине.

### 6.34 Операторы координаты и импульса

Оператор координаты	$\hat{x} = x$	Оператор координаты частицы есть само число
Операторы проекции импульса соответственно на оси $x, y, z$	$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x},$ $\hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y},$ $\hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$	Операторы координаты и проекции импульса являются основными в квантовой теории
Оператор вектора импульса	$\hat{\vec{p}} = \vec{j}\hat{p}_x + \vec{k}\hat{p}_y + \vec{l}\hat{p}_z,$ $\hat{p} = -i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{k} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{l} \right) = -i\hbar \nabla = \frac{\hbar}{i} \nabla$	$[\vec{j}, \vec{k}, \vec{l}]$ — единичные векторы координатных осей; $\frac{\partial}{\partial x} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{k} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{l} = \nabla$ — ла-оператор]

### 6.35 Операторы момента импульса

Оператор момента импульса	$\hat{L} = [\vec{r}, \hat{p}] = [\vec{r}, (-i\hbar\nabla)] = -i\hbar[\vec{r}, \nabla] = \frac{\hbar}{i}[\vec{r}, \nabla]$	
Операторы проекций момента импульса на оси координат	$\hat{L}_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right),$ $\hat{L}_y = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\hbar}{i}\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right),$ $\hat{L}_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$	Расписаны согласно векторному произведению (см. оператор момента импульса)
Оператор проекции момента импульса на полярную ось $z$ (от нее отсчитывается полярный угол $\vartheta$ )	$\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}$	Вид этого оператора похож на вид операторов проекции импульса <b>6.34</b>

### 6.36 Уравнения для собственных значений операторов $\hat{L}^2$ и $\hat{L}_z$

Уравнение	Собственные значения	Пояснения
$\hat{L}^2\psi = L^2\psi$	$L^2 = l(l+1)\hbar^2 \quad (l = 0, 1, 2, \dots),$ $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar \quad (l = 0, 1, 2, \dots)$	Лишь при данных собственных значениях квадрата момента импульса решения уравнения удовлетворяют условиям непрерывности, конечности и однозначности ( $l$ — целое положительное число)
$\hat{L}_z\psi = L_z\psi$ или $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = L_z\psi$	$L_z = m\hbar$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$	Решение уравнения имеет вид $\psi(\varphi) = Ae^{(i/\hbar)L_z\varphi}$ . Чтобы функция была однозначной, надо, чтобы $\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi)$ или $e^{(i/\hbar)L_z\varphi} = e^{(i/\hbar)L_z(\varphi + 2\pi)}$ . Это же возможно только тогда, когда $L_z/\hbar = m$ , где $m$ — нуль или целое (положительное или отрицательное) число

**Вывод.** Собственные значения операторов  $\hat{L}^2$  и  $\hat{L}_z$  образуют дискретный ряд значений, т. е. момент импульса и проекция момента импульса на произвольную ось  $z$  квантуются.

### 6.37 Операторы энергии

#### Оператор кинетической энергии

$$\hat{T} = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2}{2m},$$

$$\vec{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$$

$$\hat{p}_x^2\psi = \hat{p}_x(\hat{p}_x\psi) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\left(-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = -\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}.$$

Аналогично, найдя  $\hat{p}_y^2\psi$  и  $\hat{p}_z^2\psi$ , получим оператор кинетической энергии ( $\Delta$  — оператор Лапласа).

#### Оператор потенциальной энергии

$$\hat{U}(x, y, z) = U(x, y, z)$$

Потенциальная энергия  $U = U(x, y, z)$  — функция только координат, поэтому оператор потенциальной энергии есть сама потенциальная энергия.

## Оператор полной энергии (гамильтониан)

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{U}$$

$$\vec{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(x, y, z)$$

Кинетическая энергия — функция импульсов, а потенциальная — функция координат. По соотношению неопределенностей не существует таких состояний, в которых частицы имели бы одновременно определенные импульсы и координаты. Поэтому полная энергия микрочастицы измеряется как единое целое. В классической механике полную энергию, выраженную через импульсы и координаты, называют функцией Гамильтона  $H$ . Если силы не зависят от времени, то функция Гамильтона совпадает с полной энергией системы:  $H = E$ .

### 6.38 Уравнение Шредингера в операторной форме

Уравнение	Обычная запись уравнения	Гамильтониан, оператор полной энергии	Операторная форма
Временное уравнение Шредингера	$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U(x, y, z, t) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$	$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(x, y, z, t)$	$\hat{H} \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$
	$\Psi = \Psi(x, y, z, t)$ . Уравнение Шредингера в операторной форме имеет более общий характер и пригодно для описания движения частицы в произвольных стационарных и нестационарных полях, в частности в случае движения частицы в электромагнитном поле		
Стационарное уравнение Шредингера	$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U(x, y, z) \psi = E \psi$	$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(x, y, z)$	$\hat{H} \psi = E \psi$

[ $E$  — полная энергия частицы;  $\psi = \psi(x, y, z)$  — координатная часть волновой функции  $\Psi(x, y, z, t)$ ; стационарное уравнение Шредингера в операторной форме имеет регулярные решения лишь при определенных значениях  $E$ , образующих спектр оператора полной энергии]

### 6.2.7. ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОЙ ЧАСТИЦЫ

Свободная частица — частица, движущаяся в отсутствие внешних полей. Так как на свободную частицу (пусть она движется вдоль оси  $x$ ) силы не действуют, то потенциальная энергия частицы  $U(x) = \text{const}$  и ее можно принять равной нулю. Тогда полная энергия частицы совпадает с ее кинетической энергией.

### 6.38 Уравнение Шредингера для стационарных состояний

#### Уравнение Шредингера

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2 \psi = 0$$

$$\psi(x) = A e^{ikx} = A e^{(i/\hbar)\sqrt{2mE}x} \quad (A = \text{const}, k = \text{const});$$

$$\Psi(x, t) = \psi e^{-i\omega t} = A e^{-i\omega t + ikx} = A e^{-(i/\hbar)(Et - p_x x)};$$

$$(E = \hbar\omega \text{ и } p_x = \hbar k).$$

◆ Зависящая от времени волновая функция  $\Psi(x, t)$  представляет собой плоскую монохроматическую волну де Бройля **16**.

$$[k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{p_x^2}{\hbar^2}]$$

## Собственные значения энергии

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{p_x^2}{2m}$$

Энергия свободной частицы может принимать любые значения (так как волновое число  $k$  может принимать любые положительные значения), т. е. энергетический спектр свободной частицы непрерывен.

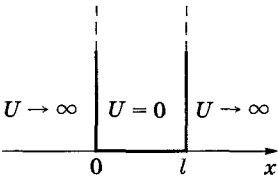
## Плотность вероятности

$$|\Psi|^2 = |\psi|^2 = |A|^2$$

Мера вероятности нахождения частицы в момент времени  $t$  в окрестности данной точки пространства. В данном случае плотность вероятности не зависит ни от времени, ни от координат: все положения свободной частицы в пространстве равновероятны.

## 6.2.8. ЧАСТИЦА В ОДНОМЕРНОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЕ С БЕСКОНЕЧНО ВЫСОКИМИ СТЕНКАМИ

### 6.39 Потенциальная яма с бесконечно высокими стенками

Потенциальная яма	Потенциальная энергия	Стационарное уравнение Шредингера в пределах ямы ( $0 \leq x \leq l$ )
	$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq l, \\ \infty, & x > l \end{cases}$	$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0 \text{ или } \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2 \psi = 0,$ $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

[ $l$  — ширина ямы; энергия отсчитывается от дна ямы;  $k$  — волновое число;  $E$  — полная энергия частицы]

## 6.40 Решение уравнения Шредингера для частицы в яме

### Граничные условия

$$\psi(0) = \psi(l) = 0$$

Это следует из условия непрерывности. За пределы ямы частица не проникает, и в областях  $x < 0$  и  $x > l$  волновая функция  $\psi(x) = 0$ .

### Общее решение уравнения Шредингера

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx,$$

$$\psi(x) = A \sin kx$$

$\psi(0) = \psi(l) = 0$ , поэтому  $B = 0$ .

Условию  $\psi(l) = A \sin kl = 0$  удовлетворяет  $k = n \frac{\pi}{l}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

### Собственные функции

$$\psi_n(x) = A \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$A = \sqrt{2/l}$  (коэффициент находится из условия нормировки:  $A^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = 1$ ).

### Нормированные собственные функции

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

Значение  $n = 0$  приводит к тривиальному результату  $\psi(x) = 0$ , а отрицательные значения  $n$  — к тем же функциям, но с отрицательным знаком, что не дает новых физических решений.

## 6.41 Энергетический спектр частицы

### Собственные значения энергии частицы

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}$$

( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

Получается из выражений  $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$  и  $k = \frac{n\pi}{l}$ . Спектр энергии частицы дискретен. Квантованные значения  $E_n$  — уровни энергии,  $n$  — квантовое число.

Минимальная, не равная нулю энергия, соответствующая основному состоянию

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}$$

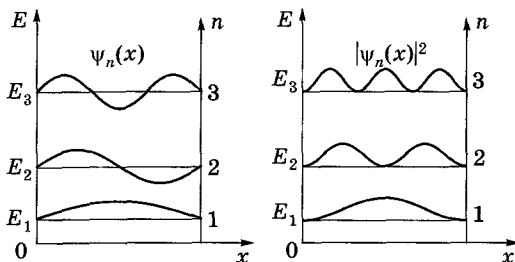
Наличие отличной от нуля минимальной энергии — следствие соотношения неопределенностей 6.18. Неопределенность импульса  $\Delta p_x \geq \hbar/l$  (частица «зажата» в яме, следовательно, ее положение известно с неопределенностью  $\Delta x \approx l$ ). Поэтому энергия нулю не может быть равна (это потребовало бы выполнения условия  $\Delta p_x = 0$ ).

◆ Состояние с энергией  $E_1$  — основное состояние, остальные состояния — возбужденные. Энергии возбужденных состояний:  $4E_1, 9E_1, 16E_1, \dots$  (соответственно значениям квантовых чисел  $n = 2, 3, 4, \dots$ ) (см. рис. 6.42).

## 6.42 Собственные функции $\psi_n(x)$ и плотности вероятности

$|\psi_n(x)|^2 = \psi_n^*(x)\psi_n(x)$  обнаружения частицы на разных расстояниях от стенок ямы

Из рисунка следует, что, например, в состоянии с  $n = 2$  частица не может находиться в центре ямы, в то же время одинаково часто может пребывать в ее левой и правой частях. Такое поведение частицы указывает на несостоятельность представлений о траекториях частиц в квантовой механике.



## 6.2.9. ОТРАЖЕНИЕ И ПРОХОЖДЕНИЕ СКВОЗЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ ПОРОГ

### 6.43 Прямоугольный бесконечно протяженный порог

Одномерный потенциальный порог	Потенциальная энергия	Стационарное уравнение Шредингера для одномерного случая
	$U(x) = \begin{cases} 0 & (-\infty < x < 0, \\ U_0 & (0 < x < \infty) \end{cases}$	$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U_0(x)] \psi = 0$

[ $U_0$  — высота потенциального порога;  $E$  — полная энергия частицы;  $m$  — масса частицы]

## 6.44 Энергия частицы больше высоты порога ( $E > U_0$ )

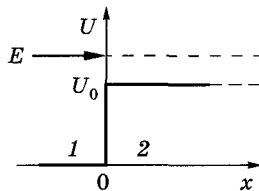
### Уравнение Шредингера

#### Область 1

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi_1 = 0, \quad k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + k_1^2 \psi_1 = 0$$

#### Область 2

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) \psi_2 = 0, \quad k_2 = \sqrt{\frac{2m(E - U_0)}{\hbar^2}}, \quad \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + k_2^2 \psi_2 = 0$$



[ $k_1 = 2\pi/\lambda_1$  и  $k_2 = 2\pi/\lambda_2$  — волновые числа;  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — соответственно длины волн де Бройля в областях 1 и 2.]

### Общие решения уравнений Шредингера

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}, \\ \psi_2(x) &= A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x} \end{aligned}$$

$e^{ikx}$  соответствует плоской волне, распространяющейся в положительном направлении оси  $x$  (падающей волне),  $e^{-ikx}$  — отраженной волне.

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}, \\ \psi_2(x) &= A_2 e^{ik_2 x} \end{aligned}$$

Амплитуда падающей волны принята за единицу ( $A_1 = 1$ ). В области 2 наблюдается только прошедшая волна, поэтому  $B_2 = 0$ .

◆ О волнах может идти речь после умножения на временной множитель, поскольку  $\psi$  — координатная часть волновой функции.

## 6.45 Коэффициенты отражения и прозрачности

### Коэффициент отражения

$$R = \frac{n'_1}{n_1}$$

Равен отношению плотности потока отраженных ( $n'_1$ ) частиц к плотности потока падающих ( $n_1$ ) частиц.

### Коэффициент прозрачности

$$D = \frac{n_2}{n_1}$$

Равен отношению плотности потока прошедших ( $n_2$ ) частиц к плотности потока падающих ( $n_1$ ) частиц.

### Значения $n_1$ ; $n'_1$ ; $n_2$

$$n_1 = \frac{\hbar k_1}{m} |A_1|^2$$

$$n'_1 = \frac{\hbar k_1}{m} |B_1|^2$$

$$n_2 = \frac{\hbar k_2}{m} |A_2|^2$$

## 6.46 Определение $R$ и $D$ для случая $E > U_0$

Решения уравнений Шредингера	Условия непрерывности	Определение коэффициентов $B_1$ и $A_2$
$\begin{aligned} \psi_1(x) &= e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}, \\ \psi_2(x) &= A_2 e^{ik_2 x} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \psi_1(0) &= \psi_2(0), \\ \psi'_1(0) &= \psi'_2(0) \end{aligned}$	$\left. \begin{aligned} 1 + B_1 &= A_2, \\ k_1 - k_1 B_1 &= k_2 A_2 \end{aligned} \right\} B_1 = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad A_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$

## Коэффициент отражения

$$R = \frac{n_1'}{n_1} = |B_1|^2 = \frac{|k_1 - k_2|^2}{|k_1 + k_2|^2}$$

Как  $n$  в оптике,  $R + D = 1$ . Коэффициент  $R$  можно истолковать как вероятность отражения на границе областей, а  $D$  — вероятность преодоления потенциального порога. Тогда можно утверждать, что частица либо отразится, либо пройдет в область 2.

## Коэффициент прозрачности

$$D = \frac{n_2}{n_1} = \frac{k_2}{k_1} |A_2|^2 = \frac{4k_1 k_2}{|k_1 + k_2|^2}$$

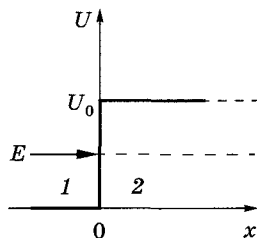
**Вывод.** В случае  $E > U_0$  (низкий потенциальный порог) волна частично отражается (коэффициент  $B_1$  отличен от нуля) и частично проходит в область 2. В области 2 длина волны де Бройля больше, чем в области 1

$$\left( k_2 = \sqrt{\frac{2m(E - U_0)}{\hbar^2}} = \frac{2\pi}{\lambda_2}; k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \frac{2\pi}{\lambda_1} \right).$$

Итак, при  $E > U_0$  волновое число  $k_1 > k_2$  и длина волны  $\lambda_2 > \lambda_1$ .

## 6.47 Энергия частицы меньше высоты порога ( $E < U_0$ )

	Область 1	Область 2
Уравнение Шредингера	$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + k^2 \psi_1 = 0,$ $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$	$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} - \beta^2 \psi_2 = 0,$ $\beta = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}$
Общие решения уравнений Шредингера	$\psi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx},$ $\psi_2(x) = A_2 e^{\beta x} + B_2 e^{-\beta x}$	При $x \rightarrow \infty \psi_2(x) \rightarrow \infty$ . Однако волновая функция по своему физическому смыслу должна оставаться конечной при всех значениях. Следовательно, нужно принять $A_2 = 0$



## 6.48 Определение коэффициента отражения $R$ для случая $E < U_0$

Решение уравнений Шредингера	Условия непрерывности	Определение коэффициентов $A_1$ и $B_1$
$\psi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx},$ $\psi_2(x) = B_2 e^{-\beta x}$	$\psi_1(0) = \psi_2(0),$ $\psi_1'(0) = \psi_2'(0)$	$A_1 + B_1 = B_2, \quad ik(A_1 - B_1) = -\beta B_2,$ $A_1 = \frac{B_2}{2} \left( 1 + \frac{i\beta}{k} \right), \quad B_1 = \frac{B_2}{2} \left( 1 - \frac{i\beta}{k} \right)$

## Коэффициент отражения 6.46

$$R = \frac{n_1'}{n_1} = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} = \frac{|k - i\beta|^2}{|k + i\beta|^2} = 1$$

При  $E < U_0$  коэффициент отражения равен единице, т. е. отражение частиц будет *полным*.



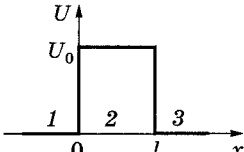
## Вероятность найти частицу на единице длины в области 2

$$|\psi_2|^2 = \psi_2 \dot{\psi}_2^* = \psi_2^2 = B_2^2 e^{-2\beta x} = B_2^2 e^{-(2/\hbar)\sqrt{2m_0(U_0 - E)}x}, \text{ т. е. в случае } E < U_0$$

(высокий прямоугольный потенциальный порог), хотя и наблюдается явление полного отражения, *имеется отличная от нуля вероятность найти частицу в области 2, правда, она экспоненциально убывает с увеличением  $x$ . Микрочастица благодаря своим волновым свойствам может проникать в области, «запрещенные» для классических частиц.*

## 6.2.10. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ БАРЬЕР КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ. ТУННЕЛЬНЫЙ ЭФФЕКТ

### 6.49 Потенциальный барьер конечной ширины

Потенциальный барьер конечной ширины	Потенциальная энергия	Стационарное уравнение Шредингера для одномерного случая
	$U(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ U_0 & (0 \leq x \leq l), \\ 0 & (x > l) \end{cases}$	$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U_0(x)] \psi = 0$

[ $U_0$  — высота потенциального барьера;  $E$  — полная энергия частицы;  $m$  — масса частицы]

### 6.50 Энергия частицы больше высоты потенциального барьера

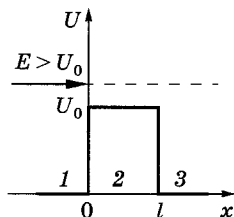
#### Уравнение Шредингера

##### Области 1 и 3

$$\frac{\partial^2 \psi_{1,3}}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi_{1,3} = 0, \quad k_{1,3} = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \frac{2\pi}{\lambda_{1,3}}, \quad \frac{\partial^2 \psi_{1,3}}{\partial x^2} + k_{1,3}^2 \psi_{1,3} = 0$$

##### Область 2

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) \psi_2 = 0, \quad k_2 = \sqrt{\frac{2m(E - U_0)}{\hbar^2}} = \frac{2\pi}{\lambda_2}, \quad \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + k_2^2 \psi_2 = 0$$



[ $k_{1,3} = 2\pi/\lambda_{1,3}$  и  $k_2 = 2\pi/\lambda_2$  — волновые числа;  $\lambda_{1,3}$  и  $\lambda_2$  — соответственно длины волн де Бройля в областях 1, 3 и 2]

#### Общие решения уравнений Шредингера

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= A_1 e^{ik_{1,3}x} + B_1 e^{-ik_{1,3}x}, \\ \psi_2(x) &= A_2 e^{ik_2x} + B_2 e^{-ik_2x}, \\ \psi_3(x) &= A_3 e^{ik_{1,3}x} \end{aligned}$$

В области 3 имеется только прошедшая барьер волна, поэтому коэффициент  $B_3$  принят равным нулю.

◆  $e^{ikx}$  соответствует плоской волне, распространяющейся в положительном направлении оси  $x$  (падающей волне),  $e^{-ikx}$  — отраженной волне. О волнах может идти речь после умножения на временной множитель, так как  $\psi$  — координатная часть волновой функции.

## 6.51 Возможное определение коэффициентов отражения и прозрачности

Решения уравнений Шредингера	Условия непрерывности	Определение $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2$ , а также $R$ и $D$
$\psi_1(x) = A_1 e^{ik_{1,3}x} + B_1 e^{-ik_{1,3}x},$ $\psi_2(x) = A_2 e^{ik_2x} + B_2 e^{-ik_2x},$ $\psi_3(x) = A_3 e^{ik_{1,3}x}$	$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1(0) = \psi_2(0), \\ \psi_1'(0) = \psi_2'(0), \\ \psi_2(l) = \psi_3(l), \\ \psi_2'(l) = \psi_3'(l) \end{array} \right.$	Из условий непрерывности можно найти связь между коэффициентами, откуда в принципе легко вычисляются коэффициенты отражения $R$ и прозрачности $D$ <b>6.46</b>

**Вывод.** В случае  $E > U_0$  волна на границе 1 и 2 частично отражается ( $B_1 \neq 0$ ) и частично проходит в область 2, затем она опять на границе 2 и 3 частично отражается ( $B_2 \neq 0$ ) и частично проходит в область 3. В области 2 (см. рисунок **6.50**) длина волны де Бройля больше, чем в областях 1 и 3

$$\left( k_2 = \sqrt{\frac{2m(E - U_0)}{\hbar^2}} = 2\pi/\lambda_2; \quad k_{1,3} = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \right).$$

Итак, при  $E > U_0$  имеем  $k_{1,3} > k_2$  и  $\lambda_2 > \lambda_{1,3}$ .

## 6.52 Энергия частицы меньше высоты потенциального барьера ( $E < U_0$ )

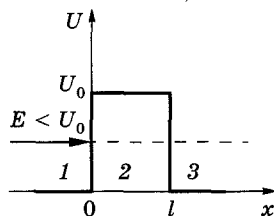
### Уравнение Шредингера

#### Области 1 и 3

$$\frac{\partial^2 \psi_{1,3}}{\partial x^2} + k^2 \psi_{1,3} = 0, \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

#### Область 2

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} - \beta^2 \psi_2 = 0, \quad \beta = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}$$



### Общие решения уравнений Шредингера

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx},$$

$$\psi_2(x) = A_2 e^{\beta x} + B_2 e^{-\beta x},$$

$$\psi_3(x) = A_3 e^{ikx}$$

В области 2 решение  $\psi_2(x)$  не соответствует плоским волнам, распространяющимся в обе стороны (показатели экспонент не мнимые, а действительные).

◆ В области 3 имеется только волна, прошедшая сквозь барьер и распространяющаяся слева направо, поэтому принято  $B_3 = 0$ . Из условий непрерывности волновой функции и ее первой производной в точках  $x = 0$  и  $x = l$  можно найти коэффициенты  $A_2$  и  $B_2$ . Можно показать, что для высокого и широкого барьера ( $\beta l \gg 1$ )  $B_2 \gg A_2$ , а тогда на границе потенциального барьера, где  $x = 0$ , определяющим членом волновой функции  $\psi_2$  является член, содержащий  $B_2 e^{-\beta x}$ .

**Вывод.** В случае  $E < U_0$ , согласно квантовой механике, микрочастица может «пройти» сквозь потенциальный барьер. Это специфическое квантовое явление получило название туннельного эффекта.

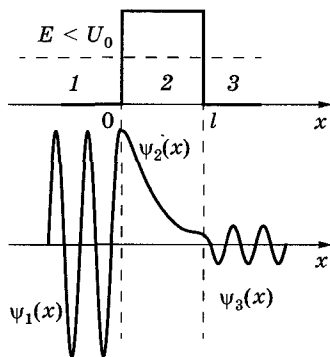
## 6.53 Туннельный эффект

Волновые функции в областях 1, 2 и 3

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= A_1 e^{ikhx} + B_1 e^{-ikhx}, \\ \psi_2(x) &= A_2 e^{-\beta x}, \\ \psi_3(x) &= A_3 e^{ikhx}\end{aligned}$$

6.52

**Выводы.** Волновая функция не равна нулю и внутри барьера, а в области 3, если барьер не очень широк, будет опять иметь вид волн де Бройля с тем же импульсом, т. е. с той же частотой, но с меньшей амплитудой. Следовательно, частица имеет отличную от нуля вероятность прохождения сквозь потенциальный барьер конечной ширины — наблюдается *туннельный эффект*.



## 6.54 Коэффициент прозрачности для прямоугольного барьера

Коэффициент прозрачности (вероятность проникновения сквозь потенциальный барьер конечной ширины)

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)} l\right)$$

$D$  быстро убывает с увеличением ширины барьера, а также с ростом его высоты.

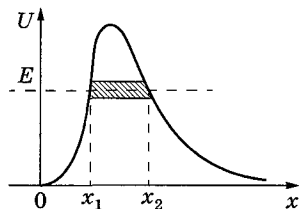
[ $U_0$  — высота потенциального барьера;  $E$  — энергия частицы;  $l$  — ширина прямоугольного барьера;  $m$  — масса частицы;  $\hbar = h/2\pi$  — постоянная Планка;  $D_0$  — постоянный множитель, который, как показывают точные расчеты, не очень отличается от единицы]

## 6.55 Коэффициент прозрачности для барьера произвольной формы

$$D = D_0 \exp\left\{-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U - E)} dx\right\}$$

Эта формула — хорошее приближение в случае потенциального барьера произвольной формы, если барьер удовлетворяет условию квазиклассического приближения (достаточно гладкая форма кривой).

◆ Эта формула — обобщение формулы для  $D$  в случае прямоугольного барьера.



## 6.56 Выводы относительно поведения классической и квантовой частиц

При  $E < U_0$  по классической теории частицы не смогут преодолеть потенциального барьера и отразятся от него; согласно квантовой теории, часть частиц отражается, а часть имеет отличную от нуля вероятность пройти сквозь потенциальный барьер. При  $E > U_0$ , по классической теории все частицы преодолевают потенциальный барьер; согласно квантовой теории, часть частиц проходит, а часть отражается. Как *подбарьерное прохождение*, так и *надбарьерное отражение* являются специфическими квантовыми эффектами, связанными с волновыми свойствами частиц.

## 6.2.11. ЛИНЕЙНЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

### Линейный (одномерный) гармонический осциллятор

Система, совершающая одномерное движение под действием квазиупругой силы. Задача о гармоническом осцилляторе в *квантовой теории* играет фундаментальную роль по двум причинам: 1) она встречается во всех задачах, где имеют место квантованные колебания (например, в квантовой теории поля, в теории молекулярных и кристаллических колебаний и т. д.); 2) проблемы, относящиеся к гармоническому осциллятору, — хорошая иллюстрация основных принципов и формализма квантовой механики.

### 6.57 Описание гармонического осциллятора в квантовой механике

#### Потенциальная энергия линейного гармонического осциллятора

$$U = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}$$
 Потенциальная яма в данном случае является параболической.

#### Оператор Гамильтона для осциллятора

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 \hat{x}^2}{2} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \quad \text{6.37}$$

#### Стационарное уравнение Шредингера в операторной форме

$$\hat{H}\psi = E\psi$$
 Это уравнение по внешнему виду совпадает с записанным выше уравнением 6.38, однако здесь другой оператор.

#### Уравнение Шредингера для гармонического осциллятора

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right) \psi = 0$$
 Это же уравнение получается при подстановке  $U$  в стационарное уравнение Шредингера 6.25.

[ $m$  — масса частицы;  $\omega_0$  — собственная частота колебаний осциллятора;  $x$  — отклонение из положения равновесия;  $\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  — оператор кинетической энергии;  $\hat{U} = U = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}$  — оператор потенциальной энергии;  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  — постоянная Планка;  $E$  — полная энергия осциллятора;  $\psi$  — координатная часть волновой функции]

### 6.58 Следствия уравнения Шредингера для квантового осциллятора

#### Собственные значения энергии

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Уравнение Шредингера имеет однозначные, конечные и непрерывные решения только при таких  $E_n$ , т. е. энергия квантового осциллятора может иметь лишь дискретные решения (квантуется).

[ $\omega_0$  — собственная частота колебаний осциллятора;  $\hbar = h/(2\pi)$  — постоянная Планка;  $E_n$  — собственные значения энергии;  $E_0$  — энергия нулевых колебаний]

#### Расстояние между соседними уровнями

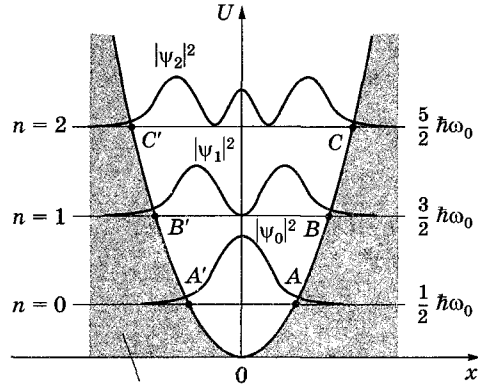
$$\hbar\omega_0$$
 Уровни энергии линейного гармонического осциллятора расположены на одинаковых расстояниях друг от друга (на рисунке 6.59 они изображены горизонтальными прямыми)

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0$$

Ее существование типично для квантовых систем; следствие соотношения неопределенностей: частица не может находиться на дне потенциальной ямы независимо от ее формы. Если бы это было возможно, то импульс, а также его неопределенность, обращались бы в нуль. Тогда неопределенность координаты  $\Delta x \rightarrow \infty$ , что противоречит пребыванию частицы в потенциальной яме.

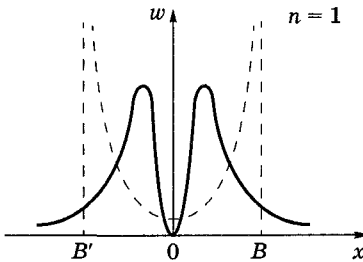
### 6.59 Плотности вероятности обнаружения частицы

Представлены кривые распределения плотности вероятности  $|\psi_n(x)|^2$  для различных состояний квантового осциллятора (для  $n = 0, 1$  и  $2$ ). В точках  $A$  и  $A'$ ,  $B$  и  $B'$ ,  $C$  и  $C'$  потенциальная энергия равна полной энергии ( $U = E$ ), причем, как известно, классический осциллятор не может выйти за пределы этих точек. Для квантового осциллятора  $|\psi_n(x)|^2$  и за пределами этих точек имеет конечные значения. Последнее означает, что имеется конечная, хотя и небольшая, вероятность обнаружить частицу за пределами потенциальной ямы. Этот результат не противоречит выводам квантовой механики, так как равенство  $T = E - U$  в квантовой механике не имеет силы, поскольку кинетическая ( $T$ ) и потенциальная ( $U$ ) энергии не являются одновременно измеримыми величинами.

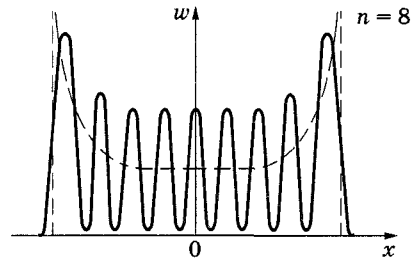


Область, запрещенная классической механикой

### 6.60 Плотности вероятности для квантового и классического осцилляторов



На рисунке — кривая распределения плотности вероятности для квантового (сплошная кривая) и классического (пунктир) осциллятора. Поведение квантового осциллятора значительно отличается от классического



При больших значениях  $n$  квантовое распределение плотности вероятности (сплошная кривая) принимает все большее сходство с классическим распределением плотности вероятности (пунктир). В этом проявляется принцип соответствия Бора

### Принцип соответствия Бора

Выводы и законы квантовой механики при больших значениях квантовых чисел должны соответствовать выводам и законам классической физики.

## 6.3. Элементы современной физики атомов и молекул

### 6.3.1. АТОМ ВОДОРОДА В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

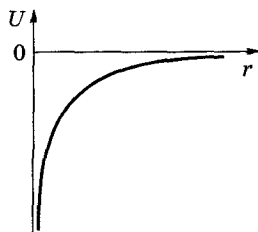
В квантовой механике задача об атоме водорода (помимо его простой структуры) является одной из основных еще и потому, что задача о движении электрона в поле центральных сил может быть распространена (естественно, с разной степенью приближения) на *водородоподобные системы* — системы, состоящие из ядра с зарядом  $Ze$  и одного электрона (например, ионы  $\text{He}^+$ ,  $\text{Li}^{2+}$ ).

#### 6.61 Состояние электрона в атоме водорода

Потенциальная энергия взаимодействия электрона с ядром, обладающим зарядом  $Ze$

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Для атома водорода  $Z = 1$ .



Стационарное уравнение Шредингера для электрона в атоме водорода

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0$$

Это уравнение получается при подстановке и в стационарное уравнение Шредингера 6.25.

[Функция  $U(r)$  представлена на рисунке;  $Z$  — порядковый номер элемента в таблице Менделеева,  $e$  — элементарный заряд;  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная;  $r$  — расстояние между электроном и ядром;  $m$  — масса электрона;  $E$  — полная энергия электрона в атоме;  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа;  $\psi$  — координатная часть волновой функции]

#### 6.62 Энергия электрона в атоме водорода

Собственные значения энергии

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{me^4}{8h^2\epsilon_0^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Решения уравнения Шредингера непрерывны, однозначны и конечны в случаях:

- ◆ при любых положительных значениях энергии (соответствует *свободному электрону* — заштрихованная область на рисунке);
- ◆ при дискретных отрицательных значениях энергии (соответствует получаемым из уравнения Шредингера собственным значениям энергии).

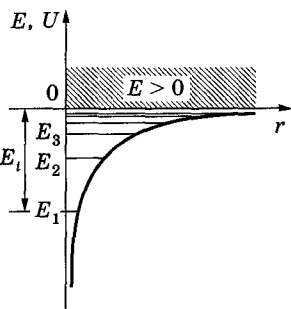
Собственные значения энергии в точности совпадают с уровнями энергии в модели атома Бора 6.6.

Возможные значения энергии

Дискретные значения энергии  $E_1, E_2, E_3, \dots$  (на рисунке показаны в виде горизонтальных прямых).

Основной энергетический уровень

Самый нижний уровень  $E_1$ , отвечающий минимальной возможной энергии.



## Возбужденные энергетические уровни

Энергетические уровни  $E_n > E_1 (n = 2, 3, \dots)$ .

## Связанное движение электрона

Движение при  $E < 0$  — электрон находится внутри гиперболической потенциальной ямы. По мере роста  $n$  энергетические уровни располагаются теснее и при  $n = \infty$   $E_\infty = 0$ .

## Энергия ионизации атома водорода

Энергия, необходимая для отрыва электрона, находящегося в основном состоянии, от атома.  $E_i = -E_1 = \frac{me^4}{8h^2 \epsilon_0^2} = 13,6$  эВ.

## 6.63 Квантовые числа

Уравнению Шредингера удовлетворяют собственные функции  $\Psi_{nlm_l}(r, \vartheta, \varphi)$ , определяемые тремя квантовыми числами: главным  $n$ , орбитальным  $l$  и магнитным  $m_l$ .

## 6.64 Главное квантовое число $n$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Совпадает с номером энергетического уровня, определяя энергию электрона в атоме,  $E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{me^4}{8h^2 \epsilon_0^2}$  6.62 и может принимать только целые положительные значения.

## 6.65 Орбитальное квантовое число $l$

$$l = 0, 1, 2, \dots, (n - 1)$$

Определяет, согласно решению уравнения Шредингера, модуль момента импульса электрона (механический орбитальный момент)

$$L_l = \hbar \sqrt{l(l + 1)},$$

который может принимать лишь дискретные значения, т. е. квантуется, орбитальное квантовое число  $l$  принимает всего  $n$  значений.

## 6.66 Магнитное квантовое число $m_l$

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

Определяет, согласно решению уравнения Шредингера, проекцию момента импульса электрона на направление  $z$  внешнего магнитного поля

$$L_{lz} = \hbar m_l,$$

причем вектор момента импульса электрона в атоме может иметь в пространстве  $2l + 1$  ориентаций ( $m_l$  принимает всего  $2l + 1$  значений).

## 6.67 Кратность вырождения

Энергия электрона зависит только от главного квантового числа  $n$ , но каждому собственному значению  $E_n$  (кроме  $E_1$ ) соответствует несколько собственных функций  $\Psi_{nlm_l}$ , отличающихся значениями  $l$  и  $m_l$ . Поэтому атом водорода может иметь одно и то же значение энергии, находясь в различных состояниях.

## Кратность вырождения

Число состояний с одинаковой энергией:

$$\sum_{l=1}^{n-1} (2l+1) = n^2,$$

т. е. кратность вырождения энергетических уровней атома водорода равна  $n^2$  (см. таблицу).

Уровень $E_n$	Пси-функция $\Psi_{nlm_l}$	Значение			Уровень $E_n$	Пси-функция $\Psi_{nlm_l}$	Значение		
		$n$	$l$	$m_l$			$n$	$l$	$m_l$
$E_1$	$\Psi_{100}$	1	0	0	$E_3$	$\Psi_{300}$	3	0	0
$E_2$	$\Psi_{200}$ $\Psi_{21-1}$ $\Psi_{210}$ $\Psi_{21+1}$	2	0	0		$\Psi_{31-1}$	3	1	-1
						$\Psi_{310}$	3	1	0
						$\Psi_{31+1}$	3	1	+1
						$\Psi_{32-2}$	3	2	-2
						$\Psi_{32-1}$	3	2	-1
						$\Psi_{320}$	3	2	0
						$\Psi_{32+1}$	3	2	+1
					$\Psi_{32+2}$	3	2	+2	

[ $n$  — главное квантовое число;  $l = 0, 1, \dots, n-1$  — орбитальное квантовое число;  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$  — магнитное квантовое число, принимающее всего  $2l+1$  значений]

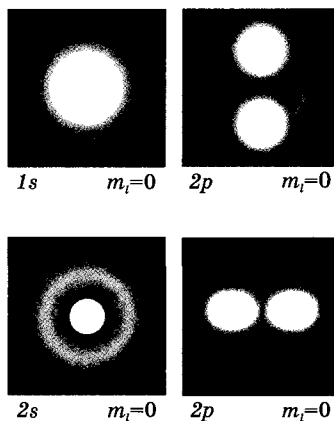
## 6.68 Описание состояния электрона

Значение $l$	Состояние	Электрон в данном состоянии	Примеры записи состояний	
			Электрон в состоянии с $n=2$ и $l=0$	Электрон в состоянии с $n=2$ и $l=1$
$l=0$	$s$ -состояние	$s$ -электрон	Электрон в состоянии с $n=2$ и $l=0$	Электрон в состоянии с $n=2$ и $l=1$
$l=1$	$p$ -состояние	$p$ -электрон		
$l=2$	$d$ -состояние	$d$ -электрон		
$l=3$	$f$ -состояние	$f$ -электрон	2s	2p
$l=4$	$g$ -состояние	$g$ -электрон		

## 6.69 Электронное облако и его описание

Квантовая механика отказывается от классического представления об электронных орбитах (при движении электрона в атоме существенны волновые свойства). Каждому энергетическому состоянию соответствует волновая функция, квадрат модуля которой определяет плотность вероятности обнаружения электрона в окрестности данной точки пространства.

Вероятность обнаружения электрона в различных частях атома различна. Электрон при своем движении как бы «размазан» по всему объему, образуя *электронное облако*, плотность (густота) которого характеризует вероятность нахождения





электрона в различных точках объема атома. Квантовые числа  $n$  и  $l$  характеризуют размер и форму электронного облака, а квантовое число  $m_l$  характеризует ориентацию электронного облака в пространстве.

◆ На рисунке для примера приведено распределение электронной плотности (формы электронного облака) для состояний атома водорода при  $n = 1$  и  $n = 2$ , определяемое  $|\psi_{nlm_l}|^2$ . Как видно из рисунка, оно зависит от  $n$ ,  $l$  и  $m_l$ . Так, при  $l = 0$  электронная плотность отлична от нуля в центре и не зависит от направления (сферически-симметрична), а для остальных состояний в центре равна нулю и зависит от направления.

## 6.70 Правила отбора

### Правила отбора

Правила, ограничивающие число возможных переходов электронов в атоме, связанных с испусканием и поглощением света.

по орбитальному квантовому числу

$$\Delta l = \pm 1$$

Возможны лишь те переходы, при которых орбитальное квантовое число меняется на единицу.

по магнитному квантовому числу

$$\Delta m_l = 0, \pm 1$$

Возможны лишь те переходы, при которых выполняется записанное условие.

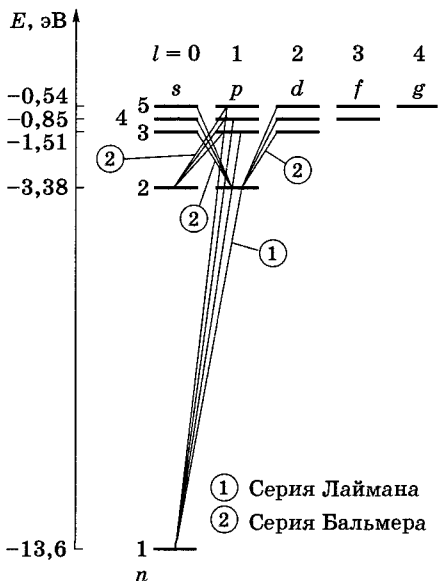
## 6.71 Энергетический спектр атома водорода

Возможна детализация спектра атома водорода по сравнению с теорией Бора 6.68, если учесть число возможных состояний 6.67, соответствующих данному  $n$ , и правило отбора для орбитального квантового числа 6.70.

Спектр излучения  
(спектральные линии)

Серия	Соответствующие переходы
Лаймана	$np \rightarrow 1s$ ( $n = 2, 3, \dots$ )
Бальмера	$np \rightarrow 2s$ , $ns \rightarrow 2p$ , $nd \rightarrow 2p$ ( $n = 3, 4, \dots$ )
и т. д.	

◆ Поглощающий атом при нормальных условиях находится в основном состоянии, поэтому спектр поглощения состоит из линий, соответствующих переходам  $1s \rightarrow np$  ( $n = 2, 3, \dots$ ).



### 6.3.2. 1s-СОСТОЯНИЕ ЭЛЕКТРОНА В АТОМЕ ВОДОРОДА

#### 6.72 Уравнение Шредингера для 1s-состояния электрона

Стационарное уравнение Шредингера для электрона в атоме водорода 6.61

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0$$

Кулоновское поле ядра, в котором движется электрон, центрально-симметрично, поэтому записанное уравнение целесообразно решать в сферических координатах  $r$ ,  $\vartheta$  и  $\varphi$ , считая, что  $\psi = \psi(r, \vartheta, \varphi)$ .

Стационарное уравнение Шредингера для 1s-состояния электрона в атоме водорода

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0$$

1s- состояние — сферически-симметрично, т. е. не зависит от углов  $\vartheta$  и  $\varphi$ . Волновая функция определяется только расстоянием  $r$  электрона от ядра:  $\psi = \psi_{100}(r)$ , где цифры 100 указывают что  $n = 1$ ,  $l = 0$  и  $m_l = 0$ .

#### 6.73 Решение уравнения Шредингера для 1s-состояния электрона

Волновая функция для 1s-состояния

$$\psi = C e^{-r/a}$$

[ $r$  — расстояние электрона от ядра;  $C$  — постоянная, определяемая из условия нормировки;  $a$  — постоянная, имеющая размерность длины]

Уравнение, получаемое после подстановки  $\psi$  и ее производных в уравнение Шредингера

$$\left( \frac{1}{a^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \right) + \frac{2}{r} \left( \frac{me^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} - \frac{1}{a} \right) = 0$$

Это уравнение должно тождественно удовлетворяться для любых  $r$ , поэтому

$$\frac{1}{a^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} = 0, \quad \frac{me^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} - \frac{1}{a} = 0.$$

Получаемые из уравнения значения для  $a$  и  $E$

$$a = \frac{\hbar^2 \cdot 4\pi\epsilon_0}{me^2}, \quad E = -\frac{me^4}{8\hbar^2 \epsilon_0^2}$$

Выражение для  $a$  совпадает с первым боровским радиусом для атома водорода 6.5, выражение для  $E$  — со значением энергии основного состояния ( $n = 1$ ) атома водорода 6.7.

Нормировочный коэффициент

$$C = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}$$

Получается после интегрирования из условия нормировки

$$1 = \int_0^\infty |\psi|^2 dV = \int_0^\infty C^2 e^{-2r/a} 4\pi r^2 dr.$$

Решение уравнения Шредингера

$$\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$$

Это — нормированная волновая функция, отвечающая 1s-состоянию электрона в атоме водорода.

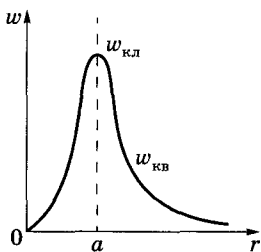
◆ Благодаря сферической симметрии  $\psi$ -функции вероятность обнаружения электрона на расстоянии  $r$  одинакова по всем направлениям. Поэтому элемент объема  $dV$ , отвечающий одинаковой плотности вероятности, можно представить в виде объема сферического слоя радиусом  $r$  и толщиной  $dr$ :  $dV = 4\pi r^2 dr$ .

## 6.74 Наиболее вероятное расстояние электрона от ядра

Вероятность нахождения электрона в элементе $dV$	$dW =  \psi(r) ^2 dV =  \psi ^2 4\pi r^2 dr$	$dV = 4\pi r^2 dr$ <b>6.75</b>
	$dW = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-2r/a} 4\pi r^2 dr$	Подставили $\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$
Плотность вероятности	$w(r) = \frac{dW}{dr} = \frac{4r^2}{a^3} e^{-2r/a}$	
Условие для нахождения наиболее вероятного расстояния электрона от ядра	$\frac{dw}{dr} = 0, \quad \frac{d}{dr} \left( \frac{4r^2}{a^3} e^{-2r/a} \right) = 0$	$\frac{8r}{a^3} \left( 1 - \frac{r}{a} \right) e^{-2r/a} = 0$
Наиболее вероятное расстояние электрона от ядра	$r_n = a$	Это расстояние равно первому боровскому радиусу

## 6.75 Квантово-механический смысл боровского радиуса

На рисунке представлена плотность вероятности обнаружения электрона в 1s-состоянии, согласно квантовой **6.74** (сплошная кривая) и теории Бора (пунктир). Согласно теории Бора, плотность вероятности обнаружить электрон в 1s-состоянии отлична от нуля только для  $r = a$ . Согласно квантовой механике, плотность вероятности лишь при  $r = a$  достигает максимума, оставаясь отличной от нуля во всем пространстве.



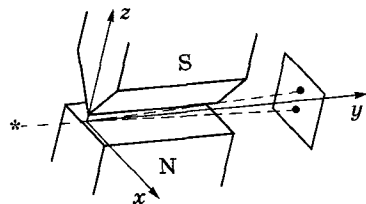
**Вывод.** В основном состоянии атома водорода наиболее вероятным расстоянием электрона до ядра является расстояние, равное боровскому радиусу. В этом заключается квантово-механический смысл боровского радиуса.

## 6.3.3. СПИН ЭЛЕКТРОНА. СПИНОВОЕ КВАНТОВОЕ ЧИСЛО

### 6.76 Опыты Штерна и Герлаха

#### Описание опыта и полученный результат

В вакууме с помощью полюсных наконечников S и N специальной формы создавалось магнитное поле, сильно неоднородное вблизи полюса S. Узкий пучок атомов водорода, заведомо находящихся в s-состоянии, пропускаться вдоль оси  $y$ . Вдоль оси  $z$  происходило расщепление пучка, но всегда наблюдалось только два пучка, одинаково отклоненных в противоположные стороны и расположенных симметрично относительно пучка в отсутствие магнитного поля.



#### «Невероятность» полученного результата

Атомы водорода находятся в s-состоянии (орбитальное квантовое число  $l = 0$ ). Момент импульса электрона  $L_l = \hbar \sqrt{l(l+1)} = 0$ . Магнитный момент атома  $\vec{p}_m = g\vec{L}_l = 0$ , и магнитное поле не должно оказывать влияния на движение атомов, находящихся в основном состоянии, т. е. расщепле-

ния быть не должно. В дальнейшем при использовании спектральных приборов с высокой разрешающей способностью было доказано, что спектральные линии атома водорода являются дублетами даже в отсутствие магнитного поля.

[ $g$  — гиромагнитное отношение орбитальных моментов]

## 6.77 Спин и собственный магнитный момент электрона

*Собственный механический момент импульса (спин)  $L_s$  электрона (и других микрочастиц) введен для объяснения опытов Штерна и Герлаха — тонкой структуры спектральных линий. Спин — квантовая величина, у нее нет классического аналога; это внутреннее неотъемлемое свойство электрона, подобно его заряду и массе. Существование спина, а также его свойства — прямое следствие уравнения Дирака (аналог уравнения Шредингера в релятивистской квантовой механике).*

### Квантование спина

$$L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)}$$

Квантование — согласно общим выводам квантовой механики.

Сравни с формулой  $L_l = \hbar \sqrt{l(l+1)}$  6.65.

### Квантование проекции спина на направление внешнего магнитного поля

$$L_{sz} = \hbar m_s$$

Вектор  $\vec{L}_s$  может принимать  $2s + 1$  ориентаций. Поскольку расщепление происходит на два подуровня,  $2s + 1 = 2$ , откуда *спиновое квантовое число*  $s = 1/2$ .

### Магнитное спиновое квантовое число

$$m_s = \pm s = \pm \frac{1}{2}$$

Проекция вектора не может быть больше модуля вектора, поэтому  $|m_s| \leq |s|$  и  $m_s = \pm 1/2$ .

### Собственный (спиновый) магнитный момент

$$\vec{p}_{ms} = g \vec{L}_s$$

$\vec{p}_{ms}$  пропорционален  $\vec{L}_s$  и направлен в противоположную сторону.

### Гиромагнитное отношение для спиновых моментов

$$g = \frac{p_{ms}}{L_s} = -\frac{e}{m}$$

Отношение для спиновых моментов в два раза больше, чем для орбитальных моментов 3.128.

[ $\hbar = h/(2\pi)$  — постоянная Планка;  $s$  — спиновое квантовое число;  $L_s$  — спин электрона;  $L_{sz}$  — проекция спина на направление внешнего магнитного поля;  $m_s$  — магнитное спиновое квантовое число;  $p_{ms}$  — собственный магнитный момент электрона;  $g$  — гиромагнитное отношение для спиновых моментов;  $e$  — заряд электрона;  $m$  — масса электрона]

## 6.3.4. АТОМ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

### 6.78 Эффект Зеемана

#### Эффект Зеемана

Расщепление в магнитном поле энергетических уровней атомов, приводящее к расщеплению спектральных линий в спектрах.

#### Нормальный эффект

Каждая линия расщепляется на три компонента (при наблюдении перпендикулярно магнитному полю).

## Аномальный эффект

Каждая линия расщепляется на большее, чем три, число компонентов.

Эффект Зеемана характерен для атомов парамагнетиков [3.129], так как только эти атомы обладают отличным от нуля магнитным моментом и могут взаимодействовать с внешним магнитным полем.

### 6.79 Общие закономерности эффекта Зеемана на примере атома водорода

Дополнительная энергия атома во внешнем однородном магнитном поле

$$U_B = -\vec{p}_m \vec{B} = -p_{mB} B,$$

$$U_B = \frac{e\hbar}{2m} m_l B = \mu_B m_l B$$

Обусловлена взаимодействием магнитного момента  $\vec{p}_m$  с внешним магнитным полем.

Полная энергия атома водорода в магнитном поле

$$E_{n, l, m_l} = -\frac{1}{n^2} \frac{m e^4}{8 h^2 \epsilon_0^2} + \mu_B m_l B$$

Первый член — энергия кулоновского взаимодействия между электроном и протоном [6.62], второй — энергия взаимодействия между магнитным моментом и внешним магнитным полем.

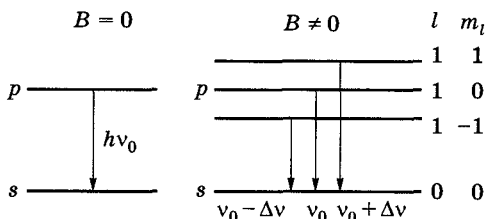
[ $\vec{B}$  — индукция магнитного поля;  $p_{mB}$  — проекция магнитного момента электрона на направление поля;  $p_{mB} = -\frac{e\hbar}{2m} m_l$  [3.128]; магнитное квантовое число  $m_l = 0, \pm 1, \dots, \pm l$ ;  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$  — магнетон Бора [3.129].

### 6.80 Переходы между состояниями, приводящие к нормальному эффекту Зеемана

◆ Формула для полной энергии атома водорода в магнитном поле [6.79] позволяет объяснить расщепление энергетических уровней. Если  $B = 0$ , энергетический уровень определяется только первым членом, если  $B \neq 0$ , то необходимо учитывать возможные значения  $m_l$ , а оно может принимать  $2l + 1$  значений. Это же означает расщепление первоначального энергетического уровня на  $2l + 1$  подуровней.

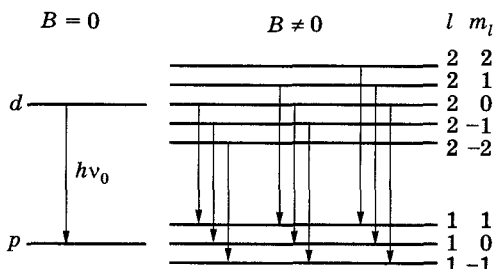
Возможные переходы между состояниями  $p$  ( $l = 1$ ) и  $s$  ( $l = 0$ )

В магнитном поле  $p$ -состояние расщепляется на три подуровня (при  $l = 1$   $m_l = 0, \pm 1$ ), с каждого из которых могут происходить переходы на уровень  $s$ , и каждый переход характеризуется своей частотой. В спектре появляется триплет (наблюдается нормальный эффект Зеемана).



Возможные переходы между состояниями  $d$  ( $l = 2$ ) и  $p$  ( $l = 1$ )

В магнитном поле  $d$ -состояние расщепляется на пять подуровней,  $p$ -состояние — на три. Поскольку  $\Delta l = \pm 1$  и  $\Delta m_l = 0, \pm 1$ , возможны только переходы, указанные на рисунке. В спектре появляется триплет (наблюдается нормальный эффект Зеемана).



### 6.3.5. СИСТЕМЫ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ

#### 6.81 Принцип неразличимости тождественных частиц

	Определение	Пояснение
Тождественные частицы	Совокупность одинаковых частиц (например, электронов), имеющих одинаковые физические свойства — массу, заряд, спин и другие характеристики, например квантовые числа	В квантовой механике состояние микрочастицы описывается волновой функцией, которой приписывается <b>6.22</b> вероятностное толкование. Тождественные частицы полностью теряют свою «индивидуальность» и становятся неразличимыми
Принцип неразличимости тождественных частиц	Экспериментально различить тождественные частицы невозможно	Этот принцип — <i>фундаментальный принцип</i> квантовой механики

#### 6.82 Свойства волновых функций, описывающих тождественные частицы

	Определение	Пояснение
Свойство симметрии волновой функции	$\psi(x_1, x_2) = \pm \psi(x_2, x_1)$ (при перестановке частиц волновая функция системы либо остается неизменной, либо меняет свой знак)	Волновая функция описывает <i>всю систему частиц</i> . В качестве примера рассмотрена система из двух тождественных частиц, описываемая волновой функцией $\psi(x_1, x_2)$
Симметричная волновая функция	Волновая функция системы тождественных частиц, не меняющая знака при перестановке любой пары частиц	Симметрия волновой функции системы тождественных частиц сохраняется во времени. Тип симметрии волновых функций определяется не только природой частиц, но и их спином
Антисимметричная волновая функция	Волновая функция системы тождественных частиц, изменяющая знак при перестановке любой пары частиц	

[ $x_1$  и  $x_2$  — соответственно совокупность пространственных и спиновых координат первой и второй частиц]

#### 6.83 Бозоны и фермионы

Класс частиц	Определение	Дополнение
Бозоны	Частицы, описываемые <i>симметричными</i> волновыми функциями	Симметричными волновыми функциями описываются системы тождественных частиц с <i>нулевыми и целыми спинами</i> (например, $\pi$ -мезоны, фотоны)
Фермионы	Частицы, описываемые <i>антисимметричными</i> волновыми функциями	Антисимметричными волновыми функциями описываются системы тождественных частиц с <i>полуцелыми спинами</i> (например, электроны, протоны)

◆ Сложные частицы, составленные из нечетного числа фермионов, являются фермионами, а из четного — бозонами.

### 6.3.6. ПРИНЦИП ПАУЛИ

#### 6.84 Квантовые числа

##### Описание состояния электрона

Состояние электрона в атоме однозначно описывается любым набором четырех независимых квантовых чисел.

Квантовое число	Принимаемые значения
Главное	$n = 1, 2, 3, \dots$
Орбитальное	$l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$
Магнитное	$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$
Магнитное спиновое	$m_s = \pm \frac{1}{2}$

#### 6.85 Формулировки принципа Паули

	Формулировка, запись	Пояснение
Принцип Паули в простейшей формулировке	В одном и том же атоме не может быть более одного электрона с одинаковым набором четырех квантовых чисел $n, l, m_l$ и $m_s$ , т. е. $Z(n, l, m_l, m_s) = 0$ или 1	Согласно принципу Паули, два электрона в одном и том же атоме различаются значениями по крайней мере одного квантового числа
Квантово-механическая формулировка принципа Паули	Системы фермионов встречаются в природе в состояниях, описываемых антисимметричными волновыми функциями	Если тождественные частицы имеют одинаковые квантовые числа, то их волновая функция симметрична относительно перестановки частиц. Для фермионов (например, электронов) волновая функция должна быть антисимметрична, поэтому два одинаковых фермиона, входящих в одну и ту же систему, не могут находиться в одинаковых состояниях

$[Z(n, l, m_l, m_s)]$  — число электронов, находящихся в квантовом состоянии, описываемом набором четырех квантовых чисел:  $n, l, m_l, m_s]$

#### 6.86 Распределение электронов по оболочкам и подоболочкам

Максимальное число электронов в состоянии, определяемом главным квантовым числом  $n$

$Z(n) = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2$	$[l = 0, 1, \dots, n - 1 \text{ (всего } n \text{ значений); } m_l = 0, \pm 1, \dots, \pm l \text{ (всего } 2l + 1 \text{ значений); } m_s = \pm \frac{1}{2} \text{ (всего два значения)}]$
--	---

##### Электронная оболочка

Совокупность электронов в многоэлектронном атоме, имеющих одно и то же главное квантовое число  $n$ .

##### Подоболочка

Совокупность электронов в каждой из оболочек, соответствующих данному значению  $l$ .

Число подоболочек равно порядковому номеру  $n$  оболочки ( $l = 0, 1, \dots, n - 1$ ; всего  $n$  значений). Число электронов в подоболочке определяется  $m_l$  и  $m_s$ : максимальное число электронов в подоболочке с данным  $l$  равно  $2(2l + 1)$ .

$n$	Символ оболочки	Число электронов в подоболочке					Максимальное число электронов в оболочке
		$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$	
		$s$	$p$	$d$	$f$	$g$	
1	$K$	2					2
2	$L$	2	6				8
3	$M$	2	6	10			18
4	$N$	2	6	10	14		32
5	$O$	2	6	10	14	18	50

## 6.87 Периодическая система элементов Менделеева

◆ Периодическая система элементов объясняется на основе принципа Паули, который и лежит в основе систематики заполнения электронных состояний в атомах. Поскольку порядковый номер  $Z$  химического элемента равен общему числу электронов в атоме данного элемента, каждый последующий элемент можно «образовать» из предыдущего прибавлением к ядру одного протона (соответственно прибавлением одного электрона в электронной оболочке атома). С возрастанием числа электронов каждый следующий электрон занимает возможное энергетическое состояние с наименьшей энергией; заполнение электронными энергетическими состояниями происходит в соответствии с принципом Паули.

В периодической системе элементов наблюдается повторяемость в структуре внешних оболочек у атомов родственных элементов. Так, инертные газы (Ne, Ar, Kr) имеют одинаковые внешние оболочки из 8 электронов (заполненные  $s$  и  $p$ -состояния); во внешней оболочке щелочных металлов (Li, Na, K, Rb, Cs, Fr) имеется лишь один  $s$ -электрон; во внешней оболочке щелочно-земельных металлов (Be, Mg, Ca, Sr, Ba, Ra) имеется два  $s$ -электрона; галогиды (F, Cl, Br, I, At) имеют внешние оболочки, в которых недостает одного электрона до оболочки инертного газа, и т. д.

Период	$Z$	Элемент	K		L			M			N				Период	$Z$	Элемент	K		L			M			N														
			1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s	4p	4d	4f	1s	2s				2p	3s	3p	3d	4s	4p	4d	4f															
I	1	H	1												19	K	2	2	6	2	6	—	1																	
	2	He	2												20	Ca	2	2	6	2	6	—	2																	
II	3	Li	2	1											21	Sc	2	2	6	2	6	1	2																	
	4	Be	2	2											22	Ti	2	2	6	2	6	2	2																	
	5	B	2	2	1										23	V	2	2	6	2	6	3	2																	
	6	C	2	2	2										24	Cr	2	2	6	2	6	4	2																	
	7	N	2	2	3										25	Mn	2	2	6	2	6	5	2																	
	8	O	2	2	4										26	Fe	2	2	6	2	6	6	2																	
	9	F	2	2	5										27	Co	2	2	6	2	6	7	2																	
	10	Ne	2	2	6										28	Ni	2	2	6	2	6	8	2																	
III	11	Na	2	2	6	1									IV	29	Cu	2	2	6	2	6	10	1																
	12	Mg	2	2	6	2									30	Zn	2	2	6	2	6	10	2																	
	13	Al	2	2	6	2	1								31	Ga	2	2	6	2	6	10	2	1																
	14	Si	2	2	6	2	2								32	Ge	2	2	6	2	6	10	2	2																
	15	P	2	2	6	2	3								33	As	2	2	6	2	6	10	2	3																
	16	S	2	2	6	2	4								34	Se	2	2	6	2	6	10	2	4																
	17	Cl	2	2	6	2	5								35	Br	2	2	6	2	6	10	2	5																
	18	Ar	2	2	6	2	6								36	Kr	2	2	6	2	6	10	2	6																



### 6.3.7. РЕНТГЕНОВСКИЕ СПЕКТРЫ

*Рентгеновские спектры* — спектры испускания и поглощения рентгеновского излучения (электромагнитного излучения с длиной волны в пределах от  $10^{-12}$  до  $10^{-9}$  м). Самым распространенным источником рентгеновского излучения является рентгеновская трубка. Спектр излучения рентгеновской трубки представляет собой наложение *тормозного* и *характеристического рентгеновских спектров*.

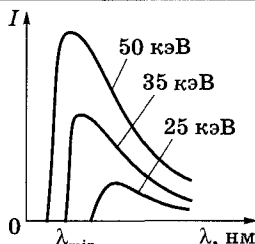
#### 6.88 Сплошной (тормозной) рентгеновский спектр

##### Природа сплошного рентгеновского спектра

Возникает при *торможении* бомбардирующих анод рентгеновской трубки быстрых электронов. Определяется только энергией бомбардирующих анод электронов и не зависит от материала анода.

##### Особенности сплошного спектра

1. Существование максимума интенсивности, смещающегося с повышением напряжения в сторону коротких длин волн.
2. Существование минимальной длины волны  $\lambda_{\min}$  — *коротковолновой границы сплошного спектра* (зависит лишь от кинетической энергии электронов, вызывающих тормозное излучение, и не зависит от вещества анода).



##### Коротковолновая граница сплошного спектра

$$\lambda_{\min} = \frac{c}{\nu_{\max}} = \frac{ch}{eU}$$

Согласно квантовым представлениям, энергия рентгеновских фотонов  $h\nu$ , возникающих при торможении электронов, не может быть больше кинетической энергии  $eU$  этих электронов:  $h\nu \leq eU$ .

[ $\nu_{\max} = eU/h$ ;  $\lambda_{\min}$  — коротковолновая граница сплошного спектра (чем больше энергия, тем меньше  $\lambda_{\min}$ );  $eU$  — энергия бомбардирующих анод электронов;  $c$  — скорость света в вакууме;  $h$  — постоянная Планка;  $\nu_{\max}$  — максимальная частота излучения рентгеновских фотонов]

#### 6.89 Характеристический рентгеновский спектр

##### Природа характеристического рентгеновского спектра

Возникает, когда энергия бомбардирующих анод электронов достаточна для выбивания электронов с *внутренних оболочек* атомов вещества. На фоне сплошного спектра появляются отдельные резкие линии — линейчатый спектр, определяемый материалом анода.

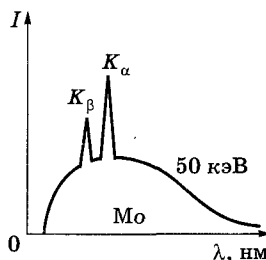
##### Особенности характеристического спектра

◆ Они просты и однотипны — состоят из нескольких серий, обозначаемых  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  и  $O$ .

◆ Каждая серия содержит небольшой набор отдельных линий, обозначаемых в порядке убывания длины волны индексами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , ... ( $K_\alpha$ ,  $K_\beta$ ,  $K_\gamma$ , ...,  $L_\alpha$ ,  $L_\beta$ ,  $L_\gamma$ , ...).

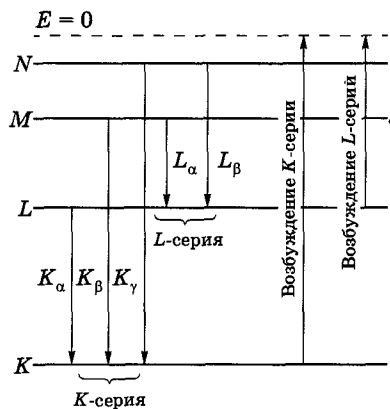
◆ При переходе от легких элементов к тяжелым весь спектр, без изменения его структуры, монотонно смещается в сторону коротких волн.

◆ Атомы каждого химического элемента (даже в химических соединениях) обладают определенным, присущим только данному элементу, характеристическим спектром.



## 6.90 Возбуждение характеристических рентгеновских серий

Возбуждение характеристических рентгеновских серий обусловлено процессами, происходящими во внутренних, застроенных оболочках атомов (они имеют сходное строение). Если, например, вырывается один из внутренних  $K$ -электронов металла (под действием внешнего электрона или высокоэнергетического фотона), то на его место может перейти электрон с более удаленных от ядра оболочек  $L$ ,  $M$ ,  $N$ , ... . Такие переходы сопровождаются испусканием рентгеновских квантов и возникновением спектральных линий  $K$ -серии:  $K_\alpha$  ( $L \rightarrow K$ ),  $K_\beta$  ( $M \rightarrow K$ ),  $K_\gamma$  ( $N \rightarrow K$ ) и т. д.



Длины волн в ряду  $K_\alpha \rightarrow K_\beta \rightarrow K_\gamma$

Самая длинноволновая линия —  $K_\alpha$ , так как частоты линий возрастают в ряду  $K_\alpha \rightarrow K_\beta \rightarrow K_\gamma$  (энергия, высвобождаемая при переходе электрона на  $K$ -оболочку с более удаленных оболочек, увеличивается).

Интенсивности линий в ряду  $K_\alpha \rightarrow K_\beta \rightarrow K_\gamma$

Интенсивности линий в ряду  $K_\alpha \rightarrow K_\beta \rightarrow K_\gamma$  убывают, поскольку вероятность переходов электронов с  $L$ -оболочки на  $K$ -оболочку больше, чем с более удаленных оболочек  $M$  и  $N$ .

$K$ -серия сопровождается  $L$ ,  $M$ , ... сериями, так как при испускании ее линий появляются вакансии в оболочках  $L$ ,  $M$ , ... . Возникновение  $L$ ,  $M$ , ... серий объясняется аналогично (они наблюдаются только для тяжелых элементов).

## 6.91 Частоты линий характеристического излучения

Закон Мозли

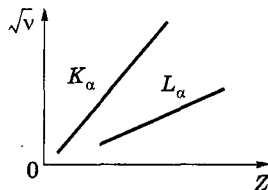
$$\nu = R(Z - \sigma)^2 \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Подобен в записи обобщенной формуле Бальмера [6.4](#).

Закон Мозли в другой записи

$$\sqrt{\nu} = a(Z - \sigma)$$

Из записи следует, что  $\sqrt{\nu}$  — линейная функция атомного номера  $Z$ . На рисунке представлены кривые, на которых укладываются частоты линий  $K_\alpha$  и  $L_\alpha$  различных элементов, т. е. закон Мозли точно выполняется.



[ $R$  — постоянная Ридберга [6.4](#);  $Z$  — порядковый номер в Периодической системе элементов;  $\sigma$  — постоянная экранирования, одинаковая в пределах каждой серии для всех элементов (для  $K$ -серии  $\sigma = 1$ , для  $L$ -серии  $\sigma = 7,5$  и т. д.),  $m = 1, 2, 3, \dots$  (определяет рентгеновскую серию),  $n = m + 1, m + 2, \dots$  (определяет линию соответствующей серии);  $a$  — постоянная, имеющая определенное значение для каждой линии]

Смысл постоянной экранирования

На электрон, совершающий переход, действует не весь заряд ядра  $Ze$ , а заряд  $(Z - \sigma)e$ , ослабленный экранирующим действием других электронов.

## 6.3.8. МОЛЕКУЛЫ: ЭНЕРГИЯ И СПЕКТРЫ

### 6.92 Типы химической связи молекул

#### Молекула

Наименьшая частица вещества, состоящая из одинаковых или различных атомов, соединенных химическими связями, и являющаяся носителем его основных химических и физических свойств.

#### Двухатомные молекулы

Число атомов, составляющих молекулу, равно двум ( $H_2$ , CO, KCl).

#### Многоатомные молекулы

Число атомов, составляющих молекулу, более двух, а для некоторых молекул составляет от сотен до тысяч (белки, гормоны, ...).

#### Ионная (гетерополярная) химическая связь

Осуществляется благодаря кулоновскому притяжению между разноименно заряженными ионами (например, молекулы NaCl, KBr).

#### Ковалентная (гомеополярная) химическая связь

Осуществляется в результате *обменного взаимодействия*, носящего чисто квантовый характер и не имеющего аналога в классической физике (например, молекулы  $H_2$ , CO).

### 6.93 Описание молекулы как квантовой системы

Состояние молекулы описывается уравнением Шредингера, учитывающим взаимодействие электронов с ядрами, электронов друг с другом, а также кинетическую энергию электронов и ядер (задача очень сложная!).

#### Адиабатическое приближение

Для приближенного решения задачи квантово-механическая система разделяется на тяжелые и легкие частицы — ядра и электроны. Массы и скорости этих частиц сильно различаются, поэтому считается, что *электроны движутся в поле неподвижных ядер, а медленно движущиеся ядра находятся в усредненном поле электронов.*

### 6.94 Энергия молекулы

#### Полная энергия без учета энергии поступательного движения и энергии ядер

$$E = E_{\text{эл}} + E_{\text{кол}} + E_{\text{вр}}$$

Энергия поступательного движения не квантуется, поэтому ее изменения не приводят к возникновению дискретного спектра, а энергия ядер обуславливает только сверхтонкую структуру спектральных линий. Все записанные энергии квантуются.

#### Отношения энергий

$$E_{\text{эл}} : E_{\text{кол}} : E_{\text{вр}} = 1 : \sqrt{\frac{m}{M}} : \frac{m}{M}$$

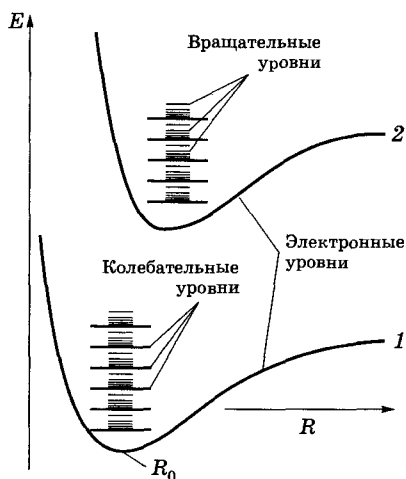
$m/M \approx 10^{-5} \div 10^{-3}$ , поэтому  $E_{\text{эл}} \gg E_{\text{кол}} \gg E_{\text{вр}}$ . Различие в энергии между основным и первым возбужденным состояниями составляет 1—10 эВ для «электронных» энергий,  $10^{-2}$ — $10^{-1}$  эВ для «колебательных» энергий и примерно равно  $10^{-5}$ — $10^{-3}$  эВ для «вращательных» энергий.

[ $E_{\text{эл}}$  — энергия, обусловленная движением электронов относительно ядер,  $E_{\text{кол}}$  — энергия, обусловленная колебанием ядер (учитывает периодически изменяющееся относительное положение ядер);  $E_{\text{вр}}$  — энергия, обусловленная вращением ядер (учитывает периодически изменяющуюся ориентацию молекулы в пространстве)]

## 6.95 Зависимость полной энергии двухатомной молекулы от межатомного расстояния

В области  $R > R_0$  преобладает притяжение, в области  $R < R_0$  — отталкивание. При  $R = R_0$  притяжение и отталкивание уравниваются и «электронная» энергия имеет минимум, т. е.  $R_0$  соответствует равновесному расстоянию между атомами в основном состоянии молекулы (кривая 1). Кривая 2 — электронная энергия возбужденного электронного состояния (их может быть больше).

Приближенная квантовая модель молекулы — это совокупность далеко отстоящих друг от друга *электронных уровней* (различные  $E_{эл}$  при  $E_{кол} = E_{вр} = 0$ ), довольно близко расположенных друг к другу *колебательных уровней* (заданное  $E_{эл}$  при различных  $E_{кол}$  и  $E_{вр} = 0$ ) и еще более близких друг к другу *вращательных уровней* (заданные  $E_{эл}$  и  $E_{кол}$  при различных  $E_{вр}$ ).



## 6.96 Спектры молекул

### Молекулярные спектры

Спектры излучения (поглощения), возникающие при квантовых переходах между уровнями энергии молекул. Определяются структурой энергетических уровней молекулы **6.96** и *правилами отбора* **6.70**.

### Электронные спектры

Соответствуют переходам с одного электронного уровня на другой.

### Колебательные спектры

Соответствуют переходам с одного колебательного уровня на другой.

### Вращательные спектры

Соответствуют переходам с одного вращательного уровня на другой.

### Электронно-колебательные спектры

Соответствуют переходам между электронным и колебательным уровнями.

### Колебательно-вращательные спектры

Соответствуют переходам между колебательными и вращательными уровнями.

### Полосатые спектры

Такое название получили молекулярные спектры за их характерный вид (совокупность более или менее узких полос в различных областях спектра). Полосы имеют различную интенсивность в зависимости от относительных вероятностей переходов. С помощью спектральных приборов высокой разрешающей способности обнаружено, что полосы представляют собой тесно расположенные (с трудом различимые) линии. Структура молекулярных спектров для разных молекул различна; с увеличением числа атомов в молекуле она усложняется (наблюдаются только сплошные широкие полосы).

### 6.3.9. ПОГЛОЩЕНИЕ, СПОНТАННОЕ И ВЫНУЖДЕННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

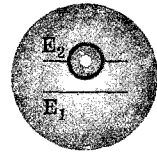
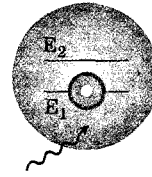
#### 6.97 Три типа переходов атомов из одного состояния в другое

##### Поглощение излучения

Атом, находясь в основном состоянии, может осуществить вынужденный переход в возбужденное состояние путем поглощения фотона, когда (и только когда) энергия фотона совпадает с разностью энергий между возбужденным и основным уровнями ( $h\nu = E_2 - E_1$ ).

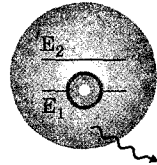
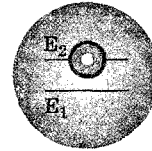
До взаимодействия

После взаимодействия



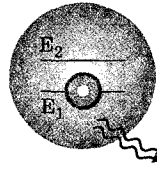
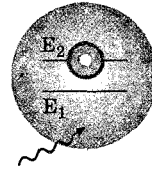
##### Спонтанное (самопроизвольное) излучение

Атом, находясь в возбужденном состоянии, может осуществить спонтанные переходы в основное состояние без каких-либо внешних воздействий, испуская при этом фотон с энергией  $h\nu = E_2 - E_1$ . Так как спонтанные акты излучения взаимно не связаны между собой, то *спонтанное излучение некогерентно*.



##### Вынужденное (индуцированное) излучение

Атом, находясь в возбужденном состоянии, может осуществить вынужденный (индуцированный) переход в основное состояние под действием внешнего излучения с частотой, удовлетворяющей условию  $h\nu = E_2 - E_1$ , с излучением фотона той же энергии  $h\nu = E_2 - E_1$ . При данном переходе происходит излучение атомом фотона *дополнительно* к тому фотону, под действием которого произошел переход.



#### 6.98 Вынужденное излучение

##### Тождественность вынужденного излучения вынуждающему излучению

*Вторичный фотон, испускаемый атомом, неотличим от первичного фотона, стимулирующего переход. Вынужденное излучение имеет такую же частоту, фазу, поляризацию и направление распространения, как и вынуждающее излучение, т. е. вынужденное излучение строго когерентно с вынуждающим.*

##### Условия, необходимые для усиления вынужденного излучения

Вторичный и первичный фотоны, двигаясь в направлении первичного фотона и встречая на своем пути другие возбужденные атомы, стимулируют дальнейшие индуцированные переходы, в результате чего должна возникнуть лавина фотонов. Однако наряду с вынужденным излучением идет и *конкурирующий процесс — поглощение*. Для усиления вынужденного излучения необходимо, чтобы число актов индуцированного излучения фотонов (оно пропорционально заселенности возбужденных состояний) превышало число актов поглощения фотонов (оно пропорционально заселенности основных состояний). В системе атомов, находящейся в термодинамическом равновесии, поглощение преобладает над излучением и падающее излучение при прохождении через вещество ослабляется.

## 6.99 Среда с инверсными состояниями

### Состояния с инверсией заселенностей (инверсные состояния)

Неравновесное состояние системы атомов, в котором число атомов в возбужденном состоянии больше, чем их число в основном состоянии (иными словами, нужно обратить заселенность энергетических уровней).

#### Накачка

Процесс перевода системы в инверсное состояние. Инверсию заселенностей создают внешним воздействием (оптическими, электрическими и другими способами).

#### Активная среда

Среда с инверсной заселенностью уровней: в такой среде вынужденное излучение может превышать поглощение света атомами и падающий пучок света при прохождении через вещество будет усиливаться.

## 6.100 Закон Бугера—Ламберта—Фабриканта

### Закон Бугера—Ламберта—Фабриканта

$$I = I_0 e^{|\alpha|x}$$

Излучение распространяется в активной среде в направлении  $x$ .

[ $I_0$  — интенсивность света, входящего в среду (при  $x = 0$ );  $I$  — интенсивность света, прошедшего слой толщиной  $x$ ;  $|\alpha|$  — положительный коэффициент, соответствующий усилению света при его прохождении через вещество]

## 6.3.10. ОПТИЧЕСКИЕ КВАНТОВЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ (ЛАЗЕРЫ)

### 6.101 Предпосылки для создания когерентного излучения

Для получения когерентного излучения в результате вынужденного излучения необходимо:

#### наличие инверсии заселенностей

Число атомов в более высоком состоянии должно превышать число атомов в более низком состоянии.

#### наличие метастабильного состояния

Возбужденное энергетическое состояние атомной системы, в котором она может существовать длительное время, в результате чего переход в более низкое состояние происходит благодаря *вынужденному*, а не спонтанному излучению.

## 6.102 Лазеры и их типы

### Лазеры

Приборы, генерирующие очень узкий пучок монохроматического когерентного излучения высокой интенсивности в оптическом диапазоне.

В основу деления лазеров положен:

Тип активной среды	Метод накачки	Режим генерации
Твердотельные	Оптические	Непрерывный
Газовые	Тепловые	
Полупроводниковые	Химические	Импульсный
Жидкостные	Электроионизационные и др.	

## 6.103 Элементы лазеров

### Активная среда

Среда, в которой создаются состояния с инверсией заселенностей **6.100**.

### Система накачки

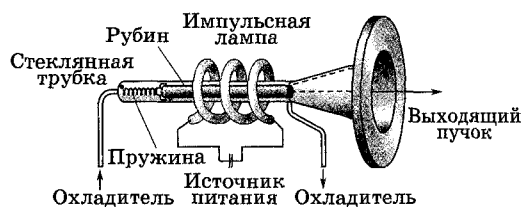
Устройство для создания инверсии в активной среде.

### Оптический резонатор

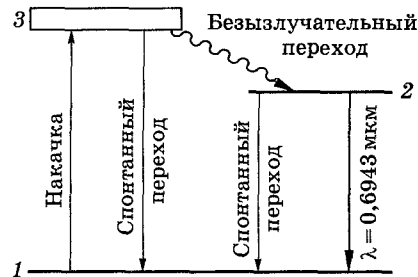
Устройство, выделяющее в пространстве избирательное направление пучка фотонов и формирующее выходящий световой пучок.

## 6.104 Принцип действия твердотельного лазера

Принципиальная схема  
рубинового лазера



Трехуровневая схема энергетических  
уровней иона  $\text{Cr}^{3+}$



### Активная среда

*Кристалл рубина* (оксид алюминия  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ). В кристаллической решетке оксида алюминия часть атомов Al заменена ионами  $\text{Cr}^{3+}$ , которые и участвуют в лазерной генерации.

### Оптическая накачка

При интенсивном облучении светом мощной импульсной лампы атомы хрома переходят с нижнего уровня 1 на уровни широкой полосы 3. Из состояния 3 атомы либо возвращаются в состояние 1 (переходы  $3 \rightarrow 1$  незначительны), либо переходят в метастабильное состояние 2. При безызлучательном переходе  $3 \rightarrow 2$  избыток энергии передается непосредственно кристаллической решетке, в результате чего кристалл рубина нагревается. Переход  $2 \rightarrow 1$  запрещен правилами отбора, поэтому время жизни метастабильного состояния  $\sim 10^{-3}$  с.

При мощной накачке в состоянии 2 может оказаться больше атомов, чем в состоянии 1, т. е. создается инверсная заселенность уровней, необходимая для генерации лазерного излучения. Каждый фотон, случайно родившийся при спонтанных переходах  $2 \rightarrow 1$ , может инициировать множество вынужденных переходов  $2 \rightarrow 1$ , в результате чего зарождается лазерная генерация (лазерное излучение на длине волны 0,6943 мкм). Излучение, состоящее из подобных лавин, не может обладать высокими когерентными свойствами (спонтанные переходы носят случайный характер и испускаются в разных направлениях).

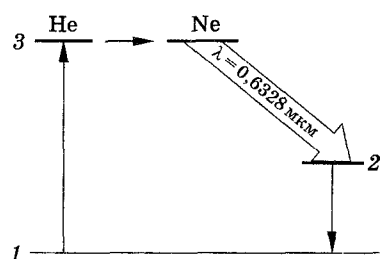
### Оптический резонатор **6.104**

Используется для выделения направления лазерной генерации.

## 6.105 Принцип действия газового лазера

### Трехуровневая схема

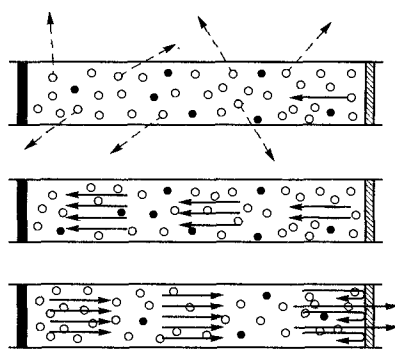
Первый газовый лазер (лазер с газообразной активной средой) непрерывного действия — лазер на смеси гелия (~ 15%) и неона (~ 85%). В He-Ne-лазере инверсия заселенностей уровней осуществляется электрическим разрядом в газе. В процессе разряда часть атомов гелия возбуждается и переходит в возбужденное состояние 3. При столкновениях возбужденных атомов



He с атомами Ne происходит возбуждение последних и они переходят на один из верхних уровней Ne, близко расположенных к соответствующему уровню He. Переход атомов неона на один из нижних уровней 2 приводит к лазерному излучению с  $\lambda = 0,6328$  мкм.

## 6.106 Оптический резонатор

Оптическим резонатором обычно служит пара параллельных зеркал на общей оптической оси, между которыми помещается активная среда (кристалл или кювета с газом). Как правило, зеркала изготавливаются так, что от одного из них излучение полностью отражается, а второе — полупрозрачно. Фотоны, движущиеся под углами к оси кристалла или кюветы, выходят из активной среды через ее боковую поверхность. Те же из фотонов, которые движутся вдоль оси, многократно отразятся от противоположных торцов, каждый раз вызывая вынужденное испускание вторичных фотонов, которые, в свою очередь, вызовут вынужденное излучение, и т. д. Так как фотоны, возникшие при вынужденном излучении, движутся в том же направлении, что и первичные, то поток фотонов, параллельный оси кристалла или кюветы, нарастает лавинообразно. Многократно усиленный поток фотонов выходит через полупрозрачное зеркало, создавая строго направленный световой пучок с высокими когерентными свойствами.



[На рисунке: белые кружки — возбужденные состояния атомов; черные — атомы в основном состоянии; пунктирные стрелки — спонтанное излучение в разных направлениях; сплошная стрелка — квант, движущийся вдоль оси лазера и вызывающий вынужденное излучение возбужденных атомов]

## 6.107 Свойства лазерного излучения

- ◆ *временная и пространственная когерентность* (из-за пространственной когерентности излучение может быть сфокусировано в объеме  $\sim \lambda^3$ );
- ◆ *строгая монохроматичность* ( $\Delta\lambda < 10^{-11}$  м);
- ◆ *большая плотность потока энергии;*
- ◆ *очень малое угловое расхождение в пучке.*

КПД для большинства лазеров составляет от 0,1 до 1%, хотя, например, КПД  $\text{CO}_2$ -лазера непрерывного действия, генерирующего в инфракрасной области, ~30%, лазера на стекле с неодимом ~ 75%.



## 6.4. Элементы физики твердого тела

### 6.4.1. ПОНЯТИЕ О ЗОННОЙ ТЕОРИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

#### 6.108 Приближения зонной теории

##### Адиабатическое приближение

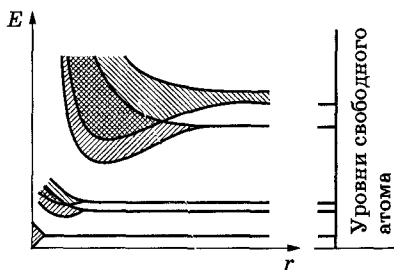
Решение динамической задачи (уравнения Шредингера) для системы многих частиц (кристалла) возможно лишь приближенно сведением задачи многих частиц к одноэлектронной задаче об одном электроне, движущемся в заданном внешнем поле. Квантово-механическая система разделяется на тяжелые и легкие частицы — ядра и электроны. Поскольку массы и скорости этих частиц значительно различаются, можно считать, что движение электронов происходит в поле неподвижных ядер, а медленно движущиеся ядра находятся в усредненном поле всех электронов. Принимая, что ядра в узлах кристаллической решетки неподвижны, движение электрона рассматривают в *постоянном периодическом поле ядер*.

##### Приближение самосогласованного поля

Взаимодействие данного электрона со всеми другими электронами заменяется действием на него стационарного электрического поля, обладающего периодичностью кристаллической решетки. Это поле создается усредненным в пространстве зарядом всех других электронов и всех ядер. В рамках зонной теории многоэлектронная задача сводится к задаче о движении одного электрона во внешнем периодическом поле — *усредненном и согласованном поле всех ядер и электронов*.

#### 6.109 Зонный энергетический спектр

Когда расстояния между атомами порядка межатомных расстояний в твердых телах, взаимодействие между атомами приводит к тому, что энергетические уровни атомов смещаются, расщепляются и расширяются в зоны, образуя зонный энергетический спектр. Заметно расщепляются и расширяются уровни внешних, валентных электронов, а также более высокие уровни, которые в основном состоянии атома электронами не заняты. Уровни же внутренних электронов либо совсем не расщепляются, либо расщепляются слабо.



[На рисунке: расщепление энергетических уровней в зависимости от расстояния  $r$  между атомами (мысленно рассматривается «процесс образования» твердого тела из изолированных атомов посредством уменьшения расстояния между ними до межатомных расстояний в твердом теле)]

##### Разрешенные энергетические зоны

Зоны (на рисунке заштрихованы), в которых могут находиться электроны. Каждая разрешенная зона «вмещает» в себя столько близлежащих дискретных уровней, сколько атомов содержит кристалл. Зоны практически непрерывны (расстояние между уровнями  $\sim 10^{-22}$  эВ); факт конечного числа уровней важен для распределения электронов по состояниям.

##### Запрещенные энергетические зоны

Зоны, в которых электроны не могут находиться. Они разделяют разрешенные энергетические зоны.

## Зонный энергетический спектр — квантово-механический эффект

Среднее время жизни  $\tau$  валентных электронов в атоме кристалла  $\sim 10^{-15}$  с (для изолированного атома  $\sim 10^{-8}$  с). Согласно соотношению неопределенностей [6.19],  $\Delta E \sim h/\tau$ , поэтому  $\Delta E \approx 1 \div 10$  эВ, т. е. энергетические уровни валентных электронов расширяются в зоны.

◆ Ширина зон (разрешенных и запрещенных) не зависит от размеров кристалла. Разрешенные зоны тем шире, чем слабее связь валентных электронов с ядрами.

### 6.4.2. МЕТАЛЛЫ, ДИЭЛЕКТРИКИ И ПОЛУПРОВОДНИКИ ПО ЗОННОЙ ТЕОРИИ

#### 6.110 Зоны: валентная и свободная

##### Валентная зона

Зона, полностью заполненная электронами и образуемая из энергетических уровней внутренних электронов свободных атомов.

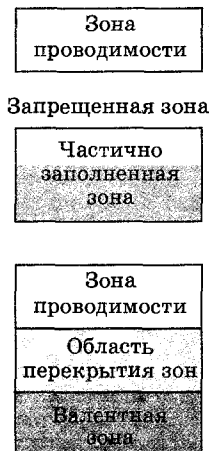
##### Зона проводимости (свободная зона)

Зона, либо частично заполненная электронами, либо свободная, и образуемая из энергетических уровней внешних «коллективизированных» электронов изолированных атомов.

#### 6.111 Металлы по зонной теории

Самая верхняя зона, содержащая электроны, заполнена лишь частично (в ней есть вакантные уровни). Электрон, получив сколь угодно малую энергетическую «добавку», может перейти на более высокий уровень той же зоны, т. е. стать свободным и участвовать в проводимости. Это возможно, так как при 1 К энергия теплового движения  $kT \approx 10^{-4}$  эВ (разность же энергий между соседними энергетическими уровнями зоны  $\sim 10^{-22}$  эВ). Это свойственно металлам.

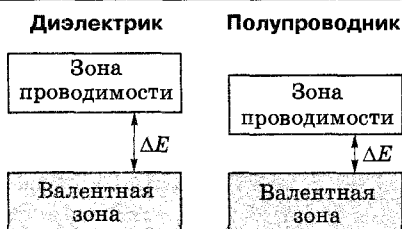
Валентная зона перекрывается свободной зоной, что в конечном счете приводит к не полностью заполненной зоне. Это характерно для щелочно-земельных элементов (Be, Mg, Ca, Zn, ...). В данном случае образуется так называемая «гибридная» зона, которая заполнена лишь частично. Металлические свойства этих элементов обусловлены перекрытием валентной и свободной зон.



#### 6.112 Диэлектрики и полупроводники по зонной теории

Если ширина  $\Delta E$  запрещенной зоны кристалла порядка нескольких эВ, то тепловое движение не может перебросить электроны из валентной зоны в зону проводимости, и кристалл является *диэлектриком*, оставаясь им при всех реальных температурах.

Если  $\Delta E < 1$  эВ, то переброс электронов из валентной зоны в зону проводимости может быть осуществлен либо путем теплового возбуждения, либо за счет внешнего источника, способного передать электронам энергию  $\Delta E$ , и кристалл является *полупроводником*.



[ $\Delta E$  — ширина запрещенной зоны]

## 6.113 Различие в свойствах металлов, диэлектриков и полупроводников по зонной теории

### Различие в электрических свойствах

Определяется неодинаковым заполнением электронами разрешенных зон и шириной запрещенных зон.

### Различие между металлами и диэлектриками

При 0 К в зоне проводимости металлов имеются электроны, а в зоне проводимости диэлектриков они отсутствуют.

### Различие между диэлектриками и полупроводниками

Определяется шириной запрещенных зон: для диэлектриков она довольно широка (например, для NaCl  $\Delta E = 6$  эВ), для полупроводников — достаточно узка (например, для германия  $\Delta E = 0,72$  эВ). При температурах, близких к 0 К, полупроводники ведут себя как диэлектрики, так как переброса электронов в зону проводимости не происходит. С повышением температуры у полупроводников растет число электронов, которые вследствие теплового возбуждения переходят в зону проводимости, т. е. электрическая проводимость их увеличивается.

## 6.4.3. СОБСТВЕННАЯ ПРОВОДИМОСТЬ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

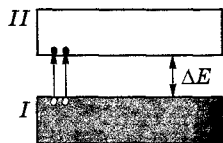
*Собственная проводимость* полупроводников — проводимость химически чистых полупроводников, называемых *собственными полупроводниками* (химически чистые Ge, Se, а также химические соединения InSb, GaAs, CdS и др.).

## 6.114 Механизм проводимости собственных полупроводников

### Электронная проводимость (проводимость *n*-типа)

Проводимость собственных полупроводников, обусловленная электронами.

При повышении температуры электроны с верхних уровней валентной зоны *I* могут быть переброшены на нижние уровни зоны проводимости *II*. При наложении на кристалл электрического поля электроны перемещаются против поля и создают электрический ток. Таким образом, зона *II* из-за ее частичного «укомплектования» электронами становится зоной проводимости.



### Дырочная проводимость (проводимость *p*-типа)

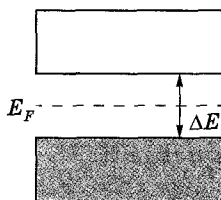
Проводимость собственных полупроводников, обусловленная квазичастицами — дырками.

В результате тепловых забросов электронов из зоны *I* в зону *II* в валентной зоне возникают вакантные состояния, получившие название *дырок*. Во внешнем электрическом поле на освободившееся от электрона место — дырку — может переместиться электрон с соседнего уровня, а дырка появится в том месте, откуда ушел электрон, и т. д. Такой процесс заполнения дырок электронами равносильен перемещению дырки в направлении, противоположном движению электрона, так, как если бы дырка обладала положительным зарядом, равным по величине заряду электрона.

**Вывод.** В собственных полупроводниках наблюдается два механизма проводимости: *электронный* и *дырочный*.

## 6.115 Уровень Ферми в собственном полупроводнике

В собственном полупроводнике уровень Ферми  $E_F$  находится в середине запрещенной зоны. Для переброса электрона с верхнего уровня валентной зоны на нижний уровень зоны проводимости затрачивается энергия активации, равная ширине запрещенной зоны  $\Delta E$ . При появлении же электрона в зоне проводимости в валентной зоне обязательно возникает дырка. Следовательно, энергия, затраченная на образование пары носителей тока, должна делиться на две равные части. Так как энергия, соответствующая половине ширины запрещенной зоны, идет на переброс электрона и такая же энергия затрачивается на образование дырки, то начало отсчета для каждого из этих процессов должно находиться в середине запрещенной зоны. Энергия Ферми в собственном полупроводнике представляет собой энергию, от которой происходит возбуждение электронов и дырок.

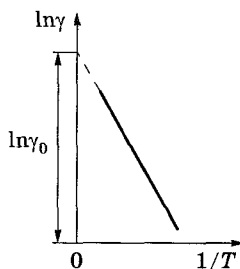


## 6.116 Удельная проводимость полупроводников

$$\gamma = \gamma_0 e^{-\frac{\Delta E}{2kT}}$$

Увеличение проводимости полупроводников с повышением температуры (характерная особенность) по зонной теории: с повышением температуры растет число электронов, перебрасываемых вследствие теплового возбуждения в зону проводимости, которые участвуют в проводимости.

Зависимость  $\ln \gamma$  от  $1/T$  для собственных полупроводников — прямая; по наклону кривой можно определить ширину запрещенной зоны  $\Delta E$ , а по ее продолжению —  $\gamma_0$  (прямая отсекает на оси ординат отрезок, равный  $\ln \gamma_0$ ).

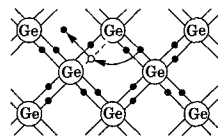


[ $\gamma$  — удельная проводимость;  $\gamma_0$  — постоянная, характерная для данного полупроводника;  $\Delta E$  — ширина запрещенной зоны;  $k$  — постоянная Больцмана;  $T$  — термодинамическая температура]

## 6.117 Собственная проводимость германия

Упрощенная плоская схема расположения атомов в кристалле Ge

Ge имеет решетку типа алмаза, в которой каждый атом связан ковалентными связями с четырьмя ближайшими соседями (каждая черточка на рисунке обозначает связь, осуществляемую одним электроном).



Поведение Ge при 0 К

В идеальном кристалле при 0 К германий является диэлектриком, так как все валентные электроны участвуют в образовании связей и в проводимости не участвуют.

Возникновение собственной проводимости Ge

При повышении температуры (или под действием других внешних факторов) тепловые колебания решетки могут привести к разрыву некоторых валентных связей, в результате чего часть электронов отщепляется и они становятся свободными. В покинутом электроном месте возникает дырка (она изображена белым кружком), заполнить которую могут

электроны из соседней пары. В результате дырка, так же как и освобо-  
дившийся электрон, будет двигаться по кристаллу. Движение электро-  
нов проводимости и дырок в отсутствие электрического поля является  
хаотическим. Если же на кристалл наложить электрическое поле, то  
электроны начнут двигаться против поля, дырки — по полю, что приве-  
дет к возникновению собственной проводимости германия, обусловлен-  
ной как электронами, так и дырками.

#### 6.4.4. ПРИМЕСНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

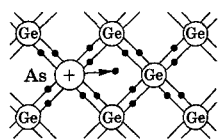
Проводимость полупроводников, обусловленная примесями, называется  
*примесной проводимостью*, а сами полупроводники — *примесными по-  
лупроводниками*. Примесная проводимость обусловлена примесями (ато-  
мы посторонних элементов), а также дефектами типа избыточных ато-  
мов (по сравнению со стехиометрическим составом), тепловыми (пустые  
узлы или атомы в междоузлиях) и механическими (трещины, дислокаци-  
и и т. д.) дефектами. Наличие в полупроводнике примеси существенно  
изменяет его проводимость. Например, при введении в кремний пример-  
но 0,001 ат. % бора его проводимость увеличивается примерно в  $10^6$  раз.

#### 6.118 Электронная примесная проводимость (проводимость *n*-типа)

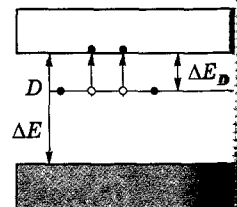
Возникает в полупроводниках с примесью, валентность которой на  
единицу больше валентности основных атомов.

**Пример:** Ge (германий) с примесью As (мышьяка)

При замещении атома германия пятивалентным атомом мышьяка один электрон не может образо-  
вать ковалентной связи, он оказывается лишним и может быть легко при тепловых колебаниях решетки  
отщеплен от атома, т. е. стать свободным. Образование свободного электрона не сопровож-  
дается нарушением ковалентной связи; следовательно, в отличие от собствен-  
ного полупроводника дырка не возникает. Избыточный положитель-  
ный заряд, возникающий вблизи атома примеси, связан с атомом приме-  
си и поэтому перемещаться по решетке не может.



Согласно зонной теории, введение примеси иска-  
жает поле решетки, что приводит к возникнове-  
нию в запрещенной зоне энергетического уровня  $D$   
валентных электронов мышьяка, называемого  
*примесным уровнем*. В случае германия с при-  
месью мышьяка этот уровень располагается от дна  
зоны проводимости на расстоянии  $\Delta E_D = 0,013$  эВ.  
Так как  $\Delta E_D < kT$ , то уже при обычных температу-  
рах энергия теплового движения достаточна для того, чтобы перебросить  
электроны примесного уровня в зону проводимости; образующиеся при  
этом положительные заряды локализируются на неподвижных атомах  
мышьяка и в проводимости не участвуют.



[ $\Delta E$  — ширина запрещенной зоны;  $\Delta E_D$  — энергетическое расстояние от дна  
зоны проводимости]

**Основные носители тока**

Электроны.

## Полупроводники *n*-типа

Полупроводники с электронной примесной проводимостью (проводимостью *n*-типа).

### Доноры

Примеси, являющиеся источником электронов.

### Донорные уровни

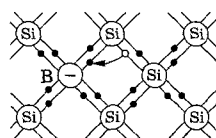
Энергетические уровни доноров.

## 6.119 Дырочная примесная проводимость (проводимость *p*-типа)

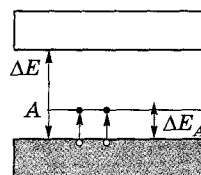
Возникает в полупроводниках с примесью, валентность которой на единицу меньше валентности основных атомов.

### Пример: Si (кремний) с примесью B (бора)

Для образования связей с четырьмя ближайшими соседями у атома бора не хватает одного электрона, одна из связей остается неуполноценной и четвертый электрон может быть захвачен от соседнего атома основного вещества, где соответственно образуется дырка. Последовательное заполнение образующихся дырок электронами эквивалентно движению дырок в полупроводнике, т. е. дырки не остаются локализованными, а перемещаются в решетке кремния как свободные положительные заряды. Избыточный же отрицательный заряд, возникающий вблизи атома примеси, связан с атомом примеси и по решетке перемещаться не может.



По зонной теории введение трехвалентной примеси в решетку кремния приводит к возникновению в запрещенной зоне примесного энергетического уровня  $A$ , не занятого электронами. В случае кремния с примесью бора этот уровень располагается выше верхнего края валентной зоны на расстоянии  $\Delta E_A = 0,08$  эВ. Близость этих уровней к валентной



зоне приводит к тому, что уже при сравнительно низких температурах электроны из валентной зоны переходят на примесные уровни и, связываясь с атомами бора, теряют способность перемещаться по решетке кремния, т. е. в проводимости не участвуют. Носителями тока являются лишь дырки, возникающие в валентной зоне.

[ $\Delta E$  — ширина запрещенной зоны;  $\Delta E_A$  — энергетическое расстояние от акцепторного уровня до потолка валентной зоны]

## Основные носители тока

Дырки.

## Полупроводники *p*-типа

Полупроводники с дырочной примесной проводимостью (проводимостью *p*-типа).

### Акцепторы

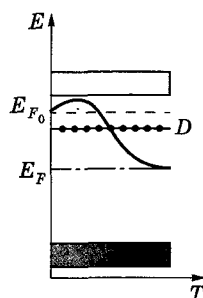
Примеси, захватывающие электроны из валентной зоны полупроводника.

### Акцепторные уровни

Энергетические уровни акцепторов.

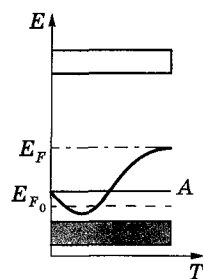
## 6.120 Уровень Ферми в полупроводниках $n$ -типа

В случае полупроводников  $n$ -типа уровень Ферми  $E_{F_0}$  при 0 К расположен посередине между дном зоны проводимости и донорным уровнем. С повышением температуры все большее число электронов переходит из донорных состояний в зону проводимости, но, помимо этого, возрастает и число тепловых флуктуаций, способных возбуждать электроны из валентной зоны и перебрасывать их через запрещенную зону энергий. Поэтому при высоких температурах уровень Ферми имеет тенденцию смещаться вниз (сплошная кривая) к своему предельному положению в центре запрещенной зоны, характерному для собственного полупроводника.



## 6.121 Уровень Ферми в полупроводниках $p$ -типа

Уровень Ферми  $E_{F_0}$  в полупроводниках  $p$ -типа при 0 К располагается посередине между потолком валентной зоны и акцепторным уровнем. Сплошная кривая опять-таки показывает его смещение с температурой. При температурах, при которых примесные атомы оказываются полностью истощенными и увеличение концентрации носителей происходит за счет возбуждения собственных носителей, уровень Ферми располагается посередине запрещенной зоны, как в собственном полупроводнике.



## 6.122 Зависимость проводимости примесного полупроводника от температуры

Проводимость примесного полупроводника, как и проводимость любого проводника, определяется концентрацией носителей и их подвижностью. С изменением температуры подвижность носителей меняется по сравнительно слабому степенному закону, а концентрация носителей — по очень сильному экспоненциальному закону, поэтому проводимость примесных полупроводников от температуры определяется в основном температурной зависимостью концентрации носителей тока в нем. На рисунке дан примерный график зависимости  $\ln \gamma$  от  $1/T$  для примесных полупроводников. Участок  $AB$  описывает примесную проводимость полупроводника. Рост примесной проводимости полупроводника с повышением температуры обусловлен в основном ростом концентрации примесных носителей. Участок  $BC$  соответствует области истощения примесей (это подтверждают и эксперименты), участок  $CD$  описывает собственную проводимость полупроводника.



## 6.4.5. ФОТОПРОВОДИМОСТЬ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

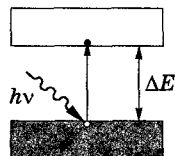
### 6.123 Виды фотопроводимости

*Фотопроводимость полупроводников* — увеличение электропроводности полупроводников под действием электромагнитного излучения (связана со свойствами как основного вещества, так и содержащихся в нем примесей).

## Собственная фотопроводимость

$$h\nu \geq \Delta E$$

При энергии фотонов, равной или большей ширины запрещенной зоны ( $h\nu \geq \Delta E$ ), могут совершаться перебро-сы электронов из валентной зоны в зону проводимости, что приводит к появлению добавочных (неравновесных) электронов (в зоне проводимости) и дырок (в валентной зоне).



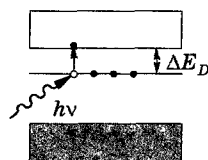
### Природа собственной фотопроводимости

Обусловлена как электронами, так и дырками.

## Примесная фотопроводимость (полупроводники n-типа)

$$h\nu \geq \Delta E_D$$

Если  $h\nu \geq \Delta E_D$ , то при поглощении света примесными центрами происходит переход электронов с донорных уровней в зону проводимости, что приводит к появлению добавочных (неравновесных) электронов в зоне проводимости.



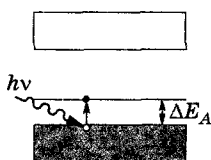
### Природа примесной фотопроводимости n-типа

Обусловлена электронами.

## Примесная фотопроводимость (полупроводники p-типа)

$$h\nu \geq \Delta E_A$$

Если  $h\nu \geq \Delta E_A$ , при поглощении света примесными центрами происходит переход электронов из валентной зоны на акцепторные уровни, что приводит к появлению дырок в валентной зоне.



### Природа примесной фотопроводимости p-типа

Обусловлена дырками.

## 6.124 Красная граница фотопроводимости

### Собственные полупроводники

$$\lambda_0 = \frac{c\hbar}{\Delta E}$$

Красная граница фотопроводимости для собственных полупроводников приходится на видимую область спектра.

### Примесные полупроводники

$$\lambda_0 = \frac{c\hbar}{\Delta E_n}$$

Красная граница фотопроводимости для примесных полупроводников приходится на инфракрасную область спектра.

[ $\lambda_0$  — длина волны, при которой еще фотопроводимость возбуждается;  $c$  — скорость распространения света в вакууме;  $\hbar$  — постоянная Планка;  $\Delta E$  — ширина запрещенной зоны;  $\Delta E_n$  — энергия активации примесных атомов]

## 6.4.6. ЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

### 6.125 Определение люминесценции

#### Люминесценция

Неравновесное излучение, избыточное при данной температуре над тепловым излучением и имеющее длительность, большую периода световых колебаний.

◆ Первая часть определения приводит к выводу, что люминесценция не является тепловым излучением **6.94**, поскольку любое тело при температуре выше 0 К излучает электромагнитные волны, а такое излучение является тепловым. Вторая часть показывает, что люминесценция не является таким видом свечения, как отражение и рассеяние света, тормозное излучение заряженных частиц и т. д. Период световых колебаний составляет примерно  $10^{-15}$  с, поэтому длительность, по которой свечение можно отнести к люминесценции, больше (примерно



$10^{-10}$  с). Признак длительности свечения дает возможность отличить люминесценцию от других неравновесных процессов. Так, по этому признаку излучение Вавилова—Черенкова [5,66] нельзя отнести к люминесценции.

## Люминофоры

Вещества, способные светиться под действием различного рода возбуждений.

### 6.126 Виды люминесценции по способу возбуждения

Вид люминесценции	Способ возбуждения
Фотолюминесценция	Свет
Рентгенолюминесценция	Рентгеновское излучение
Катодолюминесценция	Электронный пучок
Электролюминесценция	Электрическое поле
Радиолюминесценция	Ядерное излучение ( $\gamma$ -излучение, протоны и т. д.)
Хемилюминесценция	Химические превращения
Триболлюминесценция	Растирание и раскалывание кристаллов

### 6.127 Виды люминесценции по длительности свечения

#### Флуоресценция

Свечение, продолжающееся в течение промежутка времени  $t \leq 10^{-8}$  с после прекращения возбуждения.

#### Фосфоресценция

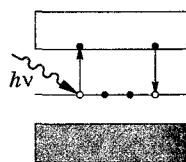
Свечение, продолжающееся заметный промежуток времени после прекращения возбуждения.

### 6.128 Механизмы люминесценции кристаллофосфоров

*Кристаллофосфоры* — искусственно выращенные кристаллы с чужеродными примесями, эффективно люминесцирующие.

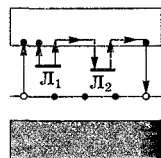
#### Флуоресценция кристаллофосфоров по зонной теории

Между валентной зоной и зоной проводимости кристаллофосфора располагаются примесные уровни активатора. При поглощении атомом активатора фотона с энергией  $h\nu$  электрон с примесного уровня переводится в зону проводимости, свободно перемещается по кристаллу до тех пор, пока не встретится с ионом активатора и не рекомбинирует с ним, перейдя вновь на примесный уровень. Рекомбинация сопровождается излучением кванта люминесцентного свечения. Время высвечивания люминофора определяется временем жизни возбужденного состояния атомов активатора, которое обычно не превышает миллиардных долей секунды. Поэтому свечение является кратковременным и исчезает почти вслед за прекращением облучения.



#### Фосфоресценция кристаллофосфоров по зонной теории

Для возникновения длительного свечения (фосфоресценции) кристаллофосфор должен содержать также *центры захвата*, или *ловушки*, для электронов, представляющие собой незаполненные локальные уровни (например,  $L_1$  и  $L_2$ ), лежащие вблизи дна зоны проводимости. Они могут быть образованы атомами примесей, т. е. электроны с примесного уровня переходят в зону



проводимости и становятся свободными. Однако они захватываются ловушками, в результате чего теряют свою подвижность, следовательно, и способность рекомбинировать с ионом активатора. Освобождение электронов из ловушки требует затраты определенной энергии, которую электроны могут получить, например, от тепловых колебаний решетки. Освобожденный из ловушки электрон попадает в зону проводимости и движется по кристаллу до тех пор, пока или не будет снова захвачен ловушкой, или не рекомбинирует с ионом активатора. В последнем случае возникает квант люминесцентного излучения. Длительность этого процесса определяется временем пребывания электронов в ловушках.

◆ Процесс *рекомбинации*: электроны переходят из зоны проводимости в валентную зону, отдавая энергию решетке и испуская кванты электромагнитного излучения. Процесс рекомбинации — конкурирующий процессу генерации электронов и дырок.

## 6.4.7. КОНТАКТ ДВУХ МЕТАЛЛОВ ПО ЗОННОЙ ТЕОРИИ

### 6.129 Ряд Вольта. Законы Вольта

#### Контактная разность потенциалов

Разность потенциалов, возникающая при соприкосновении двух различных металлов.

#### Ряд Вольта

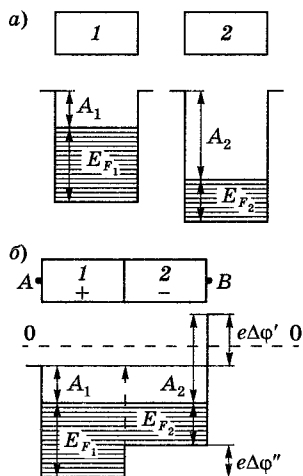
Ряд металлов Al, Zn, Sn, Pb, Sb, Bi, Hg, Fe, Cu, Ag, Au, Pt, Pd, обладающий тем свойством, что при приведении их в контакт в указанной последовательности каждый предыдущий при соприкосновении с одним из следующих заряжается положительно.

#### Законы Вольта

1. Контактная разность потенциалов зависит от химического состава и температуры соприкасающихся металлов.
2. Контактная разность потенциалов последовательно соединенных различных проводников, находящихся *при одинаковой температуре*, не зависит от химического состава промежуточных проводников и равна контактной разности потенциалов, возникающей при непосредственном соединении крайних проводников.

### 6.130 Контакт двух металлов по зонной теории

Два металла с работами выхода  $A_1$  и  $A_2$ , т. е. с разными положениями уровня Ферми (верхнего заполненного электронами энергетического уровня). При  $A_1 < A_2$  (рисунок *a*) уровень Ферми в металле 1 выше, чем в металле 2. При контакте металлов электроны с более высоких уровней металла 1 будут переходить на более низкие уровни металла 2, что приведет к тому, что металл 1 зарядится положительно, а металл 2 — отрицательно. Одновременно происходит относительное смещение энергетических уровней: в металле, заряжающемся положительно, все уровни смещаются вниз, а в металле, заряжающемся отрицательно, — вверх. Этот процесс будет происходить до тех пор, пока между соприкасающимися металлами не установится равновесие, которое, как доказывается в статистической физике, характеризу-



ется совпадением уровней Ферми в обоих металлах (рисунок б). Между внешними точками А и В устанавливается разность потенциалов, которая, как следует из рисунка б, равна

$$\Delta\varphi' = (A_2 - A_1)/e$$

— внешняя контактная разность потенциалов (контактная разность потенциалов): обусловлена различием работ выхода контактирующих металлов.

### 6.131 Свойства контакта двух металлов

#### Внутренняя контактная разность потенциалов

Разность потенциалов между внутренними точками двух контактирующих металлов, которая, как следует из рис. 6.131,

$$\Delta\varphi'' = (E_{F_1} - E_{F_2})/e$$

(обусловлена различием уровней Ферми двух контактирующих металлов). Причина возникновения данной разности потенциалов — различие концентраций электронов в контактирующих металлах.  $\Delta\varphi''$  зависит от температуры контакта металлов ( $E_F$  зависит от температуры).

#### Контактный слой

Двойной электрический слой, образующийся в приконтактной области соприкасающихся металлов, в котором возникает внутренняя контактная разность потенциалов.

#### Проводимость контактного слоя

Толщина контактного слоя в металлах составляет примерно  $10^{-10}$  м (соизмерима с междоузельными расстояниями в металле). Число электронов, участвующих в диффузии через контактный слой,  $\approx 2\%$  от общего числа электронов, находящихся на поверхности металла. Столь незначительное изменение концентрации электронов в контактном слое и малая, по сравнению с длиной свободного пробега электрона, его толщина не могут привести к заметному изменению проводимости контактного слоя по сравнению с остальной частью металла. Следовательно, электрический ток через контакт двух металлов проходит так же легко, как и через сами металлы, т. е. контактный слой проводит электрический ток в обоих направлениях ( $1 \rightarrow 2$  и  $2 \rightarrow 1$ ) одинаково и не дает эффекта выпрямления, который всегда связан с односторонней проводимостью.

## 6.4.8. ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

### 6.132 Явление Зеебека

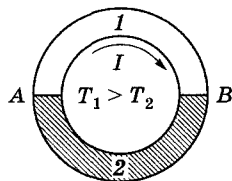
Явление Зеебека — возникновение электрического тока в замкнутой цепи, состоящей из последовательно соединенных разнородных проводников, контакты между которыми находятся при различной температуре.

#### Термоэлектродвижущая сила

Замкнутая цепь состоит из двух металлических проводников 1 и 2 с температурами  $T_1$  (контакт А) и  $T_2$  (контакт В);  $T_1 > T_2$ . Для многих пар металлов (например, Cu—Bi, Ag—Cu, Au—Cu) термоЭДС

$$\mathcal{E} = \alpha (T_1 - T_2).$$

Направление тока при  $T_1 > T_2$  показано стрелкой. Для пары медь—константан для  $\Delta T = 100$  К  $\mathcal{E} = 4,25$  мВ.



Положение уровня Ферми зависит от температуры. Если температуры контактов на границе двух металлов разные, то разными будут и внутренние контактные разности потенциалов **6.132**. Следовательно, сумма скачков потенциала отлична от нуля, что и приводит к появлению термоэлектрического тока.

◆ Явление Зеебека не противоречит второму началу термодинамики, так как в данном случае внутренняя энергия преобразуется в электрическую, для чего используются два источника теплоты (два контакта). Следовательно, для поддержания постоянного тока в рассматриваемой цепи необходимо поддерживать постоянство разности температур контактов: к более нагретому контакту непрерывно подводить теплоту, а от холодного — непрерывно ее отводить.

### Возможные применения явления

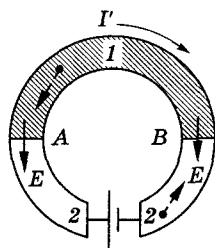
Используется для измерения температуры. Для этого применяются *термоэлементы*, или *термопары*, — датчики температур, состоящие из двух соединенных между собой разнородных металлических проводников. Чувствительность термопар выше, если их соединить последовательно. Эти соединения называются *термобатареями* (или *термостолбиками*). Термопары применяются как для измерения ничтожно малых разностей температур, так и для измерения очень высоких и очень низких температур (например, внутри печей или жидких газов). Явление Зеебека в принципе может быть использовано для генерации электрического тока.

## 6.133 Явление Пельтье

*Явление Пельтье* — выделение или поглощение дополнительной, помимо джоулевой, теплоты при прохождении через контакт двух различных проводников электрического тока (в зависимости от его направления). Это явление — обратное по отношению к явлению Зеебека **6.132**. Теплота Пельтье пропорциональна первой степени силы тока (!) и меняет знак при изменении направления тока.

### Теплота Пельтье

Замкнутая цепь состоит из двух разнородных металлических проводников 1 и 2, по которым пропускается ток  $I'$  (направление его такое же, как направление термотока (рисунок **6.133** при  $T_1 > T_2$ )). Спай  $A$ , который при явлении Зеебека поддерживался бы при более высокой температуре, теперь будет охлаждаться, а спай  $B$  — нагревается. При изменении направления тока  $I'$  спай  $A$  будет нагреваться, спай  $B$  — охлаждаться.



### Механизм возникновения теплоты Пельтье

Электронны по разную сторону спая обладают различной средней энергией (полной — кинетической плюс потенциальной). Если электроны (направление их движения задано на рисунке пунктирными стрелками) пройдут через спай  $B$  и попадут в область с меньшей энергией, то избыток своей энергии они отдадут кристаллической решетке и спай будет нагреваться. В спае  $A$  электроны переходят в область с большей энергией, забирая теперь недостающую энергию у кристаллической решетки, и спай будет охлаждаться.

### Возможные применения явления

Используется в термоэлектрических полупроводниковых холодильниках и в некоторых электронных приборах.

## 6.134 Явление Томсона

*Явление Томсона* — выделение (поглощение) дополнительной, аналогичной теплоте Пельтье 6.134, теплоты при прохождении тока по *неравномерно* нагретому проводнику.

### Механизм возникновения явления

В более нагретой части проводника электроны имеют большую среднюю энергию, чем в менее нагретой, поэтому, двигаясь в направлении убывания температуры, они отдают часть своей энергии решетке, в результате чего происходит выделение теплоты Томсона. Если же электроны движутся в сторону возрастания температуры, то они, наоборот, пополняют свою энергию за счет энергии решетки, в результате чего происходит поглощение теплоты Томсона.

## 6.4.9. ВЫПРЯМЛЕНИЕ НА КОНТАКТЕ МЕТАЛЛ—ПОЛУПРОВОДНИК

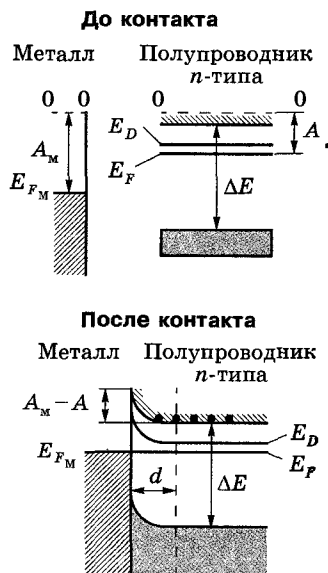
### 6.135 Контакт металла с полупроводником *n*-типа ( $A_m > A$ )

#### Энергетические диаграммы

Если  $A_m > A$ , то при контакте электроны из полупроводника будут переходить в металл, в результате чего контактный слой полупроводника обеднится электронами и зарядится положительно, а металл — отрицательно. Этот процесс будет происходить до достижения равновесного состояния, характеризуемого, как и при контакте двух металлов, выравниванием уровней Ферми для металла и полупроводника. На контакте образуется двойной электрический слой  $d$ , поле которого (контактная разность потенциалов) препятствует дальнейшему переходу электронов. Вследствие малой концентрации электронов проводимости в полупроводнике (порядка  $10^{15} \text{ см}^{-3}$  вместо  $10^{22} \text{ см}^{-3}$  в металлах) толщина контактного слоя в полупроводнике достигает примерно  $10^{-6} \text{ см}$ , т. е. примерно в 10 000 раз больше, чем в металле. Контактный слой полупроводника обеднен основными носителями тока — электронами в зоне проводимости, и его сопротивление значительно больше, чем в остальном объеме полупроводника. Такой *контактный слой* называется *запирающим*.

При  $d = 10^{-6} \text{ см}$  и  $\Delta\phi \approx 1 \text{ В}$  напряженность электрического поля контактного слоя  $E = \Delta\phi/d \approx 10^8 \text{ В/м}$ . Такое контактное поле не может сильно повлиять на структуру спектра (например, на ширину запрещенной зоны, на энергию активации примесей и т. д.), и его действие сводится лишь к параллельному искривлению всех энергетических уровней полупроводника в области контакта. В случае контакта уровни Ферми выравниваются, а работы выхода — величины постоянные, при  $A_m > A$  энергия электронов в контактном слое полупроводника больше, чем в остальном объеме. Поэтому в контактном слое дно зоны проводимости поднимается вверх, удаляясь от уровня Ферми. Соответственно происходит и искривление верхнего края валентной зоны, а также донорного уровня.

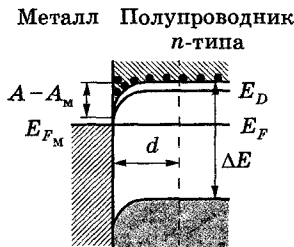
$[A_m, A$  — соответственно работа выхода электрона из металла и полупроводника;  $E_{F_m}$  — уровень Ферми для металла;  $E_F$  — уровень Ферми для полупро-



водника;  $E_D$  — энергетическое расстояние от донорного уровня до дна зоны проводимости;  $\Delta E$  — ширина запрещенной зоны полупроводника;  $d$  — толщина контактного слоя в полупроводнике]

### 6.136 Контакт металла с полупроводником $n$ -типа ( $A_m < A$ )

Если  $A_m < A$ , то при контакте металла с полупроводником  $n$ -типа электроны из металла переходят в полупроводник и образуют в контактном слое полупроводника отрицательный объемный заряд. Следовательно, *контактный слой полупроводника обладает повышенной проводимостью*, т. е. не является запирающим. Рассуждая аналогично, можно показать, что искривление энергетических уровней по сравнению с контактом металл — полупроводник  $n$ -типа ( $A_m > A$ , 6.136) происходит в обратную сторону.

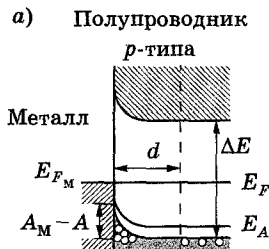


[ $A_m, A$  — соответственно работа выхода электрона из металла и полупроводника;  $E_{F_m}$  и  $E_F$  — уровень Ферми для металла и полупроводника;  $E_D$  — энергетическое расстояние от донорного уровня до дна зоны проводимости;  $\Delta E$  — ширина запрещенной зоны полупроводника;  $d$  — толщина контактного слоя в полупроводнике]

### 6.137 Контакт металла с полупроводником $p$ -типа

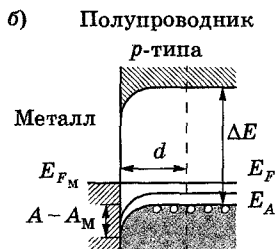
$A_m > A$

Если  $A_m > A$ , то в контактном слое полупроводника  $p$ -типа (рисунок а) наблюдается избыток основных носителей тока — дырок в валентной зоне, и *контактный слой полупроводника обладает повышенной проводимостью*.



$A_m < A$

Если  $A_m < A$ , то в контактном слое полупроводника  $p$ -типа (рисунок б) наблюдается избыток отрицательных ионов акцепторных примесей и недостаток основных носителей тока — дырок в валентной зоне, и *контактный слой полупроводника является запирающим*.



[ $A_m, A$  — соответственно работа выхода электрона из металла и полупроводника;  $E_{F_m}$  и  $E_F$  — уровень Ферми для металла и полупроводника;  $E_A$  — энергетическое расстояние от акцепторного уровня до потолка валентной зоны;  $\Delta E$  — ширина запрещенной зоны полупроводника;  $d$  — толщина контактного слоя в полупроводнике]

### 6.138 Свойства контактного слоя полупроводника

#### Запирающий контактный слой

Возникает при контакте полупроводника  $n$ -типа с меньшей работой выхода, чем у металла 6.136, и при контакте полупроводника  $p$ -типа с большей работой выхода, чем у металла 6.137.

При приложении к контакту внешнего электрического поля он пропускает ток практически только в одном направлении: либо из металла в полупроводник, либо из полупроводника в металл. Это важнейшее свойство запирающего слоя объясняется зависимостью его сопротивления от направления внешнего поля.

**Пропускное и запирающее направления контактного слоя**

Если направления внешнего и контактного полей противоположны, то основные носители тока втягиваются в контактный слой из объема полупроводника; толщина контактного слоя, обедненного основными носителями тока, и его сопротивление уменьшаются. В этом направлении, называемом *пропускным*, электрический ток может проходить через контакт металл — полупроводник. Если внешнее поле совпадает по знаку с контактным, то основные носители тока будут перемещаться от границы с металлом; толщина обедненного слоя возрастает, возрастает и его сопротивление. Очевидно, что в этом случае ток через контакт отсутствует, выпрямитель заперт — это *запирающее* направление. Для запирающего слоя на границе металла с полупроводником *n*-типа ( $A_m > A$ ) пропускным является направление тока из металла в полупроводник, а для запирающего слоя на границе металла с полупроводником *p*-типа ( $A_m < A$ ) — из полупроводника в металл.

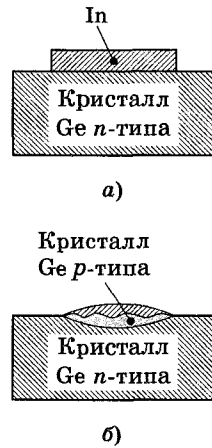
**6.4.10. КОНТАКТ ЭЛЕКТРОННОГО И ДЫРОЧНОГО ПОЛУПРОВОДНИКОВ (p-n-ПЕРЕХОД)**

**6.139** Получение *p-n*-перехода

*p-n*-переход

Граница соприкосновения двух полупроводников, один из которых имеет электронную, а другой — дырочную проводимость.

*p-n*-Переход нельзя осуществить просто механическим соединением двух полупроводников. Обычно области различной проводимости создают либо при выращивании кристаллов, либо при соответствующей обработке кристаллов. Например, на кристалл германия *n*-типа накладывается индиевая «таблетка» (рисунок *а*). Эта система нагревается примерно при 500 °С в вакууме или в атмосфере инертного газа; атомы индия диффундируют на некоторую глубину в германий. Затем расплав медленно охлаждают. Так как германий, содержащий индий, обладает дырочной проводимостью, то на границе закристаллизовавшегося расплава и германия *n*-типа образуется *p-n*-переход (рисунок *б*).



**6.140** Физические процессы в *p-n*-переходе

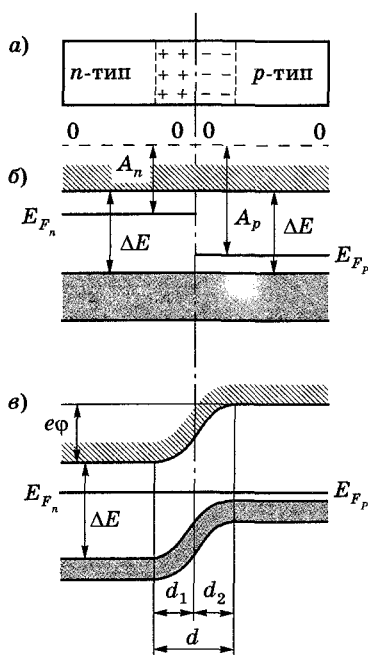
Донорный полупроводник (работа выхода —  $A_n$ , уровень Ферми —  $E_{Fn}$ ) приводится в контакт (рисунок *б*) с акцепторным полупроводником (работа выхода —  $A_p$ , уровень Ферми —  $E_{Fp}$ ). Электроны из *n*-полупроводника, где их концентрация выше, будут диффундировать в *p*-полупроводник, где их концентрация ниже. Диффузия же дырок происходит в обратном направлении — в направлении  $p \rightarrow n$ .

В  $n$ -полупроводнике из-за ухода электронов вблизи границы остается нескомпенсированный положительный объемный заряд неподвижных ионизованных донорных атомов. В  $p$ -полупроводнике из-за ухода дырок вблизи границы образуется отрицательный объемный заряд неподвижных ионизованных акцепторов (рисунок *a*). Эти объемные заряды образуют у границы двойной электрический слой, поле которого, направленное от  $n$ -области к  $p$ -области, препятствует дальнейшему переходу электронов в направлении  $n \rightarrow p$  и дырок в направлении  $p \rightarrow n$ . Если концентрации доноров и акцепторов в полупроводниках  $n$ - и  $p$ -типа одинаковы, то толщины слоев  $d_1$  и  $d_2$  (рисунок *в*) равны ( $d_1 = d_2$ ).

При определенной толщине  $p$ - $n$ -перехода наступает равновесное состояние, характеризуемое выравниванием уровней Ферми для обоих полупроводников (рисунок *б*). В области  $p$ - $n$ -перехода энергетические зоны искривляются, в результате чего возникают потенциальные барьеры как для электронов, так и для дырок. Высота потенциального барьера  $\varphi$  определяется первоначальной разностью положений уровня Ферми в обоих полупроводниках. Все энергетические уровни акцепторного полупроводника подняты относительно уровней донорного полупроводника на высоту, равную  $\varphi$ , причем подъем происходит на толщине двойного слоя  $d$ .

Толщина  $d \approx 10^{-6} - 10^{-7}$  м, а контактная разность потенциалов — десятые доли вольт. Носители тока способны преодолеть такую разность потенциалов лишь при температуре в несколько тысяч градусов, т. е. при обычных температурах равновесный контактный слой является *запирающим* (характеризуется повышенным сопротивлением).

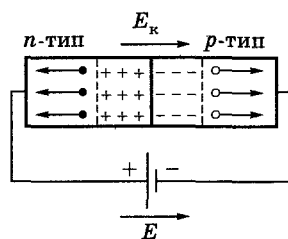
[ $\Delta E$  — ширина запрещенной зоны полупроводников;  $E_{Fn}$  и  $E_{Fp}$  — соответственно уровни Ферми для  $n$ - и  $p$ -полупроводников;  $A_n$  и  $A_p$  — работы выхода электрона для  $n$ - и  $p$ -полупроводников,  $d$  — толщина  $p$ - $n$ -перехода;  $\varphi$  — контактная разность потенциалов]



## 6.141 Проводимость $p$ - $n$ -перехода

### Запирающее (обратное) направление внешнего электрического поля

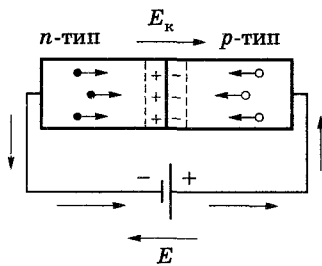
Направление внешнего поля, расширяющего запирающий слой **6.140**. Если приложенное к  $p$ - $n$ -переходу внешнее электрическое поле направлено от  $n$ -полупроводника к  $p$ -полупроводнику, т. е. совпадает с полем контактного слоя, то оно вызывает движение электронов в  $n$ -полупроводнике и дырок в  $p$ -полупроводнике от границы  $p$ - $n$ -перехода в противоположные стороны. В результате запирающий слой расширяется и его сопротивление возрастает. В этом направлении электрический ток через  $p$ - $n$ -переход практически не проходит.





## Пропускное (прямое) направление внешнего электрического поля

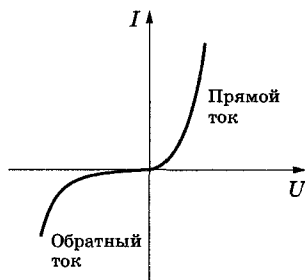
Направление внешнего поля, сужающего запирающий слой **6.141**. Если приложенное к  $p-n$ -переходу внешнее электрическое поле направлено противоположно полю контактного слоя, то оно вызывает движение электронов в  $n$ -полупроводнике и дырок в  $p$ -полупроводнике к границе  $p-n$ -перехода навстречу друг другу. В этой области они рекомбинируют, толщина контактного слоя и его сопротивление уменьшаются. Следовательно, в этом направлении электрический ток проходит сквозь  $p-n$ -переход в направлении от  $p$ -полупроводника к  $n$ -полупроводнику.



**Вывод.**  $p-n$ -Переход, подобно контакту металл—полупроводник **6.138**, обладает *односторонней (вентильной) проводимостью*.

### 6.142 Вольт-амперная характеристика $p-n$ -перехода

При пропускном (прямом) напряжении внешнее электрическое поле способствует движению основных носителей тока к границе  $p-n$ -перехода **6.141**. В результате толщина контактного слоя уменьшается и сопротивление перехода (тем сильнее, чем больше напряжение), а сила тока становится большой (правая ветвь на рисунке). Это направление тока называется *прямым*.



При запирающем (обратном) напряжении внешнее электрическое поле препятствует движению основных носителей тока к границе  $p-n$ -перехода **6.141** и способствует движению неосновных носителей тока, концентрация которых в полупроводниках невелика. Это приводит к увеличению толщины контактного слоя, обедненного основными носителями тока. Соответственно увеличивается и сопротивление перехода. Поэтому в данном случае через  $p-n$ -переход протекает только небольшой ток (он называется *обратным*), полностью обусловленный неосновными носителями тока (левая ветвь рисунка). Быстрое возрастание этого тока означает пробой контактного слоя и его разрушение.

## 6.4.11. ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЕ ДИОДЫ И ТРИОДЫ (ТРАНЗИСТОРЫ)

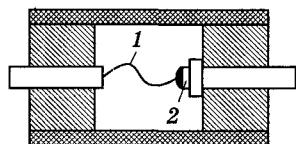
### 6.143 Полупроводниковые (кристаллические) диоды

#### Полупроводниковый диод

Устройство, содержащее один  $p-n$ -переход.

#### Точечный диод

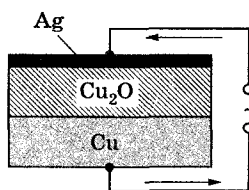
**Пример.** В точечном германиевом диоде тонкая вольфрамовая проволока 1 прижимается к  $n$ -германию 2 острием, покрытым алюминием. Если через диод в прямом направлении пропустить кратковременный импульс тока, то при этом резко повышается диффузия Al в



Ge и образуется слой германия, обогащенный алюминием и обладающий  $p$ -проводимостью. На границе этого слоя образуется  $p$ - $n$ -переход, обладающий высоким коэффициентом выпрямления. Благодаря малой емкости контактного слоя точечные диоды применяются в качестве детекторов (выпрямителей) высокочастотных колебаний вплоть до сантиметрового диапазона длин волн.

### Плоскостной диод

**Пример.** В плоскостном меднозакисном (купроксном) диоде на медную пластину с помощью химической обработки наращивается слой закиси меди  $\text{Cu}_2\text{O}$ , который покрывается слоем серебра. Серебряный электрод служит только для включения выпрямителя в цепь. Часть слоя  $\text{Cu}_2\text{O}$ , прилегающая к меди и обогащенная ею, обладает электронной проводимостью, а часть слоя  $\text{Cu}_2\text{O}$ , прилегающая к Ag и обогащенная (в процессе изготовления выпрямителя) кислородом, — дырочной проводимостью. Таким образом, в толще закиси меди образуется запирающий слой с пропускным направлением тока от  $\text{Cu}_2\text{O}$  к Cu ( $p \rightarrow n$ ).



## 6.144 Полупроводниковые триоды (транзисторы)

### Полупроводниковый триод

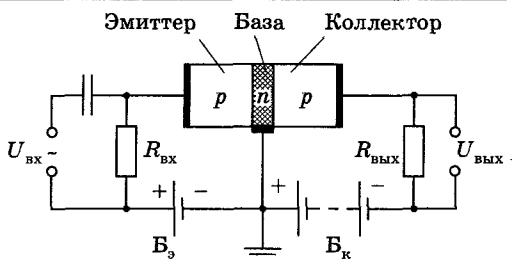
Устройство, использующее свойства  $p$ - $n$ -переходов для усиления и генерирования электрических колебаний.

### Точечные и плоскостные триоды

Точечные триоды значительно усиливают напряжение, но их выходные мощности малы из-за опасности перегрева (например, верхний предел рабочей температуры точечного германиевого триода лежит в пределах  $50$ — $80$  °C). Плоскостные триоды являются более мощными. Они могут быть типа  $p$ - $n$ - $p$  и типа  $n$ - $p$ - $n$  в зависимости от чередования областей с различной проводимостью.

### Плоскостной триод

**Пример.** В случае плоскостного триода  $p$ - $n$ - $p$  (триода на основе  $n$ -полупроводника) рабочие «электроды» триода, которыми являются *база* (средняя часть транзистора), *эмиттер* и *коллектор* (прилегающие к базе с обеих сторон области с иным типом проводимости), включаются в схему с помощью невыпрямляющих контактов — металлических проводников. Между эмиттером и базой прикладывается постоянное смещающее напряжение в прямом направлении, а между базой и коллектором — постоянное смещающее напряжение в обратном направлении. Усиленное переменное напряжение подается на входное сопротивление  $R_{вх}$ , а усиленное — снимается с выходного сопротивления  $R_{вых}$ .



Протекание тока в цепи эмиттера обусловлено в основном движением дырок (они являются основными носителями тока) и сопровождается их «впрыскиванием» — *инжекцией* — в область базы. Проникшие в базу

дырки диффундируют по направлению к коллектору, причем при небольшой толщине базы значительная часть инжектированных дырок достигает коллектора. Здесь дырки захватываются полем, действующим внутри перехода (притягиваются к отрицательно заряженному коллектору), вследствие чего изменяется ток коллектора. Следовательно, всякое изменение тока в цепи эмиттера вызывает изменение тока в цепи коллектора.

Прикладывая между эмиттером и базой переменное напряжение, получаем в цепи коллектора переменный ток, а на выходном сопротивлении — переменное напряжение. Величина усиления зависит от свойств  $p-n$ -переходов, нагрузочных сопротивлений и напряжения батареи  $B_k$ . Обычно  $R_{\text{вых}} \gg R_{\text{вх}}$ , поэтому  $U_{\text{вых}}$  значительно превышает входное напряжение  $U_{\text{вх}}$  (усиление может достигать 10 000). Так как мощность переменного тока, выделяемая в  $R_{\text{вых}}$ , может быть больше, чем расходуемая в цепи эмиттера, то транзистор дает и усиление мощности. Эта усиленная мощность появляется за счет источника тока, включенного в цепь коллектора.

Таким образом, транзистор, подобно электронной лампе, дает усиление и напряжения, и мощности. Если в лампе анодный ток управляется напряжением на сетке, то в транзисторе ток коллектора, соответствующий анодному току лампы, управляется напряжением на базе.

## 7. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

### 7.1. Элементы физики атомного ядра

#### 7.1.1. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И СВОЙСТВА АТОМНЫХ ЯДЕР

##### 7.1 Атомное ядро и его состав

###### Атомное ядро

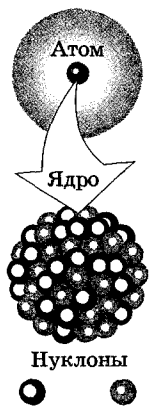
Положительно заряженная центральная часть атома, в которой сосредоточена вся масса атома.

###### Состав атомных ядер

Атомное ядро любого химического элемента (кроме атома водорода) состоит из протонов и нейтронов. Протон и нейтрон — два зарядовых состояния ядерной частицы, называемых *нуклоном*.

Характеристики нуклонов	Протон (e)	Нейтрон (n)
Электрический заряд	$1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл	0
Масса	$1,6726 \cdot 10^{-27}$ кг	$1,6749 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса в $m_e$	$\approx 1836$	$\approx 1839$
Спин	$\hbar/2$	$\hbar/2$

[ $m_e$  — масса электрона;  $\hbar = \hbar/2\pi$  — постоянная Планка; протоны и нейтроны являются фермионами. Наряду с термином «атомное ядро» используется *нуклид* (общее название атомных ядер, отличающихся числом протонов и нейтронов)]



Протон Нейтрон

##### 7.2 Описание атомного ядра

Характеристика	Обозначение	Определение
Зарядовое число	$Z$	Равно числу протонов в ядре, совпадает с порядковым номером химического элемента в Периодической системе элементов
Массовое число	$A = Z + N$	Равно числу нуклонов в ядре (числу протонов $Z$ и нейтронов $N$ )
Заряд ядра	$+Ze$	Поскольку атом нейтрален, то заряд ядра определяет и число электронов в атоме
Символическая запись ядер	$  \begin{array}{c}  A \\  \text{X} \\  Z  \end{array}  $	<p><b>Пример:</b></p> <p>Массовое число (<math>A</math>) показывает, что в ядре 12 нуклонов.</p> <p>Зарядовое число (<math>Z</math>) показывает, что 6 из них — протоны.</p> <p>В ядре 6 нейтронов.</p> <p>Число нейтронов (<math>N</math>) = <math>A - Z</math></p>

## 7.3 Изотопы, изобары, изотоны

### Атомные ядра

Изотопы	Изобары	Изотоны
Атомные ядра одного и того же элемента с различным числом нейтронов	Атомные ядра различных элементов с одинаковым массовым числом	Атомные ядра различных элементов с одинаковым числом нейтронов
Изотопы имеют одинаковые $Z$ , но разные $A$	Изобары имеют одинаковые $A$ , но разные $Z$	Изотоны имеют одинаковые $N$ , но разные $Z$ и $A$

[ $Z$  — атомный номер (число протонов в ядре);  $A$  — массовое число (число нуклонов в ядре);  $N$  — число нейтронов в ядре]

## 7.4 Примеры нуклидов: изотопы, изобары, изотоны

	Примеры	Число протонов ( $Z$ )	Число нейтронов ( $N$ )	Число нуклонов ( $A$ )
Изотопы	${}^9_5\text{B}$	5	4	9
	${}^{10}_5\text{B}$	5	5	10
	${}^{11}_5\text{B}$	5	6	11
Изобары	${}^{210}_{81}\text{Tl}$	81	129	210
	${}^{210}_{82}\text{Pb}$	82	128	210
	${}^{210}_{83}\text{Bi}$	83	127	210
Изотоны	${}^{13}_6\text{C}$	6	7	13
	${}^{14}_7\text{N}$	7	7	14
	${}^{15}_8\text{O}$	8	7	15

### 7.1.2. ЭНЕРГИЯ СВЯЗИ ЯДРА. СПИН ЯДРА И МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ

## 7.5 Энергия связи ядра. Дефект массы ядра

### Энергия связи ядра

$$E_{\text{св}} = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}]c^2,$$

$$E_{\text{св}} = [Zm_{\text{H}} + (A - Z)m_n - m]c^2$$

Энергия, необходимая для расщепления ядра на отдельные нуклоны.

[ $m_p$ ,  $m_n$ ,  $m_{\text{я}}$  — соответственно масса протона, нейтрона и ядра;  $m_{\text{H}} = m_p + m_e$  — масса атома водорода  ${}^1_1\text{H}$ ;  $m$  — масса атома]

◆ В таблицах обычно приводятся не массы  $m_{\text{я}}$  ядер, а массы  $m$  атомов. Так как  $m_{\text{H}}$  больше  $m_p$  на величину  $m_e$ , то во второй формуле первый член в квадратных скобках включает в себя массу  $Z$  электронов. Но масса атома отличается от массы ядра как раз на  $Z$  электронов, поэтому вычисления по обеим формулам приводят к одинаковым результатам.

### Дефект массы ядра

$$\Delta m = [Zm_p + (A - Z)m_n] - m_{\text{я}}$$

Величина, на которую уменьшается масса всех нуклонов при образовании из них атомного ядра.

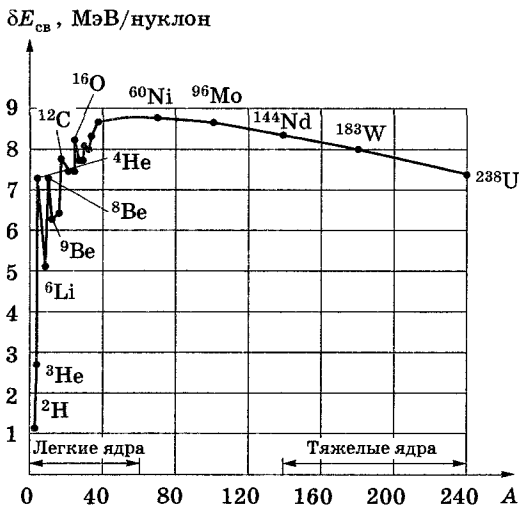
## 7.6 Удельная энергия связи

Удельная энергия связи ( $\delta E_{св}$ ) — энергия связи, приходящаяся на один нуклон.

$\delta E_{св}$  характеризует устойчивость (прочность) атомных ядер: чем больше удельная энергия связи, тем устойчивее ядро. Для большинства ядер  $\delta E_{св} \approx 6-8$  МэВ/нуклон; наиболее стабильные ядра с  $A = 50-60$ ; по мере увеличения  $A$  удельная энергия связи постепенно уменьшается и составляет, например, для  $^{238}\text{U}$  7,6 МэВ/нуклон. Это уменьшение обусловлено тем, что с возрастанием числа протонов в ядре увеличивается и энергия их кулоновского отталкивания.

При  $A \leq 12$   $\delta E_{св}$  претерпевает ряд скачков («пики» характерны для ядер с четным числом протонов и нейтронов ( $^4\text{He}$ ,  $^{12}\text{C}$ ,  $^{16}\text{O}$ ), а минимумы — с нечетным ( $^3\text{Li}$ ,  $^{10}\text{B}$ ,  $^{14}\text{N}$ )).

**Вывод.** Из зависимости удельной энергии связи от массовых чисел следует, что энергетически выгодны следующие процессы: 1) деление тяжелых ядер на более легкие; 2) слияние легких ядер в более тяжелые. При обоих процессах выделяется огромное количество энергии; эти процессы в настоящее время осуществлены практически (реакции деления и термоядерные реакции).



## 7.7 Спин ядра и его магнитный момент

### Собственный момент импульса ядра (спин ядра)

Складывается из спинов нуклонов и орбитальных моментов импульса нуклонов (обусловлены движением нуклонов относительно общего центра масс ядра).

### Квантование

$$\vec{L}_я = \hbar \sqrt{I(I+1)},$$

$$I = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

$I$  — спиновое ядерное квантовое число (его часто называют спином ядра). Поскольку спиновое квантовое число нуклона  $s = 1/2$ , то ядра с четными  $A$  имеют целые  $I$ , с нечетными — полуцелые  $I$ .

### Магнитный момент атомного ядра

$$\vec{\mu}_{я} = g_я \vec{L}_я$$

Взаимодействие магнитного момента ядра с магнитным полем электронов в атомах приводит к *сверхтонкой структуре*: во внешнем магнитном поле наблюдается расщепление уровней энергии атома на близко расположенные подуровни.

### Ядерный магнетон

$$\mu_я = \frac{e\hbar}{2m_p}$$

Единица магнитных моментов ядер. Ядерный магнетон в  $m_p/m_e \approx 1836$  раз магнетона Бора [3.129](#), поэтому магнитные свойства атомов в основном определяются магнитными свойствами его электрона.

$[g_я]$  — ядерное гиромагнитное отношение;  $e$  — элементарный электрический заряд;  $\hbar = h/2\pi$  — постоянная Планка;  $m_p$  — масса протона]

Неоптический метод определения магнитных моментов ядер. Если на вещество, находящееся в сильном постоянном магнитном поле, действовать слабым переменным радиочастотным магнитным полем, то при частотах, соответствующих частотам переходов между ядерными подуровнями, возникает резкий (резонансный) максимум поглощения. Ядерный магнитный резонанс обусловлен происходящими под влиянием переменного магнитного поля квантовыми переходами между ядерными подуровнями. Точность метода задается точностью измерения напряженности постоянного магнитного поля и резонансной частоты, так как по их значениям вычисляются магнитные моменты ядер. Так как для измерения этих величин применяются прецизионные методы, то  $p_{\text{мя}}$  можно определять с высокой точностью (до шести знаков).

### 7.1.3. ЯДЕРНЫЕ СИЛЫ. МОДЕЛИ ЯДРА

#### 7.8 Ядерные силы и их свойства

##### Ядерные силы

Особые специфические силы, действующие в ядре между нуклонами. Относятся к классу сильных взаимодействий.

##### Основные свойства ядерных сил

- ◆ *Являются силами притяжения;*
- ◆ *являются короткодействующими:* действие ядерных сил проявляется только тогда, когда расстояние между двумя нуклонами  $\sim 10^{-15}$  м; с увеличением расстояния они быстро уменьшаются до нуля, а при расстояниях, меньших их радиуса действия, примерно в 100 раз больше кулоновских сил, действующих между протонами (на том же расстоянии);
- ◆ *обладают зарядовой независимостью:* ядерные силы двух нуклонов не зависят от их электрических зарядов. Силы, действующие между двумя протонами, или двумя нейтронами, или между протоном и нейтроном, за вычетом кулоновских сил одинаковы. Это указывает на *неэлектрическую природу* ядерных сил;
- ◆ *имеют способность к насыщению:* каждый нуклон в ядре взаимодействует только с ограниченным числом ближайших к нему нуклонов. Это свойство проявляется в том, что удельная энергия связи нуклонов в ядре (за исключением легких ядер) с увеличением числа нуклонов не растет, оставаясь приблизительно постоянной;
- ◆ *зависят от взаимной ориентации спинов взаимодействующих нуклонов:* протон и нейтрон, например, образуют дейтрон ( ${}^2_1\text{H}$ ) только при параллельной ориентации их спинов;
- ◆ *не являются центральными силами:* их нельзя представить в виде сил, действующих от одного центра сил. Это обусловлено наличием спина взаимодействующих частиц.

Сложный характер ядерных сил и трудность точного решения уравнений движения всех нуклонов ядра не позволили до настоящего времени разработать единую последовательную теорию атомного ядра. Поэтому рассматривают приближенные ядерные модели, в которых ядро заменяется некоторой модельной системой, довольно хорошо описывающей только определенные свойства ядра и допускающей более или менее простую математическую трактовку.

## 7.9 Некоторые модели атомного ядра

Название модели	Пояснение модели	Что объясняет модель	Трудности в объяснении
Капельная модель ядра [Н. Бор, Я. Френкель (1936)]	Трактует ядро как каплю электрически заряженной жидкости (с плотностью, равной ядерной), подчиняющуюся законам квантовой механики	Механизм ядерных реакций; реакции деления; энергию связи нуклонов в ядре	Повышенной устойчивости некоторых ядер
Оболочечная модель ядра [Гепперт-Майер, Йенсен (1940—1950)]	Предполагает распределение нуклонов в ядре по дискретным энергетическим уровням (оболочкам), заполняемым нуклонами, согласно принципу Паули, и связывает устойчивость ядер с заполнением этих уровней	Спины; магнитные моменты атомов; различную устойчивость атомных ядер; периодичность свойств	Не способна последовательно количественно описать свойства ядер

### 7.1.4. РАДИОАКТИВНОСТЬ. ЗАКОН РАДИОАКТИВНОГО РАСПАДА

#### 7.10 Радиоактивное излучение и его виды

Беккерель (1896) при изучении люминесценции солей урана обнаружил *самопроизвольное* испускание ими излучения неизвестной природы, которое действовало на фотопластинку, ионизировало воздух, проникало сквозь тонкие металлические пластинки, вызывало люминесценцию ряда веществ.

Мария и Пьер Кюри обнаружили, что беккерелевское излучение свойственно не только урану, но и многим другим тяжелым элементам, таким, как торий и актиний. Они показали, что урановая смоляная обманка (руда, из которой добывается металлический уран) испускает излучение, интенсивность которого во много раз превышает интенсивность излучения урана. Удалось выделить два новых элемента — носителя беккерелевского излучения: полоний  ${}_{84}^{210}\text{Po}$  и радий  ${}_{88}^{226}\text{Ra}$ . Обнаруженное излучение было названо *радиоактивным излучением*.

#### Виды радиоактивного излучения

**$\alpha$ -излучение** Отклоняется электрическим и магнитным полями, обладает высокой ионизирующей способностью и малой проникающей способностью. Представляет собой поток ядер гелия; заряд  $\alpha$ -частицы равен  $+2e$ , а масса совпадает с массой ядра изотопа гелия  ${}^4_2\text{He}$ . По отклонению  $\alpha$ -частиц в электрическом и магнитном полях был определен их удельный заряд  $Q/m_\alpha$ , значение которого подтвердило правильность представлений об их природе.

**$\beta$ -излучение** Отклоняется электрическим и магнитным полями; его ионизирующая способность значительно меньше (примерно на два порядка), а проникающая способность гораздо больше, чем у  $\alpha$ -частиц. Представляет собой поток быстрых электронов (это вытекает из определения их удельного заряда).

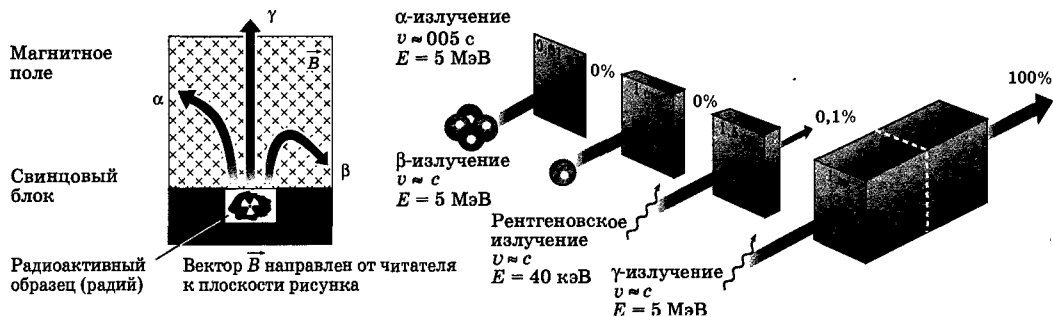
**$\gamma$ -излучение** Не отклоняется электрическим и магнитным полями, обладает относительно слабой ионизирующей способностью и очень большой проникающей способностью, при прохождении через кристаллы обнаруживает дифракцию. Представляет собой коротковолновое электромагнитное



излучение с чрезвычайно малой длиной волны  $\lambda < 10^{-10}$  м и вследствие этого — ярко выраженными корпускулярными свойствами, т. е. является потоком частиц —  $\gamma$ -квантов (фотонов).

## Отклонение радиоактивного излучения в магнитном поле

Сравнение проникающей способности  $\alpha$ -,  $\beta$ - и  $\gamma$ -излучения, рентгеновского излучения в алюминии.



## 7.11 Радиоактивность: естественная и искусственная

### Радиоактивность

Способность некоторых атомных ядер самопроизвольно (спонтанно) превращаться в другие ядра с испусканием различных частиц.

**естественная**

Наблюдается у неустойчивых изотопов, существующих в природе.

**искусственная**

Наблюдается у изотопов, синтезированных посредством ядерных реакций в лабораторных условиях.

◆ Способ образования радиоактивного изотопа не влияет на его свойства и законы радиоактивного распада. Радиоактивные свойства элемента обусловлены лишь структурой атомного ядра.

## 7.12 Закон радиоактивного распада

### Радиоактивный распад (распад)

Естественное радиоактивное превращение ядер, происходящее самопроизвольно.

### Особенности радиоактивного распада

*Радиоактивный распад — статистическое явление, поэтому выводы, следующие из законов радиоактивного распада, имеют вероятностный характер; например, нельзя сказать, когда данное ядро распадется, но можно предсказать, какова вероятность его распада за рассматриваемый промежуток времени.*

### Постоянная радиоактивного распада

Вероятность распада ядра за единицу времени, равная доле ядер, распадающихся за 1 с.

## Закон радиоактивного распада

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

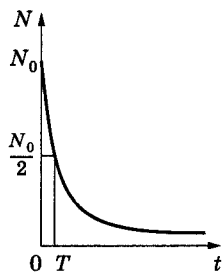
В силу самопроизвольности радиоактивного распада можно считать, что число ядер  $dN$ , распавшихся в среднем за интервал времени от  $t$  до  $t + dt$ , пропорционально промежутку времени  $dt$  и числу  $N$  ядер, не распавшихся к моменту времени  $t$ :

$$dN = -\lambda N dt,$$

где знак минус указывает, что общее число радиоактивных ядер в процессе распада уменьшается.

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt; \int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt, \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t, N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

[ $N$  — число нераспавшихся ядер к моменту времени  $t$ ;  $N_0$  — начальное число нераспавшихся ядер (в момент времени  $t = 0$ );  $\lambda$  — постоянная радиоактивного распада]



## Период полураспада ( $T_{1/2}$ )

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}$$

Промежуток времени, за который в среднем число нераспавшихся ядер уменьшается вдвое.

## Среднее время жизни радиоактивного ядра

$$\tau = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} \lambda N t dt = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} \lambda N_0 t e^{-\lambda t} dt = \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

## Активность нуклида

Число распадов, происходящее с ядрами образца в 1 с:  $A = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N$ .

## Единица активности

Беккерель  
(Бк)

1 Бк — активность нуклида, при которой за 1 с происходит один акт распада.

## 7.13 Периоды полураспада некоторых нуклидов

Нуклид	Период полураспада	Нуклид	Период полураспада
${}_{92}^{238}\text{U}$	$4,5 \cdot 10^9$ лет	${}_{90}^{234}\text{Th}$	24,1 сут
${}_{90}^{230}\text{Th}$	$8 \cdot 10^4$ лет	${}_{84}^{218}\text{Po}$	3,05 мин
${}_{88}^{226}\text{Ra}$	1620 лет	${}_{84}^{212}\text{Po}$	$3 \cdot 10^{-7}$ с

## 7.1.5. ПРАВИЛА СМЕЩЕНИЯ. РАДИОАКТИВНЫЕ СЕМЕЙСТВА

### 7.14 Правила смещения для $\alpha$ - и $\beta$ -распадов

#### Материнское ядро

Атомное ядро, испытывающее радиоактивный распад.

#### Дочернее ядро

Атомное ядро, возникающее в результате радиоактивного распада.

## Правила смещения

Правила, позволяющие установить, какое ядро возникает в результате распада данного материнского ядра.

$\alpha$ -распад	$\beta^-$ -распад	$\beta^+$ -распад
${}^A_Z X' \rightarrow {}^A_{Z-2} Y + {}^4_2 \text{He}$	${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + {}^0_{-1} e$	${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + {}^0_{+1} e$
Массовое число дочернего ядра уменьшается на 4, а зарядовое ядро — на 2	Массовое число дочернего ядра не изменяется, а зарядовое число увеличивается на единицу	Массовое число дочернего ядра не изменяется, а зарядовое число уменьшается на единицу

[ ${}^A_Z X$  — материнское ядро; Y — символ дочернего ядра;  ${}^0_{-1} e$  и  ${}^0_{+1} e$  — соответственно символическая запись электрона и позитрона;  ${}^4_2 \text{He}$  —  $\alpha$ -частица]

## Законы сохранения зарядового и массового чисел

- ◆ Сумма зарядовых чисел возникающих ядер и частиц равна зарядовому числу исходного ядра.
- ◆ Сумма массовых чисел возникающих ядер и частиц равна массовому числу исходного ядра.
- ◆ Правила смещения — следствие законов сохранения зарядового и массового чисел.

## 7.15 Примеры трех типов радиоактивного распада

$\alpha$ -распад радия	$\beta^-$ -распад углерода	$\beta^+$ -распад фосфора
${}^{226}_{88} \text{Ra} \xrightarrow{\alpha} {}^{222}_{86} \text{Rn} + {}^4_2 \text{He}$	${}^{14}_6 \text{C} \xrightarrow{\beta^-} {}^{14}_7 \text{N} + {}^0_{-1} e + {}^0_0 \bar{\nu}$	${}^{30}_{15} \text{P} \xrightarrow{\beta^+} {}^{30}_{14} \text{Si} + {}^0_{+1} e + {}^0_0 \nu$

## 7.16 Радиоактивные семейства

### Радиоактивные семейства

Совокупность элементов, образующих цепочку, или ряд, радиоактивных превращений, заканчивающихся стабильным элементом.

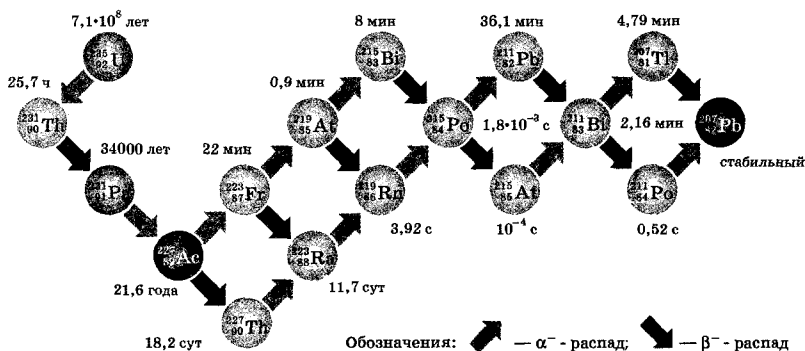
Существует четыре различных радиоактивных семейства, для каждого из которых массовые числа задаются одной из следующих формул:

$$A = 4n, 4n + 1, 4n + 2, 4n + 3,$$

где  $n$  — целое положительное число. Семейства называются по наиболее долгоживущему (с наибольшим периодом полураспада) «родоначальнику»: семейства тория (от  $^{232}_{90}\text{Th}$ ), нептуния (от  $^{237}_{93}\text{Np}$ ), урана (от  $^{235}_{92}\text{U}$ ) и актиния (от  $^{235}_{89}\text{Ac}$ ).

Конечными нуклидами соответственно являются  $^{208}_{82}\text{Pb}$ ;  $^{209}_{83}\text{Bi}$ ,  $^{206}_{82}\text{Pb}$ ,  $^{207}_{82}\text{Pb}$ , т. е. единственное семейство нептуния (искусственно-радиоактивные ядра) заканчивается нуклидом Bi, а все остальные (естественно-радиоактивные ядра) — нуклидами Pb.

**Пример:** радиоактивное семейство урана-235



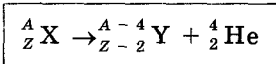
## 7.1.6. ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАДИОАКТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ

### 7.17 Описание $\alpha$ -распада

#### $\alpha$ -распад

Распад атомных ядер, сопровождающийся испусканием  $\alpha$ -частицы. Заряд  $\alpha$ -частицы равен  $+2e$ , масса совпадает с массой ядра изотопа гелия  $^4_2\text{He}$ .

#### Правило смещения для $\alpha$ -распада



Примеры  $\alpha$ -распада



#### Условие для протекания $\alpha$ -распада

Масса материнского ядра должна быть больше суммы масс дочернего ядра и  $\alpha$ -частицы.

#### Механизм образования $\alpha$ -частиц

$\alpha$ -Частицы образуются в момент радиоактивного распада при встрече движущихся внутри ядра двух протонов и двух нейтронов.

#### Каким ядрам свойственен $\alpha$ -распад?

$\alpha$ -Распад — свойство тяжелых ядер ( $A > 200, Z > 82$ ). Только небольшая группа  $\alpha$ -активных ядер приходится на область с  $A = 140 \div 160$  (редкие земли).

Колеблются в пределах от  $1,4 \cdot 10^7$  до  $2 \cdot 10^7$  м/с, что соответствует энергиям от 4 до 8,8 МэВ.

### Энергетический спектр $\alpha$ -частиц

Обнаруживает «тонкую структуру», т. е. испускается несколько групп  $\alpha$ -частиц, причем в пределах каждой группы их энергии практически постоянны. Дискретный спектр  $\alpha$ -частиц свидетельствует о том, что атомные ядра обладают дискретными энергетическими уровнями.

### Закон Гейгера—Нэттола

$$\ln \lambda = A + B \ln R_\alpha$$

С увеличением постоянной распада  $\lambda$  радиоактивного элемента возрастает пробег  $R_\alpha$  испускаемых им  $\alpha$ -частиц (в воздухе).

[ $A$  и  $B$  — эмпирические константы;  $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$  ( $T_{1/2}$  — период полураспада);  $R_\alpha$  — пробег  $\alpha$ -частицы — расстояние, проходимое частицей в веществе до ее полной остановки]

## 7.18 Квантово-механическое объяснение $\alpha$ -распада

$\alpha$ -Частицы до 8,8 МэВ испытывают со стороны ядер кулоновские силы, откуда делается вывод, что ядро окружено потенциальным барьером высотой не менее 8,8 МэВ. Тогда как испускаются  $\alpha$ -частицы с энергией 4 МэВ?

По представлениям квантовой механики, ядро является для  $\alpha$ -частицы потенциальным барьером, высота  $U$  которого больше, чем  $E$  — энергия  $\alpha$ -частицы в ядре. Вылет  $\alpha$ -частицы из ядра возможен благодаря туннельному эффекту — проникновению  $\alpha$ -частицы сквозь потенциальный барьер. Всегда имеется отличия от нуля вероятность того, что частица с энергией, меньшей высоты потенциального барьера, пройдет сквозь него, т. е. действительно из  $\alpha$ -радиоактивного ядра  $\alpha$ -частицы могут вылететь с энергией, меньшей высоты потенциального барьера.

### Коэффициент прозрачности для барьера произвольной формы

$$D = D_0 \exp \left[ -\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m_\alpha(U-E)} dx \right]$$

[ $m_\alpha$  — масса  $\alpha$ -частицы;  $U$  — высота потенциального барьера;  $E$  — энергия частицы; пределы интегрирования представляют собой границы барьера;  $\hbar = h/2\pi$  — постоянная Планка]

### Анализ коэффициента прозрачности

Коэффициент прозрачности  $D$  тем больше (следовательно, тем меньше период полураспада), чем меньший по высоте ( $U$ ) и ширине барьер находится на пути  $\alpha$ -частицы. Кроме того, при одной и той же потенциальной кривой барьер на пути частицы тем меньше, чем больше ее энергия  $E$ . Таким образом, качественно подтверждается закон Гейгера—Нэттола.

## 7.19 Три типа $\beta$ -распада

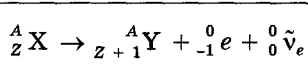
### $\beta$ -распад

Самопроизвольный процесс превращения радиоактивного ядра в другое ядро (массовое число его не изменяется, а зарядовое число изменяется на  $\Delta Z = \pm 1$ ) с испусканием электрона (позитрона) и антинейтрино (нейтрино).

$\beta$ -Излучение отклоняется электрическим и магнитным полями; его ионизирующая способность значительно меньше, а проникающая способность гораздо больше, чем у  $\alpha$ -частиц; оно сильно рассеивается веществом.

## Типы $\beta$ -распадов

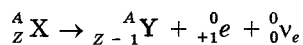
### $\beta^-$ -распад



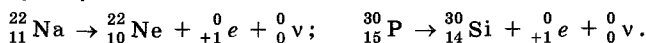
Примеры:



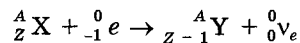
### $\beta^+$ -распад



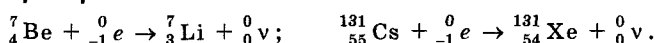
Примеры:



### Электронный захват (e-захват, или К-захват)



Примеры:



[ ${}_{-1}^0 e$  — символическое обозначение электрона;  ${}_0^0 \tilde{\nu}_e$  — электронное антинейтрино (антинейтрино, сопутствующее испусканию электрона);  ${}_{+1}^0 e$  — символическое обозначение позитрона (позитрон — античастица по отношению к электрону);  ${}_0^0 \nu_e$  — электронное нейтрино (нейтрино, сопутствующее испусканию позитрона)]

## 7.20 Объяснение механизма $\beta^-$ -распада ( ${}_Z^A X \rightarrow {}_Z^A Y + {}_{-1}^0 e + {}_0^0 \tilde{\nu}_e$ )

#### Трудности при трактовке $\beta$ -распада

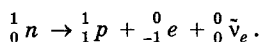
#### Ответы на поставленные вопросы

Согласно правилу смещения,  ${}_Z^A X \rightarrow {}_{Z-1}^A Y + {}_{+1}^0 e$ , число нуклонов в ядре не изменяется ( $A = \text{const}$ ), поэтому не должен изменяться и спин ядра. Однако выброс электрона должен изменить спин ядра на  $\hbar/2$

Паули предположил, что при  $\beta^-$ -распаде вместе с электроном испускается еще одна нейтральная частица — *нейтрино*. Нейтрино имеет нулевой заряд, спин  $1/2$  (в единицах  $\hbar$ ) и нулевую (скорее  $< 10^{-4} m_e$ ) массу покоя; обозначается  ${}_0^0 \nu_e$ . Впоследствии оказалось, что при  $\beta^-$ -распаде испускается не нейтрино, а *антинейтрино* (античастица по отношению к нейтрино; обозначается  ${}_0^0 \tilde{\nu}_e$ ). Введение нейтрино (антинейтрино) позволяет объяснить кажущееся несохранение спина, поскольку спин нейтрино (антинейтрино) равен  $\hbar/2$

В процессе  $\beta^-$ -распада выбрасываются электроны, а в ядре электронов нет

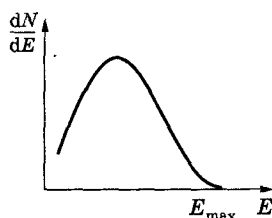
$\beta^-$ -Электрон рождается в результате процессов, происходящих внутри ядра: один из нейтронов  $\beta^-$ -активного ядра превращается в протон с одновременным образованием электрона и вылетом антинейтрино:



В этом процессе выполняются законы сохранения зарядовых чисел, импульса и массовых чисел. Кроме того, данное превращение энергетически возможно, так как масса нейтрона превышает массу атома водорода, т. е. протона и электрона вместе взятых. Данной разности в массах соответствует энергия, равная 0,782 МэВ. За счет этой энергии может происходить самопроизвольное превращение нейтрона в протон; энергия распределяется между электроном и антинейтрино

Необходимо объяснить непрерывность энергетического спектра испускаемых электронов (см. рисунок). Каким образом  $\beta^-$ -активные ядра, обладающие до и после распада вполне определенными энергиями, могут выбрасывать электроны от 0 до  $E_{\text{max}}$ ?

Сплошной спектр  $\beta^-$ -частиц обусловлен распределением энергии между электроном и антинейтрино, причем сумма энергий обеих частиц равна  $E_{\text{max}}$ . В одних актах распада большую энергию получает антинейтрино, в других — электрон; в граничной точке кривой на рисунке, где энергия электрона равна  $E_{\text{max}}$ , вся энергия распада уносится электроном, а энергия антинейтрино равна нулю



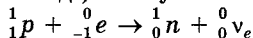
## 7.21 Объяснение механизма $\beta^+$ -распада ( ${}^A_ZX \rightarrow {}^A_ZY + {}^0_{+1}e + {}^0_0\nu_e$ )

Трудности при трактовке $\beta^+$ -распада	Ответы на поставленные вопросы
Согласно правилу смещения, ${}^A_ZX \rightarrow {}^A_{Z-1}Y + {}^0_{+1}e$ , выброс позитрона должен изменить спин ядра на $\hbar/2$ , а $A = \text{const}$	Введение нейтрино позволяет объяснить кажущееся нарушение спина, так как спин нейтрино равен $\hbar/2$
В процессе $\beta^+$ -распада выбрасываются позитроны, а в ядре позитронов нет	$\beta^+$ -Распад ядра можно представить происходящим по схеме ${}^1_1p \rightarrow {}^1_0n + {}^0_{+1}e + {}^0_0\nu,$ т. е. интерпретировать его как превращение протона в нейтрон с испусканием позитрона и электронного нейтрино. Так как масса покоя протона меньше, чем у нейтрона, то эта реакция для свободного протона наблюдаться не может. Однако для протона, связанного в ядре, благодаря ядерному взаимодействию частиц, эта реакция оказывается энергетически возможной (энергия заимствуется от соседних частиц)
Энергетический $\beta^+$ -спектр (как и $\beta^-$ -спектр 7.20) непрерывен	Сплошной спектр $\beta^+$ -частиц обусловлен распределением энергии между позитроном и нейтрино, причем сумма энергий обеих частиц равна $E_{\text{max}}$ . В одних актах распада большую энергию получает нейтрино, в других — позитрон. Когда энергия позитрона равна $E_{\text{max}}$ , то вся энергия распада уносится позитроном, а энергия нейтрино равна нулю

## 7.22 Электронный захват ( $e$ -захват)

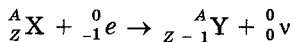
### Электронный захват ( $e$ -захват)

Захват ядром электрона с одной из внутренних оболочек атома ( $K$ ,  $L$  и т. д.) с испусканием нейтрино:



(появление нейтрино вытекает из закона сохранения спина).

### Схема $e$ -захвата



### Характерная особенность $e$ -захвата

Обнаруживается по сопровождающему его характеристическому рентгеновскому излучению, возникающему при заполнении образовавшихся вакансий в электронной оболочке атома 6.89.

Вся энергия распада уносится нейтрино. В этом  $e$ -захват отличается от  $\beta^+$ -распадов 7.20 7.21, где энергия распределяется между двумя частицами.

## 7.23 Описание $\gamma$ -излучения ядер

### $\gamma$ -излучение ядер

Коротковолновое электромагнитное излучение, сопровождающее  $\alpha$ - и  $\beta$ -распады, а также возникающее при ядерных реакциях, при торможении заряженных частиц, их распаде.

Оно не отклоняется электрическим и магнитным полями, обладает относительно слабой ионизирующей и очень большой проникающей способ-

ностями; при прохождении через кристаллы обнаруживает дифракцию.  $\gamma$ -Излучение обладает чрезвычайно малой длиной волны ( $\lambda \leq 10^{-10}$  м) и вследствие этого ярко выраженными *корпускулярными свойствами*.

## $\gamma$ -спектр

Распределение числа  $\gamma$ -квантов по энергиям.

## Характер $\gamma$ -спектра

$\gamma$ -Спектр — *линейчатый*, что является доказательством дискретности энергетических состояний атомных ядер.

## $\gamma$ -излучение — процесс внутриядерный

Свободный нуклон (как, впрочем, и свободный электрон) испустить  $\gamma$ -квант не может, поскольку одновременно нарушались бы законы сохранения энергии и импульса. Внутри же ядра это возможно, так как испущенный (поглощенный)  $\gamma$ -квант может обменяться импульсом с нуклонами ядра.

## Отсутствие правил смещения

При  $\gamma$ -излучении массовое число  $A$  и зарядовое число  $Z$  ядра не изменяются, поэтому оно не описывается правилами смещения.

## Механизм $\gamma$ -излучения

$\gamma$ -Излучение *испускается дочерним* (а не материнским) *ядром*. Дочернее ядро в момент своего образования, оказываясь в возбужденном состоянии, за время  $\sim 10^{-13}$ — $10^{-14}$  с (что значительно меньше времени жизни возбужденного атома  $\sim 10^{-8}$  с) переходит в основное состояние с испусканием  $\gamma$ -излучения. Возвращаясь в основное состояние, возбужденное ядро может пройти через ряд промежуточных состояний, а поэтому  $\gamma$ -излучение одного и того же радиоактивного изотопа может содержать несколько групп  $\gamma$ -квантов, отличающихся энергией. При радиоактивных распадах различных ядер  $\gamma$ -кванты имеют энергии от 10 кэВ до 5 МэВ.

## Внутренняя конверсия

Процесс, конкурирующий с  $\gamma$ -излучением, а именно возбужденное ядро переходит в основное состояние не путем испускания  $\gamma$ -кванта, а непосредственно передавая энергию одному из электронов атомных оболочек. При этом испускается *электрон конверсии*. Энергии электронов внутренней конверсии равны  $E - A_K$ ,  $E - A_L$ , ... , где  $E$  — энергия, освобождаемая при ядерном переходе,  $A_K$ ,  $A_L$ , ... — работа выхода электрона из  $K$ -,  $L$ -, ... оболочек. Электроны внутренней конверсии *моноэнергетичны*, что позволяет отличить их от  $\beta$ -электронов, спектр которых непрерывен. Внутренняя конверсия сопровождается характеристическим рентгеновским излучением **6.89**, возникающим в результате перехода электрона с вышележащих электронных оболочек на вакантное место, освобожденное электроном конверсии.

## **7.24** Процессы, сопровождающие прохождение $\gamma$ -излучения сквозь вещество

### Фотоэлектронное поглощение $\gamma$ -излучения (фотоэффект)

Процесс, при котором атом поглощает  $\gamma$ -квант и испускает электрон. Так как электрон выбивается из одной из внутренних оболочек атома, то освободившееся место заполняется электронами из вышележащих оболочек и фотоэффект сопровождается характеристическим рентгеновским излучением. Фотоэффект является преобладающим механизмом погло-



щения в области малых энергий  $\gamma$ -квантов ( $E_\gamma \leq 100$  кэВ). Фотоэффект может идти только на связанных электронах, так как свободный электрон не может поглотить  $\gamma$ -квант, при этом одновременно не удовлетворяются законы сохранения энергии и импульса.

### Комптоновское рассеяние

По мере увеличения энергии  $\gamma$ -квантов ( $E_\gamma \approx 0,5$  МэВ) вероятность фотоэффекта очень мала, и основным механизмом взаимодействия  $\gamma$ -квантов с веществом является *комптоновское рассеяние* [5.115].

### Образование электронно-позитронных пар

При  $E_\gamma > 1,02$  МэВ  $= 2m_e c^2$  ( $m_e$  — масса электрона) становится возможным процесс образования электронно-позитронных пар в электрических полях ядер. Вероятность этого процесса пропорциональна  $Z^2$  и увеличивается с ростом  $E_\gamma$ . Поэтому при  $E_\gamma \approx 10$  МэВ основным процессом взаимодействия  $\gamma$ -излучения в любом веществе является *образование электронно-позитронных пар*.

## 7.25 Воздействие ионизирующего излучения на вещество

### Поглощенная доза излучения

Физическая величина, равная отношению энергии излучения к массе облучаемого вещества.

### Экспозиционная доза излучения

Физическая величина, равная отношению суммы электрических зарядов всех ионов одного знака, созданных электронами, освобожденными в облученном воздухе (при условии полного использования ионизирующей способности электронов к массе этого воздуха).

### Биологическая доза

Величина, определяющая воздействие излучения на организм.

### Мощность дозы излучения

Величина, определяемая отношением дозы излучения к времени облучения. Различают *мощность поглощенной дозы* и *мощность экспозиционной дозы*.

## 7.1.7. МЕТОДЫ НАБЛЮДЕНИЯ РАДИОАКТИВНЫХ ИЗЛУЧЕНИЙ И ЧАСТИЦ

### 7.26 Два типа приборов, позволяющих изучать радиоактивные излучения

#### Физические основы для регистрации излучений и частиц

Практически все методы наблюдения и регистрации радиоактивных излучений ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) и частиц основаны на их способности производить ионизацию и возбуждение атомов среды. Заряженные частицы вызывают эти процессы непосредственно, а  $\gamma$ -кванты и нейтроны обнаруживаются по ионизации, вызываемой возникающими в результате их взаимодействия с электронами и ядрами атомов среды быстрыми заряженными частицами. Вторичные эффекты, сопровождающие рассмотренные процессы, такие, как вспышка света, электрический ток, потемнение фотопластинки, позволяют регистрировать пролетающие частицы, считать их, отличать друг от друга и измерять их энергию.

## Основные типы приборов, применяемых для регистрации радиоактивных излучений и частиц

- ◆ Приборы, позволяющие регистрировать прохождение частицы через определенный участок пространства и в некоторых случаях определять ее характеристики, например энергию (сцинтилляционный счетчик, черенковский счетчик, импульсная ионизационная камера, газоразрядный счетчик, полупроводниковый счетчик).
- ◆ Приборы, позволяющие наблюдать, например фотографировать, следы (треки) частиц в веществе (камера Вильсона, диффузионная камера, пузырьковая камера, ядерные фотозумльсии).

### 7.27 Описание действия различных счетчиков

#### Сцинтилляционный счетчик

Наблюдение *сцинтилляций* — вспышек света при попадании быстрых частиц на флуоресцирующий экран — первый метод, позволивший визуально (1903) регистрировать  $\alpha$ -частицы. *Сцинтилляционный счетчик* — детектор ядерных частиц, основными элементами которого являются сцинтиллятор (кристаллофосфор) и фотоэлектронный умножитель, позволяющий преобразовывать слабые световые вспышки в электрические импульсы, регистрируемые электронной аппаратурой. Обычно в качестве сцинтилляторов используют кристаллы некоторых неорганических ( $ZnS$  для  $\alpha$ -частиц;  $NaI-Tl$ ,  $CsI-Tl$  — для  $\beta$ -частиц и  $\gamma$ -квантов) или органических (антрацен, пластмассы — для  $\gamma$ -квантов) веществ. Для многих сцинтилляторов интенсивность световой вспышки пропорциональна энергии первичной частицы, поэтому счетчики в данных сцинтилляторах применяются для измерения энергии регистрируемых частиц.

#### Черенковский счетчик

Назначение черенковских счетчиков — измерение энергии частиц, движущихся в веществе со скоростью, превышающей фазовую скорость света в данной среде, и разделение этих частиц по массам. Зная угол испускания излучения  $\theta$ , можно определить скорость частицы, что при известной массе частицы равносильно определению ее энергии. С другой стороны, если масса частицы не известна, то она может быть определена по независимому измерению энергии частицы. Кроме того, при наличии двух пучков частиц с разными скоростями будут различными и углы испускания излучений, по которым можно искомые частицы определить. Для черенковских счетчиков разрешение по скоростям (иными словами, по энергиям) составляет  $10^{-3}$ — $10^{-5}$ . Это позволяет отделять элементарные частицы друг от друга при энергиях порядка 1 ГэВ, когда углы испускания излучения различаются очень мало. Время разрешения счетчиков достигает  $10^{-9}$  с. Счетчики Черенкова устанавливаются на космических кораблях для исследования космического излучения.

#### Импульсная ионизационная камера

Это детектор частиц, действие которого основано на способности заряженных частиц вызывать ионизацию газа. Ионизационная камера представляет собой заполненный газом электрический конденсатор, к электродам которого подается постоянное напряжение. Регистрируемая частица, попадая в пространство между электродами, ионизует газ. Напряжение подбирается так, чтобы все образовавшиеся ионы, с одной стороны, доходили до электродов, не успев рекомбинировать, а с другой — не разгонялись настолько сильно, чтобы производить вторичную иониза-

цию. Следовательно, в ионизационной камере на ее электродах непосредственно собираются ионы, возникшие под действием заряженных частиц. *Ионизационные камеры* бывают двух типов: *интегрирующие* (в них измеряется суммарный ионизационный ток) и *импульсные*, являющиеся, по существу, счетчиками (в них регистрируется прохождение одиночной частицы и измеряется ее энергия).

### Газоразрядный счетчик

Обычно выполняется в виде наполненного газом металлического цилиндра (катод) с тонкой проволокой (анод), натянутой по его оси. В них основную роль играет вторичная ионизация, обусловленная столкновениями первичных ионов с атомами и молекулами газа и стенок. Можно говорить о двух типах газоразрядных счетчиков: *пропорциональных* (в них газовый разряд несамостоятельный [3.80], т. е. гаснет при прекращении действия внешнего ионизатора) и *счетчиках Гейгера—Мюллера* (в них газовый разряд самостоятельный [3.81], т. е. поддерживается после прекращения действия внешнего ионизатора).

*В пропорциональных счетчиках* рабочее напряжение выбирается так, чтобы они работали в области вольт-амперной характеристики, соответствующей несамостоятельному разряду, в которой выходной импульс пропорционален первичной ионизации, т. е. энергии влетевшей в счетчик частицы. Поэтому они не только регистрируют частицу, но и измеряют ее энергию.

*Счетчик Гейгера—Мюллера* по конструкции и принципу действия существенно не отличается от пропорционального счетчика, но работает в области вольт-амперной характеристики, соответствующей самостоятельному разряду, когда выходной импульс не зависит от первичной ионизации. Счетчики Гейгера—Мюллера регистрируют частицу без измерения ее энергии.

### Полупроводниковый счетчик

Детектор частиц, основным элементом которого является полупроводниковый диод [6.145]. Время разрешения составляет примерно  $10^{-9}$  с. Полупроводниковые счетчики обладают высокой надежностью, могут работать в магнитных полях. Малая толщина рабочей области (порядка сотни микрометров) полупроводниковых счетчиков не позволяет применять их для измерения высокоэнергетических частиц.

## 7.28 Описание действия различных камер и фотоэмульсий

### Камера Вильсона

Это старейший (1912) и на протяжении многих десятилетий (вплоть до 50—60-х годов) единственный тип трекового детектора.

Выполняется обычно в виде стеклянного цилиндра с плотно прилегающим поршнем. Цилиндр наполняется нейтральным газом (обычно гелием или аргоном), насыщенным парами воды или спирта. При резком, т. е. адиабатном, расширении газа пар становится пересыщенным и на траекториях частиц, пролетевших через камеру, образуются треки из тумана.

Образовавшиеся треки для воспроизводства их пространственного расположения фотографируются стереоскопически, т. е. под разными углами. По характеру и геометрии треков можно судить о типе прошедших через камеру частиц (например,  $\alpha$ -частица оставляет сплошной жирный след,  $\beta$ -частица — тонкий), об энергии частиц (по величине пробега), о плот-

ности ионизации (по количеству капель на единицу длины трека), о количестве участвующих в реакции частиц.

Российский ученый Д. В. Скобельцын значительно расширил возможности камеры Вильсона, поместив ее в сильное магнитное поле (1927). По искривлению траектории заряженных частиц в магнитном поле, т. е. по кривизне трека, можно судить о знаке заряда, а если известен тип частицы (ее заряд и масса), то по радиусу кривизны трека можно определить энергию и массу частицы даже в том случае, если весь трек в камере не умещается (для реакций при высоких энергиях вплоть до сотен мегаэлектрон-вольт). Недостаток камеры Вильсона — ее малое рабочее время, составляющее примерно 1% от времени, затрачиваемого для подготовки камеры к последующему расширению (выравнивание температуры и давления, рассасывание остатков треков, насыщение паров), а также трудоемкость обработки результатов.

### Диффузионная камера

Это разновидность (1936) камеры Вильсона. В ней рабочим веществом также является пересыщенный пар, но состояние пересыщения создается диффузией паров спирта от нагретой (до 10 °С) крышки ко дну, охлаждаемому (до -60 °С) твердой углекислотой. Вблизи дна возникает слой пересыщенного пара толщиной примерно 5 см, в котором проходящие заряженные частицы создают треки. В отличие от вильсоновской, диффузионная камера работает непрерывно. Кроме того, из-за отсутствия поршня в ней могут создаваться давления до 4 МПа, что значительно увеличивает ее эффективный объем.

### Пузырьковая камера

В ней (1952) рабочим веществом является перегретая (находящаяся под давлением) прозрачная жидкость (жидкие водород, пропан, ксенон). Запускается камера, так же как и камера Вильсона, резким сбросом давления, переводящим жидкость в неустойчивое перегретое состояние. Пролетающая в это время через камеру заряженная частица вызывает резкое вскипание жидкости, и траектория частицы оказывается обозначенной цепочкой пузырьков пара — образуется трек, который, как и в камере Вильсона, фотографируется. Пузырьковая камера работает циклами. Размеры пузырьковых камер примерно такие же, как камеры Вильсона (от десятков сантиметров до 2 м), но их эффективный объем на 2—3 порядка больше, так как жидкости гораздо плотнее газов. Это позволяет использовать пузырьковые камеры для исследования длинных цепей рождений и распадов частиц высоких энергий.

### Ядерные фотоэмульсии

Простейший (1927) трековый детектор заряженных частиц. Прохождение заряженной частицы в эмульсии вызывает ионизацию, приводящую к образованию центров скрытого изображения. После проявления следы заряженных частиц обнаруживаются в виде цепочки зерен металлического серебра. Так как эмульсия — среда более плотная, чем газ или жидкость, то длина трека в эмульсии более короткая. Так, трек длиной 0,05 см в эмульсии эквивалентен треку в 1 м в камере Вильсона. Поэтому фотоэмульсии применяются для изучения реакций, вызываемых частицами в ускорителях сверхвысоких энергий и в космических лучах. В практике исследований высокоэнергетических частиц используются также так называемые *столы* — большое число маркированных фотоэмульсионных пластинок, помещаемых на пути частиц и после проявления промеряемых под микроскопом.

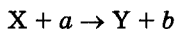
## 7.1.8. ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ И ИХ ОСНОВНЫЕ ТИПЫ

### 7.29 Возможные механизмы ядерных реакций

#### Ядерные реакции

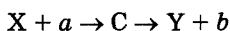
Превращение атомных ядер при взаимодействии с частицами (в том числе  $\gamma$ -квантами) или друг с другом.

#### Прямые ядерные взаимодействия



[X и Y — исходное и конечное ядра; a и b — бомбардирующая и испускаемая (или испускаемые) в ядерной реакции частицы]

#### Реакции, идущие в две стадии с образованием составного ядра (компаунд-ядра)



Первая стадия — это захват ядром X частицы a, приблизившейся к нему на расстояние действия ядерных сил ( $\sim 2 \cdot 10^{-15}$  м), и образование составного ядра C. Энергия частицы передается не какому-то одному нуклону, а распределяется между нуклонами составного ядра, которое оказывается в возбужденном состоянии. Время жизни составного ядра равно  $10^{-16}$ — $10^{-12}$  с, т. е. составляет  $(10^6$ — $10^{10}) \tau$ , где  $\tau$  — характерное ядерное время ( $\sim 10^{-22}$  с). Это означает, что за время жизни составного ядра нуклоны многократно сталкиваются между собой, происходит перераспределение энергии между нуклонами и один из нуклонов (или их комбинация) может получить энергию, достаточную для вылета из ядра. В результате и возможна вторая стадия — распад составного ядра на ядро Y и частицу b.

### 7.30 Условная классификация ядерных реакций

Признак классификации	Детализация	Пояснения
Род участвующих в ядерных реакциях частиц	Реакции под действием нейтронов	Нейтроны, как нейтральные частицы, не испытывают кулоновского отталкивания, поэтому, легко проникая в ядро, вызывают ядерные превращения
	Реакции под действием заряженных частиц	Например, протонов, $\alpha$ -частиц. Первая в истории ядерная реакция (Резерфорд, 1919): ${}^1_1\text{H} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^7_3\text{Li} + {}^4_2\text{He}$ Ядерная реакция, в результате которой впервые получены нейтроны: ${}^9_4\text{Be} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{12}_6\text{C} + {}^1_0\text{n}$
	Реакции под действием $\gamma$ -квантов	Типичные реакции: ( $\gamma, n$ ), ( $\gamma, p$ ), ( $\gamma, 2n$ ), ( $\gamma, np$ )
Энергия вызывающих ядерные реакции частиц	Реакции при малых энергиях (порядка нескольких эВ)	Происходят в основном под действием нейтронов
	Реакции при средних энергиях (до нескольких МэВ)	Происходят с участием $\gamma$ -квантов и заряженных частиц (p, $\alpha$ -частицы)
	Реакции при высоких энергиях (до тысячи МэВ)	Приводят к рождению отсутствующих в свободном состоянии элементарных частиц
Род участвующих в ядерных реакциях ядер	Реакции на легких ( $A < 50$ ), средних ( $50 < A < 100$ ) и тяжелых ( $A > 100$ ) ядрах	Например, на легких ядрах под действием тепловых нейтронов осуществляются реакции захвата нейтронов: ${}^3_2\text{He} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^3_1\text{H} + {}^1_1\text{p}$ , ${}^{10}_5\text{B} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^7_3\text{Li} + {}^4_2\text{He}$

Признак классификации	Детализация	Пояснения
Характер происходящих ядерных превращений	Реакции с испусканием нейтронов, с испусканием заряженных частиц и т. д.	Например, в реакциях захвата составное ядро не испускает никаких частиц, а переходит в основное состояние, излучая один или несколько $\gamma$ -квантов

### 7.31 Ядерные реакции под действием нейтронов

Нейтроны	В зависимости от скорости (энергии)	
	медленные	быстрые
	ультрахолодные ( $\leq 10^{-7}$ эВ) очень холодные ( $10^{-7} - 10^{-4}$ эВ) холодные ( $10^{-4} - 10^{-3}$ эВ) тепловые ( $10^{-3} - 0,5$ эВ) резонансные ( $0,5 - 10^4$ эВ)	быстрые ( $10^4 - 10^8$ эВ) высокоэнергетичные ( $10^8 - 10^{10}$ эВ) релятивистские ( $\geq 10^{10}$ эВ)

◆ Замедлить нейтроны можно, пропуская их через вещество, содержащее водород (например, воду). Они испытывают при этом рассеяние и замедляются.

Реакции на медленных нейтронах	упругое рассеяние на ядрах (реакция типа $(n, n)$ ) радиационный захват (реакция типа $(n, \gamma)$ )	Реакция типа $(n, \gamma)$ приводит к образованию нового изотопа исходного вещества: ${}_Z^A X + {}_0^1 n \rightarrow {}_Z^{A+1} Y + \gamma.$ Пример: ${}_{48}^{113} \text{Cd} + {}_0^1 n \rightarrow {}_{48}^{114} \text{Cd} + \gamma.$
	реакции захвата нейтронов с испусканием протонов и $\alpha$ -частиц	Происходят под действием тепловых нейтронов: ${}_2^3 \text{He} + {}_0^1 n \rightarrow {}_1^3 \text{H} + {}_1^1 p,$ ${}_{5}^{10} \text{B} + {}_0^1 n \rightarrow {}_3^7 \text{Li} + {}_2^4 \text{He}.$

◆ Медленные нейтроны эффективны для возбуждения ядерных реакций, поскольку они относительно долго могут находиться вблизи атомного ядра, а потому вероятность захвата нейтрона ядром очень большая.

Реакции на быстрых нейтронах	Реакции типа $(n, p)$ и $(n, \alpha)$	Энергия достаточна для преодоления потенциального барьера, препятствующего вылету протонов и $\alpha$ -частиц.
	Неупругое рассеяние по схеме ${}_Z^A X + {}_0^1 n \rightarrow {}_Z^A X^* + {}_0^1 n'$	${}_0^1 n'$ — не тот нейтрон, который проник в ядро; ${}_Z^A X^*$ — ядро в возбужденном состоянии, и его переход в основное состояние сопровождается испусканием $\gamma$ -кванта.
	Реакции типа $(n, 2n)$	Энергия нейтронов $\sim 10$ МэВ. ${}_{92}^{238} \text{U} + {}_0^1 n \rightarrow {}_{92}^{237} \text{U} + 2{}_0^1 n,$ а далее ${}_{92}^{237} \text{U} \xrightarrow{\beta^-} {}_{93}^{237} \text{Np} + {}_{-1}^0 e.$

◆ **Рассеяние частицы** — испущенная частица тождественна с захваченной ( $b \equiv a$ ). При  $E_b = E_a$  — упругое рассеяние, при  $E_b \neq E_a$  — неупругое рассеяние.

## 7.32 Реакции деления ядра

### Реакция деления ядра

Деление тяжелых ядер под действием нейтронов (впоследствии оказалось и других частиц) на несколько более легких ядер (осколков), чаще всего на два ядра, близких по массе, с высвобождением двух или трех нейтронов (*нейтронов деления*) и выделением большого количества энергии.

### Нейтроны деления

Избыточные нейтроны, испусканием которых сопровождается реакция деления тяжелых ядер, поскольку в момент своего образования осколки деления имеют избыток нейтронов над протонами.

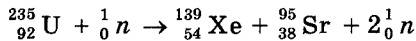
### Мгновенные нейтроны

Нейтроны, испускаемые практически мгновенно ( $t \leq 10^{-14}$  с).

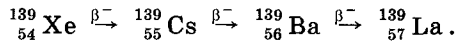
### Запаздывающие нейтроны

Нейтроны, испускаемые спустя некоторое время после деления ( $0,05 \text{ с} \leq t \leq 60 \text{ с}$ ); их доля составляет ~ 0,7%.

### Пример деления ядра ${}_{92}^{235}\text{U}$

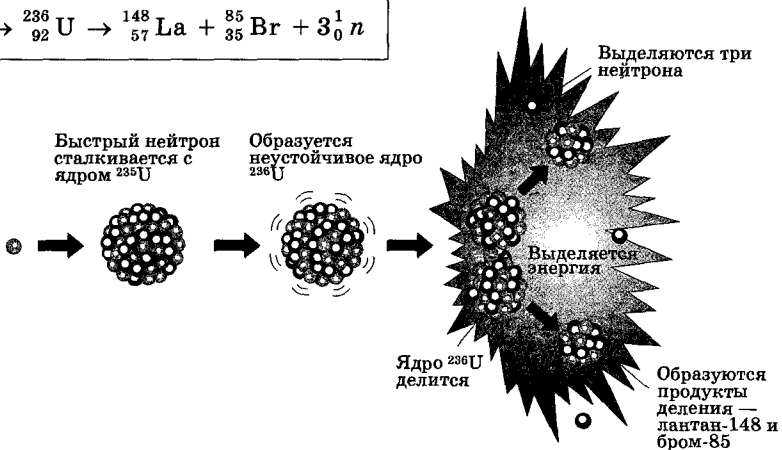
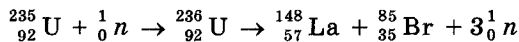


Осколок деления в результате трех актов  $\beta^-$ -распада превращается в стабильный изотоп  ${}_{57}^{139}\text{La}$ :



Приведенная реакция не единственная, приводящая к делению урана, так как осколки могут быть разнообразными.

### Схематическое представление другой реакции деления ядра ${}_{92}^{235}\text{U}$



### Выделение энергии при делении тяжелых ядер

Деление тяжелого ядра на два осколка должно сопровождаться **7.6** выделением огромной энергии ~ 1,1 МэВ/нуклон (равна разности удельных энергий связи в ядрах — продуктах деления и исходного ядра, т. е. (8,7 - 7,6) МэВ/нуклон).

Эксперименты подтверждают, что при каждом акте деления действительно выделяется огромная энергия (~ 200 МэВ), которая распределяется в основном между осколками, а также между продуктами последующего распада осколков деления.

## Энергия активации

Минимальная энергия, необходимая для осуществления реакции деления ядра. Например, тепловые нейтроны вызывают деление ядер  ${}_{92}^{235}\text{U}$ ,  ${}_{94}^{239}\text{Pu}$  и  ${}_{92}^{233}\text{U}$ ,  ${}_{90}^{230}\text{Th}$ .

## 7.33 Цепная ядерная реакция

### Цепная ядерная реакция

Ядерная реакция, в которой частицы, вызывающие реакцию, образуются как продукты этой реакции.

### Коэффициент размножения ( $k$ )

Отношение числа нейтронов в данном поколении к их числу в предыдущем поколении.

◆ Коэффициент размножения зависит от природы делящегося вещества, а для данного изотопа — от его количества, а также размеров и формы *активной зоны* (пространство, где происходит цепная реакция).

### Необходимое условие для развития цепной реакции

Коэффициент размножения нейтронов  $k \geq 1$ .

### Классификация цепных ядерных реакций

Самоподдерживающаяся	Развивающаяся	Затухающая	Неуправляемая	Управляемая
Реакция, при которой число нейтронов с течением времени не изменяется ( $k = 1$ )	Реакция, при которой число делений непрерывно растет и реакция может стать взрывной ( $k > 1$ )	Реакция, при которой число нейтронов с течением времени уменьшается ( $k < 1$ )	Например, взрыв атомной бомбы	Осуществляется в ядерных реакторах

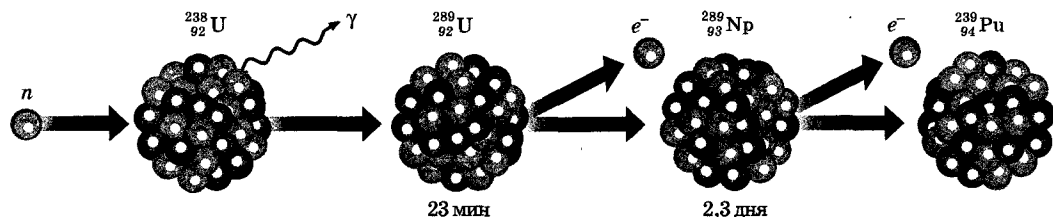
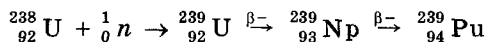
### Критические размеры

Минимальные размеры активной зоны, при которой возможно осуществление цепной реакции.

### Критическая масса

Минимальная масса делящегося вещества в системе критических размеров, необходимая для осуществления цепной реакции.

## 7.34 Возможный процесс воспроизводства ядерного горючего





## 7.35 Реакции синтеза атомных ядер

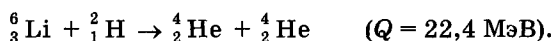
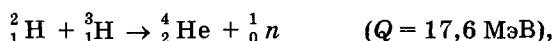
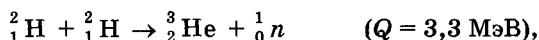
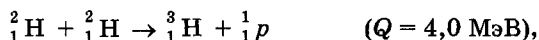
### Реакция синтеза атомных ядер

Образование из легких ядер более тяжелых.

#### Особенности реакций синтеза

Сопровождаются выделением большого количества энергии, поскольку (рис. 7.35) удельная энергия связи: 1) у легких ядер меньше, чем у промежуточных ядер; 2) резко увеличивается при переходе от ядер дейтерия  ${}^2_1\text{H}$  и трития  ${}^3_1\text{H}$  к литию  ${}^6_1\text{Li}$  и особенно к гелию  ${}^4_2\text{He}$ .

#### Примеры реакций синтеза (энерговыведение)



Например, в третьей реакции  $\delta E_{\text{св}} = \frac{17,6}{5} \text{ МэВ} \approx 3,5 \text{ МэВ}$ , а при делении ядра  ${}^{238}_{92}\text{U}$   $\delta E_{\text{св}} = \frac{200}{238} \text{ МэВ} \approx 0,84 \text{ МэВ}$ .

#### Необходимые для осуществления реакции синтеза условия

Начальные ядра должны преодолеть кулоновский барьер, высота которого составляет  $\sim 0,1 \text{ МэВ}$ . Это означает, что реально в этих реакциях могут участвовать ядра с очень большими кинетическими энергиями (скоростями). Большие же скорости соответствуют высокой температуре, поэтому для протекания реакций синтеза необходим разогрев до  $T \approx 2,6 \cdot 10^9 \text{ К}$ . Однако оказывается, что для протекания реакции синтеза атомных ядер достаточно температуры порядка  $10^7 \text{ К}$ . Это связано с тем, что: 1) при температурах, характерных для реакций синтеза атомных ядер, любое вещество находится в состоянии плазмы, распределение частиц которой подчиняется закону Максвелла; поэтому всегда имеется некоторое число ядер, энергия которых значительно превышает среднее значение; 2) синтез ядер может происходить вследствие туннельного эффекта.

## 7.36 Термоядерная реакция

### Термоядерная реакция

Реакция синтеза легких атомных ядер в более тяжелые, происходящая при сверхвысокой температуре ( $10^7 \text{ К}$  и выше).

#### Возможные способы протекания термоядерных реакций на Солнце

Протонно-протонный, или водородный, цикл ( $T \approx 10^7 \text{ К}$ )	Углеродно-азотный, или углеродный, цикл ( $T \approx 2 \cdot 10^7 \text{ К}$ )
${}^1_1\text{p} + {}^1_1\text{p} \rightarrow {}^2_1\text{H} + {}^0_{+1}\text{e} + {}^0_0\nu_e,$	${}^{12}_6\text{C} + {}^1_1\text{p} \rightarrow {}^{13}_7\text{N} + \gamma,$
${}^2_1\text{H} + {}^1_1\text{p} \rightarrow {}^3_2\text{He} + \gamma,$	${}^{13}_7\text{N} \rightarrow {}^{13}_6\text{C} + {}^0_{+1}\text{e} + {}^0_0\nu_e,$
${}^3_2\text{He} + {}^3_2\text{He} \rightarrow {}^4_2\text{He} + 2{}^1_1\text{p}$	${}^{13}_6\text{C} + {}^1_1\text{p} \rightarrow {}^{14}_7\text{N} + \gamma,$
	${}^{14}_7\text{N} + {}^1_1\text{p} \rightarrow {}^{15}_8\text{O} + \gamma,$
	${}^{15}_8\text{O} \rightarrow {}^{15}_7\text{N} + {}^0_{+1}\text{e} + {}^0_0\nu_e,$
	${}^{15}_7\text{N} + {}^1_1\text{p} \rightarrow {}^{12}_6\text{C} + {}^4_2\text{He}$

## 7.2. Элементы физики элементарных частиц

### 7.2.1. КОСМИЧЕСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

#### 7.37 Первичное и вторичное космическое излучение

##### Космическое излучение

Потоки элементарных частиц высокой энергии, преимущественно протонов, практически изотропно падающих на Землю со всех направлений космического пространства.

##### Первичное космическое излучение

Излучение, приходящее непосредственно из космоса.

##### Состав первичного космического излучения

Поток элементарных частиц высокой энергии ( $\sim 90\%$  — протоны,  $\sim 7\%$  —  $\alpha$ -частицы,  $\sim 1\%$  — ядра более тяжелых элементов ( $Z > 20$ )). При  $h \geq 50$  км интенсивность космического излучения *постоянна* и на этой высоте наблюдается лишь *первичное излучение*.

##### Вторичное космическое излучение

Излучение, образующееся в результате взаимодействия первичного космического излучения с ядрами атомов земной атмосферы.

##### Состав вторичного космического излучения

Поток вторичных частиц высокой энергии, в котором встречаются практически все известные элементарные частицы. Вторичное космическое излучение наблюдается при  $h < 20$  км, его интенсивность с приближением к Земле уменьшается (вторичные частицы испытывают поглощение).

#### 7.38 Мягкий и жесткий компонент вторичного космического излучения

##### Мягкий компонент

Компонент вторичного космического излучения, сильно поглощаемый свинцом.

##### Жесткий компонент

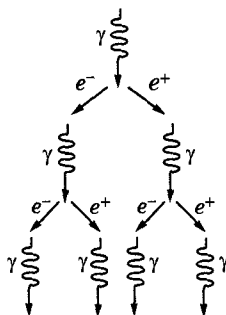
Компонент вторичного космического излучения, обладающий в свинце большой проникающей способностью.

##### Природа мягкого компонента

Ливневые частицы — электроны, позитроны и  $\gamma$ -кванты.

##### Электронно-позитронно-фотонный (каскадный) ливень

В космическом пространстве всегда есть  $\gamma$ -кванты с энергией  $E > 2m_e c^2$ , которые в поле атомных ядер превращаются в электронно-позитронные пары ( $\gamma \rightarrow {}_{-1}^0 e + {}_{+1}^0 e$ ). Образовавшиеся  ${}_{-1}^0 e$  и  ${}_{+1}^0 e$ , тормозясь, в свою очередь, создают  $\gamma$ -кванты, энергия которых еще достаточна для образования новых пар и т. д. до тех пор, пока энергия  $\gamma$ -квантов не будет меньше  $2m_e c^2$ . Хотя первичные частицы, приводящие к образованию этих ливней, и обладают огромными энергиями, но ливневые частицы — «мягкие» (не проходят через большие толщи вещества).



## Природа жесткого компонента

Жесткий компонент состоит в основном из мюонов **7.39**. Масса мюонов большая, поэтому для них радиационные потери пренебрежимо малы, и жесткий компонент вторичного космического излучения обладает большой проникающей способностью.

### 7.2.2. МЮОНЫ И МЕЗОНЫ

#### 7.39 Мюоны и их свойства

Частица	Электрический заряд	Масса	Спин	Время жизни
	[e]	[ $m_e$ ]	[ $\hbar$ ]	[с]
$\mu^-$	1	206,8	1/2	$2,2 \cdot 10^{-6}$ с
$\mu^+$	1	206,8	1/2	$2,2 \cdot 10^{-6}$ с

#### Схемы распада мюонов

$$\begin{aligned} \mu^- &\rightarrow {}^0_{-1}e + {}^0_0\tilde{\nu}_e + {}^0_0\nu_\mu, \\ \mu^+ &\rightarrow {}^0_{+1}e + {}^0_0\nu_e + {}^0_0\tilde{\nu}_\mu \end{aligned}$$

[ $e$  — элементарный электрический заряд;  $m_e$  — масса электрона;  $\hbar = h/2\pi$  — постоянная Планка;  ${}^0_{-1}e$  и  ${}^0_{+1}e$  — соответственно символическая запись электрона и позитрона;  ${}^0_0\nu_\mu$  и  ${}^0_0\tilde{\nu}_\mu$  — соответственно «мюонные» нейтрино и антинейтрино, которые, как доказано, отличаются от  ${}^0_0\nu_\mu$  и  ${}^0_0\tilde{\nu}_\mu$  — «электронных» нейтрино и антинейтрино, сопутствующих испусканию позитрона и электрона. Спины мюонов равны 1/2 (в единицах  $\hbar$ ). Существование  ${}^0_0\nu_\mu$  и  ${}^0_0\tilde{\nu}_\mu$  следует из законов сохранения энергии и спина]

#### Мюоны — ядерно-неактивные частицы

Мюоны не взаимодействуют или взаимодействуют весьма слабо с атомными ядрами, поэтому их нельзя отождествлять с частицами, которые являлись бы носителями ядерного взаимодействия (такие частицы должны интенсивно взаимодействовать с ядрами).

#### 7.40 Мезоны и их свойства

Частица	Электрический заряд	Масса	Спин	Время жизни
	[e]	[ $m_e$ ]	[ $\hbar$ ]	[с]
$\pi^+$ -мезон	1	273,1	0	$2,6 \cdot 10^{-8}$ с
$\pi^-$ -мезон	1	273,1	0	$2,6 \cdot 10^{-8}$ с
$\pi^0$ -мезон	0	264,1	0	$0,8 \cdot 10^{-16}$ с
$K^+$ -мезон	1	966,2	0	$\approx 10^{-8}$ с
$K^-$ -мезон	1	966,2	0	$\approx 10^{-8}$ с
$K^0$ -мезон	0	974	0	$10^{-10}$ — $10^{-8}$ с
$\tilde{K}^0$ -мезон	0	974	0	$10^{-10}$ — $10^{-8}$ с

#### Схемы распадов $\pi$ -мезонов

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + {}^0_0\nu_\mu, \quad \pi^- \rightarrow \mu^- + {}^0_0\tilde{\nu}_\mu, \quad \pi^0 \rightarrow 2\gamma$$

(мюоны испытывают дальнейший распад **7.39**).

#### Возможные схемы распадов заряженных и нейтральных (долгоживущих) каонов

$$\begin{aligned} K^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu & (K^- &\rightarrow \mu^- + \tilde{\nu}_\mu), & K_L^0 &\rightarrow \pi^+ + e^- + \tilde{\nu}_e, & K_S^0 &\rightarrow \pi^- + \mu^+ + \nu_\mu, \\ K^+ &\rightarrow \pi^+ + \pi^0 & (K^- &\rightarrow \pi^- + \pi^0), & K_L^0 &\rightarrow \pi^- + e^+ + \nu_e, & K_S^0 &\rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0, \\ K^+ &\rightarrow e^+ + \pi^0 + \nu_e. & (K^- &\rightarrow e^- + \pi^0 + \tilde{\nu}_e), & K_L^0 &\rightarrow \pi^+ + \mu^- + \tilde{\nu}_\mu, & K_S^0 &\rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0. \end{aligned}$$

## 7.2.3. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ПРИРОДЕ

### 7.41 Типы взаимодействий элементарных частиц

#### Сильное, или ядерное

Обуславливает связь протонов в ядрах и обеспечивает исключительную прочность этих образований, лежащих в основе стабильности вещества в земных условиях.

#### Электромагнитное

Характеризуется как взаимодействие, в основе которого лежит связь с электромагнитным полем. Характерно для всех элементарных частиц, за исключением нейтрино, антинейтрино и фотона. Ответственно, в частности, за существование атомов и молекул, обуславливая взаимодействие в них положительно заряженных ядер и отрицательно заряженных электронов.

#### Слабое

Наиболее медленное из всех взаимодействий, протекающих в микромире. Ответственно за взаимодействие частиц, происходящих с участием нейтрино и антинейтрино (например,  $\beta$ -распад,  $\mu$ -распад), а также за безнейтринные процессы распада, характеризующиеся довольно большим временем жизни распадающейся частицы ( $\tau > 10^{-10}$  с).

#### Гравитационное

Присуще всем без исключения частицам, однако ввиду малости масс элементарных частиц оно пренебрежимо мало и в процессах микромира, по-видимому, несущественно.

### 7.42 Характер фундаментальных взаимодействий

Взаимодействие	Сильное	Электромагнитное	Слабое	Гравитационное
Интенсивность	1	$10^{-2}$	$\sim 10^{-14}$	$\sim 10^{-41}$
Радиус действия, м	$10^{-15}$ до $10^{-16}$	$\infty$	$\leq 10^{-16}$	$\infty$

◆ Чем сильнее взаимодействие, тем с большей интенсивностью протекают процессы.

## 7.2.4. ЧАСТИЦЫ И АНТИЧАСТИЦЫ

### 7.43 Принцип зарядового сопряжения

#### Формулировка

Для каждой элементарной частицы должна существовать античастица.

#### «Рождение» античастицы

1928 г., на основе релятивистского волнового уравнения Дирака, из которого следовало существование *позитрона* — античастицы электрона.

#### Одинаковые характеристики частиц и античастиц

Из общих положений квантовой теории следует, что частицы и античастицы должны иметь одинаковые массы, одинаковое время жизни в вакууме, одинаковые по модулю, но противоположные по знаку электрические заряды (и магнитные моменты), одинаковые спины и изотопические спины **7.49**, а также одинаковые остальные квантовые числа, приписываемые элементарным частицам для описания закономерностей их взаимодействия (лептонное число **7.46**, барионное число **7.46**, странность **7.50** и т. д.).

## 7.44 Поведение частиц и античастиц

### Симметрия между частицами и античастицами

Считалось, что имеется полная симметрия между частицами и античастицами, т. е. если какой-то процесс идет между частицами, то должен существовать точно такой же (с теми же характеристиками) процесс между античастицами. Однако подобная симметрия характерна только для *сильного и электромагнитного взаимодействий* и нарушается для *слабого*.

### Аннигиляция

Согласно теории Дирака, столкновение частицы и античастицы должно приводить к их взаимной аннигиляции, в результате которой возникают другие элементарные частицы или фотоны.

**Примеры:**  ${}_{-1}^0e + {}_{+1}^0e \rightarrow 2\gamma$ ,  $\bar{p} + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^+ + \pi^- + \pi^0$ .

### Истинно нейтральные частицы

Частицы, у которых отсутствуют античастицы.

К ним относятся фотон,  $\pi^0$ -мезон и  $\eta^0$ -мезон (его масса —  $1074m_e$ , время жизни  $7 \cdot 10^{-19}$  с, распадается с образованием  $\pi$ -мезонов и  $\gamma$ -квантов). Они не способны к аннигиляции, но испытывают взаимные превращения (фундаментальное свойство всех элементарных частиц).

## 7.2.5. ЛЕПТОНЫ И ИХ ОПИСАНИЕ

### 7.45 Семейство лептонов

#### Лептоны

Класс элементарных частиц, не участвующих в сильном взаимодействии и имеющих спин  $1/2$ , т. е. являющихся фермионами.

#### Семейство лептонов

Название частицы	Символ	Электрический заряд	Масса	Спин	Время жизни
		[e]	[ $m_e$ ]	[ $\hbar$ ]	[с]
Электрон	$e^-$	1	1	1/2	стабилен
Электронное нейтрино	$\nu_e$	0	0?	1/2	стабильно
Мюон	$\mu^-$	1	206,8	1/2	$2,2 \cdot 10^{-6}$
Мюонное нейтрино	$\nu_\mu$	0	0?	1/2	стабильно
Тау-лептон	$\tau^-$	1	3487	1/2	$3,5 \cdot 10^{-13}$
Таонное нейтрино	$\nu_\tau$	0	0?	1/2	стабильно

◆ Название (от греческого «лептос» — легкий) связано с тем, что массы первых известных лептонов были меньше масс известных частиц.

### 7.46 Лептонное число и закон его сохранения

#### Лептонное число

Особое квантовое число, характеризующее лептоны и выделяющее класс лептонов из множества элементарных частиц:

$L = +1$  для лептонов ( $e^-, \mu^-, \tau^-, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ ),

$L = -1$  для антилептонов ( $e^+, \mu^+, \tau^+, \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau$ ),

$L = 0$  для всех остальных элементарных частиц.

## Закон сохранения лептонного числа

В замкнутой системе при всех без исключения процессах взаимопревращаемости элементарных частиц лептонное число сохраняется.

### Следствие закона сохранения лептонного числа

При распаде  ${}^1_0n \rightarrow {}^1_1p + {}^0_{-1}e + {}^0_0\tilde{\nu}_e$  вылетает антинейтрино, а при распаде  ${}^1_1p \rightarrow {}^1_0n + {}^0_{+1}e + {}^0_0\nu_e$  — нейтрино. Так как у электрона и нейтрино  $L = +1$ , а у позитрона и антинейтрино  $L = -1$ , то закон сохранения лептонного числа выполняется лишь при условии, что  ${}^0_0\tilde{\nu}_e$  возникает вместе с электроном, а  ${}^0_0\nu_e$  — с позитроном.

◆ Для лептонов, как, впрочем, и для всех элементарных частиц, выполняются законы сохранения энергии, импульса, момента импульса, зарядовых чисел.

## 7.47 Нейтрино и антинейтрино

$\nu_e$  и  $\tilde{\nu}_e$  — реальные частицы; различные частицы

Осуществлены реакции захвата электронного антинейтрино протоном:  ${}^0_0\tilde{\nu}_e + {}^1_1p \rightarrow {}^1_0n + {}^0_{+1}e$  и реакция захвата электронного нейтрино нейтроном:  ${}^0_0\nu_e + {}^1_0n \rightarrow {}^1_1p + {}^0_{-1}e$ .

$\nu_\mu$  и  $\nu_\mu$  — различные частицы

Захват мюонного нейтрино происходит по схеме  ${}^0_0\nu_\mu + {}^1_0n \rightarrow {}^1_1p + \mu^-$ . В то время как реакция  ${}^0_0\nu_\mu + {}^1_0n \not\rightarrow {}^1_1p + {}^0_{-1}e$  не идет.

$\nu_\mu$  и  $\nu_\mu$  — различные частицы

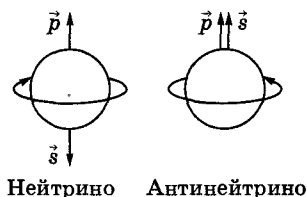
Следует из экспериментов по рождению и поглощению мюонных нейтрино.

### Спиральность

Характеристика, приписываемая нейтрино и антинейтрино, определяемая как проекция спина частицы на направление ее движения (на импульс).

### Отличие нейтрино от антинейтрино

У нейтрино спин равен  $1/2$ , и его проекция на направление импульса может принимать значения  $+1/2$  и  $-1/2$ . Удвоенное значение этой проекции и есть *спиральность*  $\lambda$ . У нейтрино  $\lambda = -1$  (спин направлен против импульса), и нейтрино обладает *левой спиральностью*. У антинейтрино  $\lambda = +1$  (спин направлен по импульсу), и нейтрино обладает *правой спиральностью*.



### Масса нейтрино и спиральность

Все нейтрино должны иметь  $\lambda = -1$ , а все антинейтрино имеют  $\lambda = +1$  при условии, что  $m_\nu = 0$ . Однако в настоящее время из некоторых экспериментов следует, что, например,  $m_{\nu_e} \leq 10^{-4}m_e$ , масса мюонного нейтрино сопоставима с массой электрона, а масса таонного нейтрино может ее даже превышать (эти данные пока точно не подтверждены). Речь идет о верхних границах масс, что не исключает равенства  $m_\nu = 0$ .

## 7.2.6. АДРОНЫ И ИХ ОПИСАНИЕ

### 7.48 Барийонное число. Мезоны и барионы

#### Адроны

Класс элементарных частиц, участвующих, наряду с электромагнитным и слабым, в сильном взаимодействии.

#### Семейство адронов

К адронам относятся протон, нейтрон, пионы, каоны, гипероны и т. д. (классификация адронов 7.33) и их античастицы.

#### Барийонное число $B$

Особое квантовое число, характеризующее адроны, выделяющее их из других элементарных частиц.

#### Мезоны

Подгруппа, в которую входят адроны с  $B = 0$  (пионы, каоны,  $\eta^0$ -мезон). Спин мезонов равен нулю, и они относятся к бозонам.

#### Барионы

Подгруппа, в которую входят адроны с  $B = +1$  (нуклоны и гипероны). Спин барионов равен  $1/2$  (кроме  $\Omega^-$ ), и они относятся к фермионам.

#### Законы сохранения барийонного числа

Если принять для барионов  $B = +1$ , для антибарионов (антинуклоны, антигипероны)  $B = -1$ , а для всех остальных частиц  $B = 0$ , то в замкнутой системе при всех процессах взаимопревращаемости элементарных частиц барийонное число сохраняется.

#### Следствие закона сохранения барийонного числа

При распаде бариона наряду с другими частицами обязательно образуется барион.

### 7.49 Изотопический спин и закон его сохранения

#### Изотопические мультиплеты

Элементарные частицы, одинаковым образом участвующие в сильном взаимодействии, имеющие близкие массы, один и тот же барийонный заряд, спин и отличающиеся зарядами.

**Пример:** дублет ( $p$  и  $n$ ), триплет ( $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ,  $\pi^0$ ).

#### Изотопический спин $I$

Внутренняя характеристика адронов, определяющая число ( $n$ ) частиц в изотопическом мультиплете:  $n = 2I + 1$ .

**Пример:** для нуклонов  $I = 1/2$  (число нуклонов в мультиплете 2), изоспин пиона  $I = 1$  (в пионном мультиплете  $n = 3$ ). Изоспин приписывается только частицам, участвующим в сильных взаимодействиях.

#### Закон сохранения изотопического спина

Во всех процессах, связанных с превращениями элементарных частиц, обусловленными зарядово-независимыми сильными взаимодействиями, изотопический спин сохраняется.

### 7.50 Гипероны. Странность и закон ее сохранения

#### Гипероны

Тяжелые нестабильные элементарные частицы, участвующие в сильных взаимодействиях и принадлежащие к группе адронов с массой, большей массы нуклона, обладающие барийонным зарядом.

## Типы гиперонов

Известно несколько типов гиперонов: лямбда ( $\Lambda^0$ ), сигма ( $\Sigma^0, \Sigma^+, \Sigma^-$ ), кси ( $\Xi^+, \Xi^-$ ) и омега ( $\Omega^-$ ). Их массы — в пределах (2183—3273) $m_e$ , спин 1/2 (только спин  $\Omega^-$ -гиперона равен 3/2), время жизни  $\sim 10^{-10}$  с (более детальные сведения в 7.53). Каждый гиперон имеет свою античастицу. Распадаются на нуклоны и легкие частицы ( $\pi$ -мезоны, электроны, нейтрино и  $\gamma$ -кванты). Например,  $\Lambda^0 \rightarrow \pi^- + p$ .

## Странность S

Специфическое квантовое число, характеризующее адроны, позволяющее объяснить особенности поведения гиперонов и мезонов.

## Закон сохранения странности

Странность сохраняется *только* в процессах сильного и электромагнитного взаимодействий.

## Следствия закона сохранения странности

Опытным путем установлено, что с  $\Lambda^0$ -гипероном всегда рождается  $K^0$ -мезон ( $p + \pi^- \rightarrow \Lambda^0 + K^0$ ). Если приписать каонам  $S = 1$ , а  $\Lambda^0$ - и  $\Sigma$ -гиперонам  $S = -1$  и считать, что у нуклонов и  $\pi$ -мезонов  $S = 0$ , то сохранение суммарной странности частиц в сильном взаимодействии объясняет совместное рождение  $\Lambda^0$ -гиперона с  $K^0$ -мезоном.

Из закона сохранения странности следовало существование частиц, таких, как  $\tilde{K}^0$ -мезон,  $\Sigma^0$ -,  $\Xi^0$ -гипероны, которые впоследствии были обнаружены экспериментально.

## 7.51 Четность и закон ее сохранения

### Четность

Квантовое число, характеризующее симметрию волновой функции элементарной частицы (или системы элементарных частиц) относительно зеркального отражения. Если при зеркальном отражении волновая функция частицы не меняет знака, то четность частицы  $P = +1$  (четность положительная), если меняет знак, то четность частицы  $P = -1$  (четность отрицательная).

### Закон сохранения четности

Четность сохраняется *только* в процессах сильного и электромагнитного взаимодействий.

## 7.52 Законы сохранения при различных взаимодействиях

Закон сохранения	Взаимодействие		
	сильное	электромагнитное	слабое
Энергии	+	+	+
Импульса	+	+	+
Момент импульса	+	+	+
Электрического заряда	+	+	+
Лептонного числа	+	+	+
Барионного числа	+	+	+
Изотопического спина	+	+	-
Странности	+	+	-
Четности	+	+	-

[«+» — закон выполняется; «-» — не выполняется]



## 7.2.7. КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

### 7.53 Три группы элементарных частиц

Элементарные частицы объединяются (см. таблицу) в три группы: *фотоны*, *лептоны* и *адроны*. Отнесенные к каждой из этих групп частицы обладают общими свойствами и характеристиками, которые отличают их от частиц другой группы. Характеристики античастиц не приводятся, поскольку модули зарядов и странности, массы, спины, изотопические спины и время жизни частиц и их античастиц одинаковы, они различаются лишь знаками зарядов и странности, а также знаками других величин, характеризующих их электрические (следовательно, и магнитные) свойства. В таблице нет также античастиц фотона и  $\pi^0$ - и  $\eta^0$ -мезонов, так как антифотон и антипи-ноль- и антиэта-ноль-мезоны тождественны с фотоном и  $\pi^0$ - и  $\eta^0$ -мезонами.

Группы частиц	Название частицы	Символ		Заряд, ед. $e$	Масса, ед. $m_e$	Спин, ед. $\hbar$	Изо-спин, $I$	Лептон-ное число, $L$	Барион-ное число, $B$	
		час-тицы	античас-тицы							
ФОТОНЫ	Фотон	$\gamma$		0	0	1	—	0	0	
ЛЕПТОНЫ	Электрон	$e^-$	$e^+$	1	1	1/2	—	+1	0	
	Электронное нейтрино	$\nu_e$	$\tilde{\nu}_e$	0	0	1/2	—	+1	0	
	Мюон	$\mu^-$	$\mu^+$	1	206,8	1/2	—	+1	0	
	Мюонное нейтрино	$\nu_\mu$	$\tilde{\nu}_\mu$	0	0	1/2	—	+1	0	
	Тау-лептон	$\tau^-$	$\tau^+$	1	3487	1/2	—	+	0	
	Таонное нейтрино	$\nu_\tau$	$\tilde{\nu}_\tau$	0	0	1/2	—	+1	0	
МЕЗОНЫ	Пи-мезоны	$\pi^0$		0	264,1	0	1	0	0	
		$\pi^+$	$\pi^-$	1	273,1	0	1	0	0	
	Ка-мезоны	$K^0$	$\tilde{K}^0$	0	974,0	0	1/2	0	0	
		$K^+$	$K^-$	1	966,2	0	1/2	0	0	
	Эта-мезон	$\eta^0$		0	1074	0	—	0	0	
АДРОНЫ	Барионы	Протон	$p$	$\tilde{p}$	1	1836,2	1/2	1/2	0	+1
		Нейтрон	$n$	$\tilde{n}$	0	1838,7	1/2	1/2	0	+1
	Ги пер о ны:									
	Барионы	лямбда	$\Lambda^0$	$\tilde{\Lambda}^0$	0	2183	1/2	0	0	+1
		сигма	$\Sigma^0$	$\tilde{\Sigma}^0$	0	2334	1/2	1	0	+1
			$\Sigma^+$	$\tilde{\Sigma}^+$	1	2328	1/2	1	0	+1
			$\Sigma^-$	$\tilde{\Sigma}^-$	1	2343	1/2	1	0	+1
		кси	$\Theta^0$	$\tilde{\Theta}^0$	0	2573	1/2	1/2	0	+1
			$\Theta^-$	$\tilde{\Theta}^-$	1	2586	1/2	1/2	0	+1
	омега	$\Omega^-$	$\tilde{\omega}^-$	1	3273	1/2	0	0	+1	

## 7.2.8. КВАРКИ

### 7.54 Понятие о кварках

#### Кварки

Фундаментальные гипотетические частицы, из которых, по современным представлениям, состоят все известные адроны.

#### Спин кварков

Равен  $1/2$  (в единицах  $\hbar$ ), поскольку только из фермионов можно «сконструировать» как фермионы (нечетное число фермионов), так и бозоны (четное число фермионов).

#### Необычность некоторых характеристик кварков

Кваркам приписываются *дробные* электрические и барионные заряды. Самое удивительное (почти невероятное) свойство кварков связано с их электрическим зарядом, поскольку еще никто не находил частиц с дробным значением элементарного электрического заряда.

### 7.55 Характеристики кварков

Кварк	Символ кварка (антикварка)	Электрический заряд [e]	Барионное число B	Спин [ $\hbar$ ]	Странность S
Верхний (up)	$u(\bar{u})$	$+\frac{2}{3}(-\frac{2}{3})$	$+\frac{1}{3}(-\frac{1}{3})$	$\frac{1}{2}$	0
Нижний (down)	$d(\bar{d})$	$-\frac{1}{3}(+\frac{1}{3})$	$+\frac{1}{3}(-\frac{1}{3})$	$\frac{1}{2}$	0
Очарованный (charm)	$c(\bar{c})$	$+\frac{2}{3}(-\frac{2}{3})$	$+\frac{1}{3}(-\frac{1}{3})$	$\frac{1}{2}$	-1 (+1)
Странный (strange)	$s(\bar{s})$	$-\frac{1}{3}(+\frac{1}{3})$	$+\frac{1}{3}(-\frac{1}{3})$	$\frac{1}{2}$	-1 (+1)
Истинный (truth)	$t(\bar{t})$	$+\frac{2}{3}(-\frac{2}{3})$	$+\frac{1}{3}(-\frac{1}{3})$	$\frac{1}{2}$	0
Прелестный (beauty)	$b(\bar{b})$	$-\frac{1}{3}(+\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}(+\frac{1}{3})$	$\frac{1}{2}$	0

### 7.56 Построение некоторых мезонов и барионов из кварков

Мезоны		Барионы	
Каждый мезон строится из одного кварка и одного антикварка		Каждый барион строится из трех кварков	
Частица	Состав	Частица	Состав
$\pi^+$	$u\bar{d}$	$p$	$uud$
$\pi^-$	$\bar{u}d$	$\bar{p}$	$\bar{u}\bar{u}\bar{d}$
$K^+$	$u\bar{s}$	$n$	$udd$
$K^-$	$\bar{u}s$	$\bar{n}$	$\bar{u}\bar{d}\bar{d}$
$K^0$	$d\bar{s}$	$\Sigma^+$	$uus$
$\bar{K}^0$	$\bar{d}s$	$\Sigma^-$	$dds$

**7.57 Квантовые числа для протона и нейтрона**

	<i>протон</i>	<i>нейтрон</i>
Комбинация кварков	<i>uud</i>	<i>udd</i>
Электрический заряд	$\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1$	$\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$
Барионное число $B$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$
Изотопический спин $I$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## 1. ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ЕДИНИЦЫ

В результате обобщения экспериментальных фактов, а также результатов деятельности людей устанавливаются физические законы — устойчивые повторяющиеся объективные закономерности, существующие в природе. Наиболее важные законы устанавливают связь между физическими величинами, для чего необходимо эти величины измерять. Измерение физической величины есть действие, выполняемое с помощью средств измерений для нахождения значения физической величины в принятых единицах. Единицы физических величин можно выбрать произвольно, но тогда возникнут трудности при их сравнении. Поэтому целесообразно ввести систему единиц, охватывающую единицы всех физических величин.

Для построения системы единиц произвольно выбирают единицы для нескольких не зависящих друг от друга физических величин. Эти единицы называются основными. Остальные же величины и их единицы выводятся из законов, связывающих эти величины и их единицы с основными. Они называются производными.

В настоящее время обязательна к применению в научной, а также в учебной литературе Система Интернациональная (СИ), которая строится на семи основных единицах — метр, килограмм, секунда, ампер, кельвин, моль, кандела — и двух дополнительных — радиан и стерадиан.

**Метр (м)** — длина пути, проходимого светом в вакууме за  $1/299\,792\,458$  с.

**Килограмм (кг)** — масса, равная массе международного прототипа килограмма (платиноиридиевого цилиндра, хранящегося в Международном бюро мер и весов в Севре, близ Парижа).

**Секунда (с)** — время, равное  $9\,192\,631\,770$  периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133.

**Ампер (А)** — сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, создает между этими проводниками силу, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на каждый метр длины.

**Кельвин (К)** —  $1/273,16$  часть термодинамической температуры тройной точки воды.

**Моль (моль)** — количество вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько атомов содержится в нуклиде  $^{12}\text{C}$  массой 0,012 кг.

**Кандела (кд)** — сила света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой  $540 \cdot 10^{12}$  Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет  $1/683$  Вт/ср.

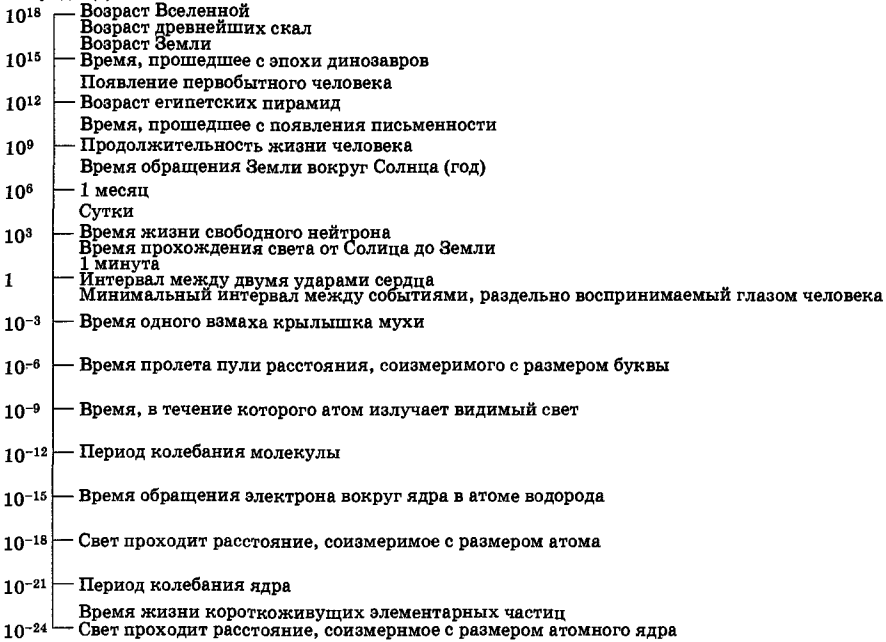
**Радиан (рад)** — угол между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу.

**Стерадиан (ср)** — телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающий на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы.

## 2. ДИАПАЗОНЫ РАЗЛИЧНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

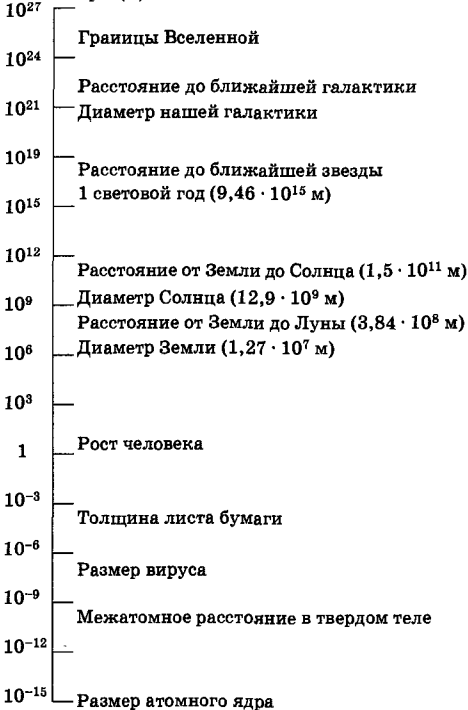
### ДИАПАЗОН ВРЕМЕННЫХ ИНТЕРВАЛОВ

Секунды (с)



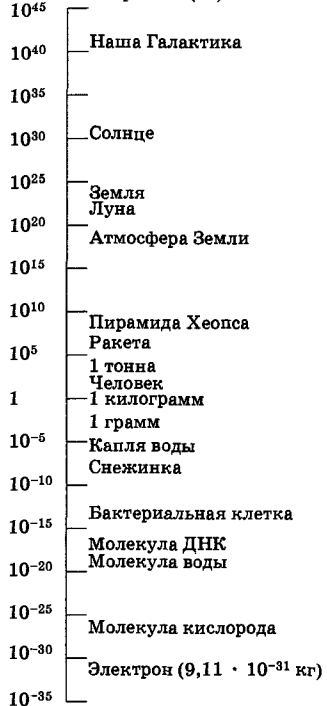
### ДИАПАЗОН РАСТОЯНИЙ И ДЛИН

Метры (м)



### ДИАПАЗОН ВЕЛИЧИН МАСС

Килограммы (кг)



### 3. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

#### 1. Физические основы механики

Средняя и мгновенная скорости $\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$
Среднее и мгновенное ускорения $\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$
Тангенциальная и нормальная составляющие ускорения $a_\tau = \frac{dv}{dt}; \quad a_n = \frac{v^2}{r}$
Полное ускорение $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n; \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$
Кинематические уравнения равнопеременного поступательного движения $\begin{cases} v = v_0 \pm at, \\ s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2} \end{cases}$
Угловая скорость $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}$
Угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
Кинематические уравнения равнопеременного вращательного движения $\begin{cases} \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t, \\ \varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2} \end{cases}$
Связь между линейными и угловыми величинами при вращательном движении $s = R\varphi; \quad v = R\omega; \\ a_\tau = R\varepsilon; \quad a_n = \omega^2 R$
Импульс (количество движения) $\vec{p} = m\vec{v}$
Второй закон Ньютона $\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$
Сила трения скольжения $F_{\text{тр}} = fN$

Закон сохранения импульса (для замкнутой системы) $\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \text{const}$
Работа переменной силы на участке траектории 1—2 $A = \int_1^2 F \cos \alpha \, ds$
Мгновенная мощность $N = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \vec{v}$
Кинетическая энергия $T = \frac{mv^2}{2}$
Потенциальная энергия тела, поднятого над поверхностью Земли, $\Pi = mgh$
Потенциальная энергия упруго деформированного тела $\Pi = \frac{kx^2}{2}$
Полная механическая энергия системы $E = T + \Pi$
Закон сохранения механической энергии (для консервативной системы) $T + \Pi = E = \text{const}$
Скорость шаров массами $m_1$ и $m_2$ после абсолютно упругого центрального удара $v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}; \\ v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$
Скорость шаров после абсолютно неупругого удара $\vec{v} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$
Момент инерции системы (тела) $J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$

Моменты инерции полого и сплошного цилиндров (или диска) относительно оси симметрии $J = mR^2; \quad J = \frac{1}{2} mR^2$	Напряженность поля тяготения $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$
Момент инерции шара относительно оси, проходящей через центр шара, $J = \frac{2}{5} mR^2$	Потенциал поля тяготения $\varphi = \frac{\Pi}{m} = -G \frac{M}{R}$
Момент инерции тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину, $J = \frac{1}{12} ml^2$	Взаимосвязь между потенциалом поля тяготения и его напряженностью $\vec{g} = -\text{grad } \varphi$
Момент инерции тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец, $J = \frac{1}{3} ml^2$	Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости $Sv = \text{const}$
Теорема Штейнера $J = J_c + ma^2$	Уравнение Бернулли $\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const}$
Кинетическая энергия вращающегося тела относительно неподвижной оси $T_{\text{вр}} = \frac{J_z \omega^2}{2}$	Релятивистское замедление хода часов $\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$
Момент силы относительно неподвижной точки $\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$	Релятивистское (Лоренцово) сокращение длины стержня $l'_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$
Момент силы относительно неподвижной оси $\vec{M}_z = [\vec{r}\vec{F}]_z$	Релятивистский закон сложения скоростей $u = \frac{u' + v'}{1 + v(u'/c^2)}; \quad u' = \frac{u - v}{1 - v(u'/c^2)}$
Момент импульса материальной точки относительно неподвижной точки $\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}]$	Релятивистский импульс $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$
Момент импульса твердого тела относительно неподвижной оси $L_z = \sum_{i=1}^n m_i v_i r_i = J_z \omega$	Закон взаимосвязи массы и энергии $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$
Уравнение динамики вращательного движения твердого тела $M_z = J_z \varepsilon; \quad \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	Связь между полной энергией и импульсом релятивистской частицы $E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$
Закон всемирного тяготения $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$	Кинетическая энергия в релятивистской динамике $T = mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right)$
Сила тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$	Энергия покоя $E_0 = mc^2$

## 2. Основы молекулярной физики и термодинамики

Закон Бойля—Мариотта $pV = \text{const}$ при $T, m = \text{const}$
Законы Гей-Люссака $V = V_0(1 + \alpha t)$ при $p, m = \text{const}$ , $p = p_0(1 + \alpha t)$ при $V, m = \text{const}$
Закон Дальтона $p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$
Уравнение Клапейрона—Менделеева для произвольной массы газа $pV = \frac{m}{M} RT = \nu RT$
Основное уравнение молекулярно-кинетической теории $p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2$
Средняя квадратичная скорость молекулы $\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$
Средняя арифметическая скорость молекулы $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$
Наиболее вероятная скорость молекулы $v_v = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$
Закон Максвелла о распределении молекул по скоростям $f(v) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-m_0 v^2 / (2kT)}$
Функция распределения молекул по энергиям теплового движения $f(\epsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \epsilon^{1/2} e^{-\epsilon / (kT)}$
Барометрическая формула $p = p_0 e^{-Mgh / (RT)}$
Средняя длина свободного пробега молекул $\langle l \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}$
Среднее число столкновений молекулы за 1 с $\langle z \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 n \langle v \rangle$
Закон теплопроводности Фурье $j_E = -\lambda \frac{dT}{dx}$

Теплопроводность (коэффициент) $\lambda = \frac{1}{3} c_V \rho \langle v \rangle \langle l \rangle$
Закон диффузии Фика $j_m = -D \frac{dp}{dx}$
Диффузия (коэффициент) $D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle$
Закон Ньютона для внутреннего трения (вязкости) $j_p = -\eta \frac{dv}{dx}$
Динамическая вязкость $\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle$
Средняя энергия молекулы $\langle \epsilon \rangle = \frac{i}{2} kT$
Внутренняя энергия произвольной массы газа $U = \nu \frac{i}{2} RT = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT$
Первое начало термодинамики $\delta Q = dU + \delta A$
Молярная теплоемкость газа при постоянном объеме $C_V = \frac{i}{2} R$
Молярная теплоемкость газа при постоянном давлении $C_p = \frac{i + 2}{2} R$
Уравнение Майера $C_p = C_V + R$
Работа газа при изменении его объема $\delta A = p dV$
Работа газа при изобарном расширении $A = p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1)$
Работа газа при изотермическом расширении $A = Q = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}$
Уравнения адиабатного процесса (уравнение Пуассона) $pV^\gamma = \text{const}; TV^{\gamma-1} = \text{const}; T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const}$



Работа газа при адиабатном расширении
$A = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2) = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right]$
Неравенство Клаузиуса
$\Delta S \geq 0$
Изменение энтропии системы при ее равновесном переходе из состояния 1 в состояние 2
$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = \frac{m}{M} \left( C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right)$
Формула Больцмана
$S = k \ln W$

Термический КПД для кругового процесса
$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$
Термический КПД цикла Карно
$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$
Внутренняя энергия 1 моль реального газа
$U_m = C_V T - \frac{a}{V_m}$
Уравнение Ван-дер-Ваальса для 1 моль реального газа
$\left( p + \frac{a}{V_m^2} \right) (V_m - b) = RT$

### 3. Электричество и электромагнетизм

Закон Кулона
$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ Q_1 Q_2 }{r^2}$
Напряженность электростатического поля
$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_0}$
Напряженность поля точечного заряда
$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$
Электрический момент диполя
$\vec{p} =  Q  \vec{l}$
Поток вектора напряженности электростатического поля сквозь замкнутую поверхность S
$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E_n dS$
Принцип суперпозиции
$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$
Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме
$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n Q_i$
Объемная, поверхностная и линейная плотности заряда
$\rho = \frac{dQ}{dV}; \quad \sigma = \frac{dQ}{dS}; \quad \tau = \frac{dQ}{dl}$
Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью,
$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

Напряженность поля, создаваемого двумя бесконечными параллельными разноименно заряженными плоскостями,
$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$
Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной сферической поверхностью,
$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (r \geq R), \quad E = 0 \quad (r < R)$
Напряженность поля, создаваемого объемно заряженным шаром,
$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (r \geq R), \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r' \quad (r' \leq R)$
Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженным бесконечным цилиндром,
$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r} \quad (r \geq R), \quad E = 0 \quad (r < R)$
Циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль замкнутого контура L
$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_L E_l dl = 0$
Потенциал электростатического поля
$\varphi = \frac{U}{Q_0} = \frac{A_{\infty}}{Q_0}$
Связь между потенциалом электростатического поля и его напряженностью
$\vec{E} = -\text{grad } \varphi;$
$\vec{E} = -\nabla \varphi$

Поляризованность $\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i$
Связь между векторами $\vec{P}$ и $\vec{E}$ $\vec{P} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$
Связь между $\varepsilon$ и $\varepsilon_0$ $\varepsilon = 1 + \varepsilon$
Связь между векторами $\vec{D}$ , $\vec{E}$ и $\vec{P}$ $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}; \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$
Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике $\oint_S \vec{D} \, d\vec{S} = \oint_S D_n \, dS = \sum_{i=1}^n Q_i$
Электрическая емкость уединенного проводника $C = \frac{Q}{\Phi}$
Электрическая емкость шара $C = 4\pi \varepsilon_0 \varepsilon R$
Электрическая емкость плоского конденсатора $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$
Электрическая емкость цилиндрического конденсатора $C = \frac{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon l}{\ln(r_2/r_1)}$
Электрическая емкость сферического конденсатора $C = 4\pi \varepsilon_0 \varepsilon \frac{r_2 r_1}{r_2 - r_1}$
Электрическая емкость параллельно соединенных конденсаторов $C = \sum_{i=1}^n C_i$
Электрическая емкость последовательно соединенных конденсаторов $\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$
Энергия заряженного уединенного проводника $W = \frac{C\Phi^2}{2} = \frac{Q\Phi}{2} = \frac{Q^2}{2C}$
Энергия заряженного конденсатора $W = \frac{C(\Delta\Phi)^2}{2} = \frac{Q\Delta\Phi}{2} = \frac{Q^2}{2C}$

Объемная плотность энергии электростатического поля $w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2}$
Сила тока $I = \frac{dQ}{dt}$
Плотность тока $j = \frac{dI}{dS}$
Электродвижущая сила, действующая в цепи $\mathcal{E} = \frac{A}{Q_0}; \quad \mathcal{E} = \oint \vec{E}_{\text{вн}} \, d\vec{l}$
Закон Ома для однородного участка цепи $I = \frac{U}{R}$
Закон Ома в дифференциальной форме $\vec{j} = \gamma \vec{E}$
Мощность тока $P = \frac{dA}{dt} = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}$
Закон Джоуля—Ленца $dQ = IU \, dt = I^2 R \, dt = \frac{U^2}{R} \, dt$
Закон Джоуля—Ленца в дифференциальной форме $w = jE = \gamma E^2$
Закон Ома для неоднородного участка цепи (обобщенный закон Ома) $I = \frac{\Phi_1 - \Phi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R}$
Правила Кирхгофа $\sum_k I_k = 0; \quad \sum_l I_l R_l = \sum_k \mathcal{E}_k$
Магнитный момент рамки с током $\vec{p}_m = IS\vec{n}$
Вращательный момент, действующий на рамку с током в магнитном поле, $\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}]$
Связь между индукцией и напряженностью магнитного поля $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$
Принцип суперпозиции магнитных полей $\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i$
Закон Био—Савара—Лапласа для элемента проводника с током $d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I(d\vec{l}, \vec{r})}{r^3}$

Магнитная индукция поля прямого тока $B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I}{R}$
Магнитная индукция поля в центре кругового проводника с током $B = \mu_0 \mu \frac{I}{2R}$
Закон Ампера $d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}]$
Магнитное поле свободно движущегося заряда $\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Q[\vec{v}\vec{r}]}{r^3}$
Сила Лоренца $\vec{F} = Q[\vec{v}\vec{B}]$
Закон полного тока для магнитного поля в вакууме (теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$ ) $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0 \sum_{l=1}^n I_k$
Магнитная индукция поля внутри соленоида (в вакууме), имеющего $N$ витков, $B = \mu_0 \frac{NI}{l}$
Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток) сквозь произвольную поверхность $\Phi_B = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = \oint_S B_n dS$
Теорема Гаусса для поля с магнитной индукцией $\vec{B}$ $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \oint_S B_n dS = 0$
Работа по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле $dA = I d\Phi$
Работа по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле $dA = I d\Phi'$
Индуктивность контура $L = \frac{\Phi}{I}$
Закон Фарадея $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$
ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}$

Индуктивность бесконечно длинного соленоида, имеющего $N$ витков, $L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l}$
Ток при размыкании цепи $I = I_0 e^{-t/\tau}$
Ток при замыкании цепи $I = I_0(1 - e^{-t/\tau})$
Энергия магнитного поля, связанного с контуром, $W = \frac{LI^2}{2}$
Объемная плотность энергии магнитного поля $w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}$
Намагниченность $\vec{J} = \frac{\vec{P}_m}{V} = \frac{\sum \vec{P}_a}{V}$
Связь между векторами $\vec{J}$ и $\vec{H}$ $\vec{J} = \chi \vec{H}$
Холловская поперечная разность потенциалов $\Delta\varphi = \frac{1}{en} \frac{IB}{d} = R \frac{IB}{d}$
Связь между $\mu$ и $\chi$ $\mu = 1 + \chi$
Закон полного тока для магнитного поля в веществе (теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$ ) $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0(I + I')$
Теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$ $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I$
Плотность тока смещения $\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$
Полная система уравнений Максвелла: в интегральной форме $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}; \quad \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV;$ $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}; \quad \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0;$ в дифференциальной форме $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \text{div } \vec{D} = \rho;$ $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad \text{div } \vec{B} = 0$

#### 4. Колебания и волны

<p>Уравнение гармонического колебания</p> $s = A \cos(\omega_0 t + \varphi);$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$	<p>Длина волны</p> $\lambda = vT$
<p>Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний величины <math>s</math></p> $\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0$	<p>Вектор Умова</p> $\vec{U} = w\vec{v}$
<p>Приведенная длина физического маятника</p> $L = \frac{J}{ml}$	<p>Уравнение плоской волны</p> $\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$
<p>Период колебаний физического маятника</p> $T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$	<p>Уравнение сферической волны</p> $\xi(r, t) = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0)$
<p>Период колебаний математического маятника</p> $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$	<p>Фазовая скорость</p> $v = \frac{\omega}{k}$
<p>Формула Томсона</p> $T = 2\pi \sqrt{LC}$	<p>Волновое уравнение</p> $\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$
<p>Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний величины <math>s</math></p> $\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$	<p>Групповая скорость</p> $u = \frac{d\omega}{dk}$
<p>Логарифмический декремент затухания</p> $\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T$	<p>Связь групповой и фазовой скоростей</p> $u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$
<p>Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний величины <math>s</math></p> $\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = x_0 \cos \omega t$	<p>Уравнение стоячей волны</p> $\xi = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t$
<p>Реактивное индуктивное сопротивление</p> $R_L = \omega L$	<p>Амплитуда стоячей волны</p> $A_{ст} = \left  2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right $
<p>Реактивное емкостное сопротивление</p> $R_C = \frac{1}{\omega C}$	<p>Эффект Доплера в акустике</p> $v = \frac{(v \pm v_{np})v_0}{v \mp v_{ист}}$
<p>Полное сопротивление цепи</p> $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L + \frac{1}{\omega C}\right)^2}$	<p>Вектор Умова—Пойнтинга</p> $\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}]$
	<p>Скорость распространения электромагнитных волн в среде</p> $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$

## 5. Оптика. Квантовая природа излучения

Закон отражения света $i'_1 = i_1$
Закон преломления света $\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n_{21}$
Формула сферического зеркала (для параксиальных световых пучков) $\frac{1}{f} = \frac{2}{R} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
Формула тонкой линзы $(N-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
Поток излучения $\Phi_e = \frac{W}{t}$
Энергетическая светимость $R_e = \frac{\Phi_e}{S}$
Энергетическая сила света $I_e = \frac{\Phi_e}{\omega}$
Энергетическая яркость $B_e = \frac{\Delta I_e}{\Delta S}$
Показатель преломления света $n = \frac{v}{c}$
Оптическая длина пути $L = ns$
Оптическая разность хода $\Delta = L_2 - L_1$
Связь между разностью фаз и оптической разностью хода $\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(L_2 - L_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta$
Условия интерференционных максимумов $\Delta = \pm m\lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$
Условия интерференционных минимумов $\Delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$

Оптическая разность хода в тонких пленках в отраженном свете $\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2}$
Радиусы зон Френеля $r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m\lambda$
Условия дифракционных максимумов от одной щели $a \sin \varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$
Условия дифракционных минимумов от одной щели $a \sin \varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$
Условия главных максимумов дифракционной решетки $d \sin \varphi = \pm m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$
Условия дополнительных минимумов дифракционной решетки $d \sin \varphi = \pm \frac{m'\lambda}{N} \quad (m' \neq 0, N, 2N, \dots)$
Формула Вульфа—Брэггов $2d \sin \vartheta = m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$
Разрешающая способность спектрального прибора $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$
Разрешающая способность дифракционной решетки $R = mN$
Закон Бугера $I = I_0 e^{-\alpha x}$
Продольный эффект Доплера $v = v_0 \frac{\sqrt{1 - v/c}}{\sqrt{1 + v/c}}$
Поперечный эффект Доплера $v = v_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}$
Степень поляризации $P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$

Закон Малюса $I = I_0 \cos^2 \alpha$
Закон Брюстера $\operatorname{tg} i_B = n_{21}$
Оптическая разность хода в эффекте Керра $\Delta = l (n_o - n_e) = k_2 l E^2$
Угол вращения плоскости поляризации в кристаллах $\varphi = \alpha d$
Угол вращения плоскости поляризации в растворах $\varphi = [\alpha] Cd$
Закон Кирхгофа для теплового излучения $r_{\nu, T} = \frac{R_{\nu, T}}{A_{\nu, T}}$
Энергетическая светимость черного тела $R_e = \int_0^\infty r_{\nu, T} d\nu$
Закон Стефана—Больцмана $R_e = \sigma T^4$
Закон смещения Вина $\lambda_{\max} = \frac{b}{T}$

Формула Рэлея—Джинса $r_{\nu, T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT$
Формула Планка $r_{\nu, T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)} - 1}$
Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта $h\nu = A + \frac{mv_{\max}^2}{2}$
Энергия фотона $\epsilon_0 = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$
Импульс фотона $p_\gamma = \frac{\epsilon_0}{c} = \frac{h\nu}{c}$
Давление света при нормальном падении на поверхность $p = \frac{E_e}{c} (1 + \rho) = w (1 + \rho)$
Изменение длины волны при эффекте Комптона $\Delta\lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \vartheta) = \frac{2h}{mc} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$

### 3. Элементы квантовой физики атомов, молекул и твердых тел

Обобщенная формула Бальмера $\nu = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$
Квантованные значения момента импульса электрона $m_e v_n r_n = n\hbar \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$
Второй постулат Бора (правило частот) $h\nu = E_n - E_m$
Энергия электрона в водородоподобном атоме $E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{Z^2 m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$
Длина волны де Бройля $\lambda = \frac{h}{p}$

Соотношение неопределенностей $\begin{cases} \Delta x \Delta p_x \geq \hbar, \\ \Delta y \Delta p_y \geq \hbar, \\ \Delta z \Delta p_z \geq \hbar, \\ \Delta E \Delta t \geq \hbar \end{cases}$
Плоская волна де Бройля $\Psi(x, t) = A e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}$
Вероятность нахождения частицы в элементе объема $dV$ $dW =  \Psi ^2 dV$
Условие нормировки вероятностей $\int_{-\infty}^{+\infty}  \Psi ^2 dV = 1$

<p>Принцип суперпозиции</p> $\Psi = \sum_n C_n \Psi_n$
<p>Общее уравнение Шредингера</p> $-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U(x, y, z, t) \Psi = i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$
<p>Уравнение Шредингера для стационарных состояний</p> $\Delta \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \Psi = 0$
<p>Линейный оператор</p> $\hat{L} (C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2) = C_1 \hat{L} \phi_1 + C_2 \hat{L} \phi_2$
<p>Линейный эрмитов оператор</p> $\int \psi_1^* L \psi_2 dV = \int \psi_2 L^* \psi_1^* dV$
<p>Уравнение для собственных функций и собственных значений оператора</p> $\hat{L} \psi = L \psi$
<p>Среднее значение величины <math>L</math> в состоянии <math>\psi</math></p> $\langle L \rangle = \int \psi^* \hat{L} \psi dV$
<p>Оператор координаты</p> $\hat{x} = x$
<p>Операторы проекции импульса соответственно на оси <math>x, y, z</math></p> $\hat{p}_x = -i \hbar \frac{\partial}{\partial x},$ $\hat{p}_y = -i \hbar \frac{\partial}{\partial y},$ $\hat{p}_z = -i \hbar \frac{\partial}{\partial z}$
<p>Оператор вектора импульса</p> $\hat{\vec{p}} = -i \hbar \nabla$
<p>Оператор момента импульса</p> $\hat{L} = -i \hbar [\vec{r}, \nabla]$
<p>Оператор проекции момента импульса на полярную ось <math>z</math></p> $\hat{L}_z = -i \hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$
<p>Оператор кинетической энергии</p> $\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta$
<p>Оператор потенциальной энергии</p> $\hat{U}(x, y, z) = U(x, y, z)$

<p>Оператор полной энергии</p> $\hat{H} = \hat{T} + \hat{U}$
<p>Общее уравнение Шредингера в операторной форме</p> $\hat{H} \Psi = i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$
<p>Уравнение Шредингера для стационарных состояний в операторной форме</p> $\hat{H} \psi = E \psi$
<p>Волновая функция, описывающая состояние частицы в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками,</p> $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$
<p>Собственные значения энергии частицы в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками</p> $E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$
<p>Коэффициент прозрачности прямоугольного потенциального барьера</p> $D = D_0 \exp \left[ -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U - E)} l \right]$
<p>Энергия квантового осциллятора</p> $E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$
<p>Уравнение Шредингера для электрона в атоме водорода</p> $\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0$
<p>Нормированная волновая функция, отвечающая 1s-состоянию электрона в атоме водорода,</p> $\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^2}} e^{-r/a}$
<p>Полная энергия атома водорода в магнитном поле</p> $E_{n,l,m_l} = -\frac{1}{n^2} \frac{m e^4}{8 \hbar^2 \epsilon_0^2} + \mu_B m_l B$
<p>Коротковолновая граница сплошного рентгеновского спектра</p> $\lambda_{\min} = \frac{c}{\nu_{\max}} = \frac{c \hbar}{eU}$
<p>Закон Мозли</p> $\nu = R (Z - \sigma)^2 \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$

## 7. Элементы физики атомного ядра и элементарных частиц

<p>Радиус ядра</p> $R = R_0 A^{1/3}$
<p>Энергия связи нуклонов в ядре</p> $E_{св} = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_{я}]c^2$
<p>Дефект массы ядра</p> $\Delta m = [Zm_p + (A - Z)m_n] - m_{я}$
<p>Магнетон Бора</p> $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$
<p>Ядерный магнетон</p> $\mu_n = \frac{e\hbar}{2m_p}$
<p>Закон радиоактивного распада</p> $N = N_0 e^{-\lambda t}$
<p>Период полураспада</p> $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$

<p>Среднее время жизни радиоактивного ядра</p> $\tau = \frac{1}{\lambda}$
<p>Активность нуклида</p> $A = \left  \frac{dN}{dt} \right  = \lambda N$
<p>Правило смещения для <math>\alpha</math>-распада</p> ${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + {}^4_2 \text{He}$
<p>Правило смещения для <math>\beta^-</math>-распада</p> ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + {}^0_{-1} e$
<p>Правило смещения для <math>\beta^+</math>-распада</p> ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + {}^0_{+1} e$
<p>Символическая запись ядерной реакции</p> $X + a \rightarrow Y + b \quad \text{или} \quad X(a, b)Y$



## 4. ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ЭЛЕМЕНТОВ Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

Период	Ряд	Г Р У П П Ы Э Л Е М Е Н Т О В																
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII									
I	1	(H)						H <sup>1</sup> Водород 1,00797	He <sup>2</sup> Гелий 4,0026	Обозначение элемента		Атомный номер						
II	2	Li <sup>3</sup> Литий 6,939	Be <sup>4</sup> Вериллий 9,0122	B <sup>5</sup> Бор 10,811	C <sup>6</sup> Углерод 12,01115	N <sup>7</sup> Азот 14,0067	O <sup>8</sup> Кислород 15,9994	F <sup>9</sup> Фтор 18,9984	Ne <sup>10</sup> Неон 20,179	Li <sup>3</sup> Литий 6,939								
III	3	Na <sup>11</sup> Натрий 22,9898	Mg <sup>12</sup> Магний 24,305	Al <sup>13</sup> Алюминий 26,9815	Si <sup>14</sup> Кремний 28,086	P <sup>15</sup> Фосфор 30,9738	S <sup>16</sup> Сера 32,064	Cl <sup>17</sup> Хлор 35,453	Ar <sup>18</sup> Аргон 39,948			Относительная атомная масса						
IV	4	K <sup>19</sup> Калий 39,102	Ca <sup>20</sup> Кальций 40,08	21 44,956	Sc <sup>22</sup> Скандий 47,90	Ti <sup>23</sup> Титан 50,942	V <sup>24</sup> Ванадий 51,996	Cr <sup>25</sup> Хром 54,9380	Mn <sup>26</sup> Марганец 55,847	Fe <sup>27</sup> Железо 58,9380	Co <sup>28</sup> Кобальт 58,71	Ni <sup>28</sup> Никель 58,71						
	5	29 63,546	Cu <sup>30</sup> Медь 65,37	Zn <sup>31</sup> Цинк 69,72	Ga <sup>32</sup> Галлий 72,59	Ge <sup>33</sup> Германий 74,9216	As <sup>34</sup> Мышьяк 78,96	Se <sup>35</sup> Селен 79,904	Br <sup>36</sup> Бром 83,80	Kr <sup>36</sup> Криптон 83,80								
V	6	Rb <sup>37</sup> Рубидий 85,47	Sr <sup>38</sup> Стронций 87,62	39 88,905	Y <sup>40</sup> Иттрий 91,22	Zr <sup>41</sup> Цирконий 92,906	Nb <sup>42</sup> Ниобий 92,906	Mo <sup>43</sup> Молибден 95,94	Tc <sup>43</sup> [99] Технеций	Ru <sup>44</sup> Рутений 101,07	Rh <sup>45</sup> Родий 102,905	Pd <sup>46</sup> Палладий 106,4						
	7	47 107,868	Ag <sup>48</sup> Серебро 112,40	Cd <sup>49</sup> Кадмий 114,82	In <sup>50</sup> Индий 114,82	Sn <sup>51</sup> Олово 118,69	Sb <sup>52</sup> Сурьма 121,75	Te <sup>53</sup> Теллур 127,60	I <sup>54</sup> Иод 126,9044	Xe <sup>54</sup> Ксенон 131,30								
VI	8	Cs <sup>55</sup> Цезий 132,905	Ba <sup>56</sup> Барий 137,34	57 138,91	La* Лантан	Hf <sup>72</sup> Гафний 178,49	Ta <sup>73</sup> Тантал 180,948	W <sup>74</sup> Вольфрам 183,85	Re <sup>75</sup> Рений 186,2	Os <sup>76</sup> Осмий 190,2	Ir <sup>77</sup> Иридий 192,2	Pt <sup>78</sup> Платина 195,09						
	9	79 196,967	Au <sup>80</sup> Золото 200,59	Hg <sup>81</sup> Ртуть 204,37	Tl <sup>82</sup> Таллий 204,37	Pb <sup>83</sup> Свинец 207,19	Bi <sup>84</sup> Висмут 208,980	Po <sup>85</sup> [210]* Полоний	At <sup>85</sup> [210] Астат	Rn <sup>86</sup> [222] Радон								
VII	10	Fr <sup>87</sup> [223] Франций	Ra <sup>88</sup> [226] Радий	89 [227]	Ac** Активный	104 [261]	Rf <sup>105</sup> Резерфордий [262]	105 [262]	Db <sup>106</sup> Дубний [263]	106 [263]	Sg <sup>107</sup> Сибборгий [262]	107 [262]	Bh <sup>108</sup> Борий [265]	108 [265]	Hs <sup>109</sup> Хассий [266]	109 [266]	Mt <sup>110</sup> Мейтнерий [266]	110

Лантаноиды*	58 140,12	Ce Церий	59 140,907	Pr Празеодим	60 144,24	Nd Неодим	61 [147]*	Pm Прометий	62 150,35	Sm Самарий	63 151,96	Eu Европий	64 157,25	Gd Гадолиний	65 158,924	Tb Тербий	66 162,50	Dy Диспрозий	67 164,930	Ho Гольмий	68 167,26	Er Эрбий	69 168,934	Tm Тулий	70 173,04	Yb Иттербий	71 174,97	Lu Лютеций
Актиноиды**	90 232,038	Th Торий	91 [231]	Pa Протактиний	92 238,03	U Уран	93 [237]	Np Нептуний	94 [244]	Pu Плутоний	95 [243]	Am Америций	96 [247]	Cm Кюрий	97 [247]	Bk Берклий	98 [252]*	Cf Калифорний	99 [254]	Es Эйнштейний	100 [257]	Fm Фермий	101 [257]	Md Менделеев	102 [255]	No Нобелий	103 [256]	Lr Лоуренсий

## 5. ПОСЛЕДНИЕ (САМЫЕ, САМЫЕ...) ДОСТИЖЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ НАУКИ И ТЕХНИКИ К КОНЦУ XX ВЕКА

---

- Наиболее точное число  $\pi$  вычислил вплоть до 6 442 450 000 десятичных знаков профессор Ясумаса (Япония).
- Самое маленькое отверстие (1992 г., Мюнхенский университет, Германия) — диаметр  $3,16 \cdot 10^{-10}$  м в поверхности, состоящей из молибдена дисульфида.
- Самая тонкая металлическая проволока (1995 г., Университет Глазго, Шотландия) — диаметр 3 нм (никель).
- Самый пластичный элемент — 1 г золота (Au) растягивается в длину на 2,4 км.
- Самый высокий предел прочности на разрыв у бора (B) составляет 5,7 ГПа.
- Наибольшая плотность вещества. Кусочек вещества нейтронной звезды размером с булавочную головку весит  $10^6$  т. Так, звезда Дженинга диаметром 20—30 км весит больше, чем Солнце.
- Наименее плотное твердое вещество (Ливерморская национальная лаборатория им. Лоуренса, штат Калифорния, США) — кремниевые аэрогели (плотность  $0,005 \text{ г/см}^3$ ), состоят из крошечных многослойных силиконовых шариков и атомов кислорода, которые отделены друг от друга воздушной прослойкой.
- Самые точные весы (Геттинген, Германия). На них можно взвешивать предметы массой до 0,5 г с точностью до  $10^{-8}$  г.
- Самый точный часовой механизм (1991 г., США): атомные часы, погрешность хода которых составляет 1 с в  $1,6 \cdot 10^6$  лет.
- Самая большая планета Солнечной системы — Юпитер (экваториальный диаметр 142 984 км, полярный диаметр 133 708 км). Ее масса в 317,828 раза больше Земли. У Юпитера самый короткий период вращения, и в его экваториальной зоне сутки делятся 9 ч 50 мин 30,003 с.
- Самая маленькая и холодная планета — Плутон (диаметр 2320 км, масса — 0,0021 массы Земли). Его температура близка к  $-235 \text{ }^\circ\text{C}$ .
- Самая яркая планета — при наблюдении с Земли из пяти планет, видимых при нормальных условиях невооруженным взглядом (Юпитер, Марс, Меркурий, Сатурн и Венера) — Венера.
- Самая высокая температура (1994 г., Принстонский университет, штат Нью-Джерси, США) —  $510\,000\,000 \text{ }^\circ\text{C}$  (в эксперименте использовалась дейтериево-третиевая плазменная смесь). Для сравнения: температура центральных частей самых горячих звезд составляет «только»  $1,5 \cdot 10^8 \text{ }^\circ\text{C}$ , температура центральной части Солнца  $1,5 \cdot 10^7 \text{ }^\circ\text{C}$ , а на поверхности Солнца только  $5,5 \cdot 10^3 \text{ }^\circ\text{C}$ .
- Самая низкая температура (1993 г., Лаборатория низких температур Хельсинского технологического университета, Финляндия) —  $2,8 \cdot 10^{-10} \text{ K}$  (использовано ядерное размагничивающее устройство).
- Самый маленький термометр (Университет штат Нью-Йорк, США) с диаметром наконечника 1 мкм ( $1/50$  диаметра человеческого волоса). Сконструирован для измерения температуры отдельных живых клеток.
- Самый легкий и самый тяжелый газы. При нормальных температуре и давлении ( $0 \text{ }^\circ\text{C}$ , 133 Па) самый легкий газ — это водород ( $0,00008989 \text{ г/см}^3$ ), а самый тяжелый — радон (Rn) ( $0,01005 \text{ г/см}^3$ ).
- Самый высокий критический ток в трубке (Хехшт, Германия) — сверхпроводящая керамическая трубка диаметром 11 см выдерживает ток  $12,5 \cdot 10^3 \text{ A}$  при температуре 77 К.

- Самый «горячий» сверхпроводник** (Цюрих, Швейцария). Самая высокая достигнутая критическая температура сверхпроводимости составляет  $-140,7\text{ }^{\circ}\text{C}$  (использованы керамические таблетки из смеси оксидов ртути, бария, кальция и меди).
- Самый тяжелый магнит** (Институт ядерных исследований, Дубна) — синхрофазотрон мощностью  $10\text{ ГэВ}$ , диаметром  $60\text{ м}$  и массой  $36\text{ }000\text{ т}$ .
- Самая маленькая призма** (1989 г., Национальный институт стандартов и технологии, штат Колорадо, США) — длина граней  $0,01\text{ мм}$ .
- Самый точный телескоп-рефлектор** (1976 г., Северный Кавказ, Россия) на высоте  $2080\text{ м}$  — диаметр  $6\text{ м}$ .
- Самый большой планетарий** (Музей науки, Ниихама, Япония) — диаметр  $30\text{ м}$ . В нем можно наблюдать до  $25\text{ }000$  звезд.
- Самая крупная солнечная электростанция** — Харпер-Лейк-Сайт на озере Харнер в пустыне Мохава (штат Калифорния, США) мощностью  $160\text{ МВт}$  (две станции по  $80\text{ МВт}$  каждая).
- Самый мощный лазер** (1996 г., Ливерморская национальная лаборатория им. Лоуренса, штат Калифорния, США) генерировал импульс мощностью  $1,3 \cdot 10^{15}\text{ Вт}$ . Используется для изучения фундаментальных свойств материи.
- Самый большой научный прибор** (Европейский центр ядерных исследований, Женева) — электронно-позитронное накопительное кольцо диаметром  $3,8\text{ м}$  и длиной  $27\text{ км}$ .
- Самый мощный ускоритель элементарных частиц** (Национальная ускорительная лаборатория Ферми, США) — при столкновении пучка  $p$  и  $\bar{p}$  получена энергия  $1,8 \cdot 10^{12}\text{ эВ}$ .
- Самый большой электромагнит** (Европейский центр ядерных исследований, Женева) — высота с четырехэтажное здание, объем —  $1728\text{ м}^3$ , масса —  $7810\text{ т}$ .
- Самое большое и самое малое количество изотопов.** Примерно существует  $2\text{ }670$  изотопов.
- Наибольшее количество изотопов —  $38$  у олова (Sn), а также и самое большое число устойчивых изотопов —  $10$ .
- Наименьшее количество открытых изотопов —  $3$  у водорода (H).
- Самый легкий и самый тяжелый изотопы.** Самый тяжелый нуклид — изотоп унубия ( $^{277}\text{Un}$ ), открытый в 1996 г., самый легкий — водорода ( $^1_1\text{H}$ ), или протий.
- Наиболее и наименее стабильные изотопы.** Самый стабильный радиоактивный изотоп — теллур-128 ( $^{128}\text{Te}$ ) — период полураспада  $1,5 \cdot 10^{24}$  лет, наименее стабильный изотоп —  $^5\text{Li}$  (период полураспада  $4,4 \cdot 10^{-22}\text{ с}$ ).
- Самый редкий элемент** — изотоп астата ( $^{215}\text{At}$ ) — в земной коре его содержится лишь  $0,16\text{ г}$ .
- Наиболее распространенные элементы.** Самый распространенный элемент как во Вселенной (более  $90\%$ ), так и в Солнечной системе ( $70,68\%$ ) — водород. Самый распространенный элемент на Земле ( $36\%$  массы) — железо. Самый распространенный элемент земной атмосферы ( $78,08\%$  объема, или  $75,72\%$  массы) — свободный азот ( $\text{N}_2$ ).
- Самый новый и самый тяжелый элемент** (1996 г., Дармштадт, Германия) — его номер  $112$ . Массовое число равно  $277$ , период распада —  $1/240$ -миллионная доля секунды.
- Самые холодные атомы** (Университет, штат Калифорния, США) были зафиксированы при температуре  $10\text{ нК}$  (по измерению их кинетической энергии).
- Наибольшая энергия управляемого термоядерного синтеза** (1994 г., Исследовательский термоядерный реактор с использованием магнитной ловушки в Токамаке, Принстонская лаборатория физики плазмы, США) составляет  $10,7 \cdot 10^6\text{ эВ}$ .

- Аберрации (погрешности)**  
 оптических систем **5.17**  
 — астигматизм **5.17**  
 — дисторсия **5.17**  
 — кома **5.17**  
 — сферическая **5.17**  
 — хроматическая **5.17**
- Автоколебания** **4.1**
- Адиабата** **2.56**
- Адроны** **7.46**
- Аддитивность энтропии** **2.65**
- Активность нуклида** **7.12**  
 — единица **7.12**
- Акустика** **4.55**
- Акцепторы** **6.123**
- Альфа-распад** **7.17**  
 — квантово-механическое описание **7.16**
- Ампер (единица силы тока)** **3.54**
- Ампер на метр (единица напряженности магнитного поля)** **3.96**
- Амплитуда биений** **4.17**  
 — волны **4.47**  
 — колебаний гармонических **4.3**  
 — — затухающих **4.23**
- Анализ поляризованного света** **5.59**  
 — рентгеноструктурный **5.51**
- Анализатор** **5.69**
- Аналогия описания поступательного и вращательного движений** **1.57**  
 — — механических и электромагнитных затухающих колебаний **4.25**  
 — электромагнитная **3.127**  
 — электромеханическая **3.126**
- Анизотропия веществ** **5.73**  
 — оптическая искусственная **5.5.54**  
 — — —, получение **5.59**
- Анизотропия монокристаллов** **2.94**
- Антикварк** **7.55**
- Антинейтрино** **7.47**
- Антинейтрон** **7.53**
- Антипротон** **7.53**
- Античастица** **7.23**, **7.24**
- Апогей** **1.51**
- Атом** **2.7**  
 — водорода в квантовой механике **6.37**  
 — — — — —, энергия **6.66**  
 — — — в теории Бора **6.6** — **6.8**  
 — — —, 1s-состояние **6.76**, **6.78**  
 — междуузельный **2.101**  
 — примесный **2.101**
- База** **6.144**
- Варионы** **7.46**
- Барьер потенциальной конечной ширины** **6.51** — **6.54**
- Беккерель (единица активности)** **7.12**  
 —, единица **7.12**
- Бел** **4.56**
- Бета-распад** **7.19**  
 —, механизм **7.20**; **7.21**  
 —, типы **7.19**
- Биения** **4.47**
- Бипризма Френеля** **5.28**
- Бозоны** **6.66**
- Вакансия** **2.101**
- Вакуум** **2.59**  
 —, характеристики **2.59**
- Ватт (единица мощности)** **1.36**
- Вебер (единица магнитного потока)** **3.104**
- Вектор магнитной индукции** **3.90**  
 — напряженности магнитного поля **3.90**  
 — перемещения **1.5**  
 — световой **3.4**  
 — Умова **2.46**  
 — Умова—Пойнтинга **2.70**
- Векторы аксиальные (псевдовекторы)** **1.15**
- Величины физические, средние значения** **6.31**  
 — —, возможность одновременного измерения **6.31**  
 — — фотометрические **5.114**  
 — — световые **5.114**  
 — — энергетические
- Вероятность термодинамическая** **2.66**
- Вес тела** **1.65**
- Вещества оптические активные** **6.59**  
 — — — лево- и правовращающие **6.93**  
 — — — сильномагнитные **3.136**  
 — — — слабомагнитные **3.136**
- Взаимодействие гравитационное** **7.41**  
 — обменное **6.92**  
 — проводников с током **3.94**  
 — сильное **7.41**  
 — слабое **7.41**  
 —, характер **7.42**  
 — электромагнитное **7.41**
- Вибратор Лебедева** **4.69**
- Волна** **4.41**  
 — бегущая **4.46**  
 — гармоническая **4.46**  
 — —, описание **4.45**  
 — де Бройля плоская **6.18**; **6.17**  
 — плоская **4.42**; **4.44**  
 — стоячая **4.53**  
 — сферическая **4.42**; **4.44**  
 — упругая поперечная **4.43**  
 — — продольная **4.43**
- Волны звуковые (акустические)** **4.53**  
 — когерентные **4.61**  
 — линейные **4.42**  
 — механические **4.42**  
 — монохроматические **5.21**  
 — на поверхности жидкости **4.42**  
 —, основные типы **4.42**  
 — поверхностные **4.42**  
 — пространственные **4.42**  
 — ультразвуковые **4.55**  
 — электромагнитные **4.42**  
 — —, поперечность **4.42**
- Вольт (единица потенциала)** **3.21**
- Восприимчивость вещества диэлектрическая** **3.33**  
 — — магнитная **3.131**
- Вращение плоскости поляризации** **5.62**; **5.66**; **5.62**  
 — рамки с током в магнитном поле **3.115**  
 — удельное **3.32**

- Время жизни радиоактивного ядра среднее **7.12**  
 — когерентности **5.21**  
 — релаксации **4.24**
- Высота звука **4.56**
- Вычисление разности потенциалов по напряженности поля **3.26** — **3.30**
- Вязкость **1.77**  
 — динамическая **1.77**;  
**2.37**  
 — —, единица **1.77**  
 — кинематическая **1.78**
- Газ идеальный **2.6**  
 — разреженный **2.39**  
 — реальный **2.76**  
 — —, свойства **2.76**  
 — ультраразреженный **2.41**  
 — —, свойства **2.41**
- Гамильтониан **6.27**
- Гамма-излучение ядер **7.29**  
 — —, описание **7.23**
- Генератор ламповый **4.63**  
 — оптический квантовый **6.3.10**
- Генри (единица индуктивности) **3.116**
- Герц (единица частоты) **4.3**
- Гипероны **7.50**
- Гипотеза Ампера **3.90**  
 — де Бройля **6.13**  
 — квантовая Планка **5.3.101**  
 — Максвелла **3.139**
- Гистерезис магнитный **3.138**  
 — электрический **3.40**
- Градиент плотности **2.36**  
 — потенциала **1.69**  
 — скорости **1.77**; **2.37**  
 — температуры **2.35**
- Градус Цельсия **2.4**
- Граница фотопроводимости **6.124**  
 — фотоэффекта красная **5.111**; **5.112**
- Громкость звука **4.56**
- Давление **3.71**  
 — внутреннее **2.78**  
 — гидростатическое **1.72**  
 — динамическое **1.74**  
 — излучения **5.6.3**  
 — —, квантовая и волновая теории **5.3.13**  
 — молекулярное **2.87**  
 — парциальное **2.11**  
 — под искривленной поверхностью жидкости **2.91**  
 — полное **1.74**  
 — статическое **1.74**
- Двигатель вечный второго рода **2.67**  
 — — первого рода **2.46**  
 — тепловой **2.66**
- Движение броуновское **2.60**  
 — вращательное **1.18**  
 — заряженной частицы в магнитном поле **3.97**  
 — плоское **1.5**  
 — поступательное **1.6**  
 — равномерное **1.8**  
 — точки по окружности **1.16**  
 — равноускоренное **1.8**  
 — тела, брошенного вертикально вверх **1.12**  
 — — — горизонтально **1.19**  
 — — — под углом к горизонту **1.14**
- Двойственность корпускулярно-волновая света **5.117**; **5.118**  
 — — частиц вещества **5.13**
- Декремент затухания **4.24**  
 — — логарифмический **4.24**
- Дефект массы ядра **7.5**
- Дефекты в кристаллах **2.100**  
 — — линейные **2.101**  
 — — макроскопические **2.100**  
 — — микроскопические **2.100**  
 — — точечный **2.101**
- Деформация **1.56**  
 — относительная **1.58**  
 — — поперечная **1.59**  
 — — продольная **1.58**  
 — пластическая **1.58**  
 — упругая **1.58**
- Децибел **4.56**
- Джоуль (единица работы, энергии) **1.35**
- Диаграмма напряжений **1.60**  
 — состояния **2.108**  
 — — термодинамическая **T—S** **2.73**  
 — — — —, представление изопроцессов **2.73**  
 — — — —, примеры пиков **2.74**
- Диамagnetики **3.130**
- Диамagnetизм **3.130**
- Диаметр молекулы эффективный **2.28**
- Диапазон электромагнитных волн **4.58**; **4.66**
- Динамика **1.2**
- Диод полупроводниковый **6.148**  
 — — плоскостной **6.149**  
 — — точечный **6.143**
- Диоптрия **5.14**
- Диполь электрический **3.8**
- Дисперсия аномальная **5.5.7**  
 — волн **4.47**  
 — — де Бройля **6.17**  
 — нормальная **5.57**  
 — света **5.4.3**  
 — —, элементарная теория **5.60**; **5.61**
- Диссипация энергии **1.49**
- Дифракция рентгеновского излучения **5.50**; **5.52**  
 — света **5.3**  
 — Фраунгофера (в параллельных лучах) **5.3.4**  
 — — на двух щелях **5.46**  
 — — на дифракционной решетке **5.49**  
 — — на одной щели **5.47**  
 — Френеля (в сходящихся лучах) **5.3.3**  
 — — на диске **5.46**  
 — — на круглом отверстии **5.45**
- Диффузия **2.34**; **2.36**
- Дихроизм **5.63**
- Диэлектрики ионные **3.31**  
 — с неполярными молекулами **3.31**  
 — с полярными молекулами **3.31**
- Длина волны **4.45**  
 — — де Бройля **6.14**  
 — — комптоновская **5.114**  
 — когерентности **5.21**  
 — приведенная физическое маятника **4.12**  
 — пути **1.5**  
 — — — — оптическая **5.24**  
 — — — — свободного пробега молекул **2.28**  
 — — — — средняя **2.28**  
 — — — — тел в разных системах отсчета **1.65**
- Длительность событий **1.85**
- Добротность колебательной системы **4.24**

- Доза биологическая 7.25  
 — излучения поглощенная 7.25  
 — — экспозиционная 7.25  
 Домены 3.137  
 Доноры 6.116  
 Дросселирование адиабатное 2.84  
 Дырка 6.114  
 Жесткость 1.40; 4.11  
 Жидкость идеальная  
 — —, свойства 1.71; 2.87  
 — несжимаемая 1.71  
 — несмачивающая 2.90  
 — смачивающая 2.90  
 Зависимость сопротивления температурная 3.34  
 Закон Авогадро 2.11  
 — Ампера 3.93  
 — Архимеда 1.72  
 — Био—Савара—Лапласа 3.92  
 — —, расчет полей 3.90; 3.92  
 — Бойля—Мариотта 2.8  
 — Больцмана о распределении энергии 2.43  
 — Брюстера 5.78; 5.74  
 — Бугера—Ламберта 5.62  
 — Бугера—Ламберта—Фабриканта 6.100  
 — Видемана—Франца 3.76  
 — Вина 5.99  
 — всемирного тяготения 1.62  
 — Галилея обобщенный 1.64  
 — Гейгера—Нэттола 7.17  
 — Гей—Люссака 2.9; 2.10  
 — Гука 1.59  
 — Дальтона 2.11  
 — движения центра масс 1.34  
 — Джоуля—Ленца 3.67  
 — —, дифференциальная форма 3.67  
 — — в классической теории металлов 3.75  
 — динамики основной для неинерциальных систем отсчета 1.29  
 — Дюлонга и Пти 2.102  
 — инерции 1.18  
 — квантования спина 6.77  
 — Кеплера второй 1.61  
 — — первый 1.61  
 — — третий 1.61  
 — Кирхгофа 5.97  
 — Кулона 3.8  
 — Малюса 5.70  
 — Мозли 6.91  
 — независимости световых пучков 5.1  
 — Ньютона (для внутреннего трения) 2.37  
 — — второй 1.20  
 — — — для неинерциальных систем отсчета 1.25  
 — — первый 1.19  
 — — третий 1.22  
 — — тяготения 1.62  
 — Ома  
 —, дифференциальная форма 3.63  
 —, замкнутая цепь 3.63  
 —, классическая теория металлов 3.75  
 — — обобщенный 3.68  
 — — —, анализ 3.69  
 — —, однородный участок цепи 3.63  
 — отражения света 5.1  
 — Паскаля 1.72  
 — полного тока для магнитного поля в вакууме 3.100  
 — — — — — в веществе 3.113  
 — постоянства углов 2.94  
 — преломления света 5.1  
 — прямолинейного распространения света 5.1  
 — радиоактивного распада 7.12  
 — релятивистской динамики основной 1.90  
 — Рэлея 5.85  
 — сложения скоростей классический 3.24  
 — — — — — релятивистский 1.87  
 — смещения Вина 5.99  
 — сохранения барионного числа 7.48  
 — — заряда 3.2  
 — зарядового числа 7.14  
 — — лептонного числа 7.46  
 — — изоспина 7.49  
 — — импульса 1.89  
 — — массового числа 7.14  
 — — момента импульса 1.56  
 — — релятивистского импульса 1.89  
 — — странности 7.50  
 — — четности 7.51  
 — — энергии 1.43  
 — — механической 1.41  
 — Стефана—Больцмана 5.99  
 — Столетова 5.108  
 — Фарадея 3.113  
 — Фика 2.36  
 — Фурье 2.35  
 Законы Вольты 6.129  
 — фотоэффекта внешнего 5.108  
 Замедление хода времени релятивистское 1.85  
 Заряд атомного ядра 7.2  
 — электрический 3.1  
 — — элементарный 3.1  
 — — точечный 3.3  
 — — пробный 3.4  
 Заряды индуцированные 3.44  
 — связанные 3.35  
 Захват электронный 7.22  
 Защита электростатическая 3.45  
 Звук реальный 4.57  
 Звуки музыкальные 4.59  
 Зеркала Френеля 5.27  
 Зеркало Ллойда 5.39  
 — плоское 5.4.2  
 — —, построение изображения 5.6  
 — — сферическое 5.7  
 — — вогнутое 5.7  
 — — выпуклое 5.7  
 — —, основные элементы 5.8  
 — —, особенности изображений 5.11  
 — —, построение изображений 5.10  
 Значение напряжения действующее 4.40  
 — тока действующее 4.40  
 — энергии собственное 6.25  
 Зона энергетическая 5.109  
 — — валентная 5.110  
 — — запрещенная 5.109  
 — — проводимости 5.110  
 — — разрешенная 5.109

Зоны Френеля **3.44**; **3.42**  
— —, прямолинейное рас-  
пространение света **3.43**

Излучатель массовый **4.63**

Излучение Вавилова—Че-  
ренкова **5.45**; **5.66**  
— вынужденное (индуци-  
рованное) **6.97**; **6.99**  
— космическое **7.27**  
— — вторичное **7.37**  
— — — жесткое **7.36**  
— — — мягкое **7.38**  
— — первичное **7.37**  
— радиоактивное **7.10**  
— —, виды **7.10**  
— спонтанное (самопроиз-  
вольное) **6.97**  
— тепловое (температур-  
ное) **5.61**  
— — равновесное **5.6.1**

Изобара **2.8**; **2.9**; **2.56**

Изобары **7.3**; **7.4**

Изомультиплеты **7.49**

Изотерма **2.8**; **2.56**

— критическая **2.80**

Изотермы Ван-дер-Ваальса  
**2.80**

— —, анализ **2.81**

Изотоны **7.3**; **7.4**

Изотопы **7.3**; **7.4**

Изохора **2.10**; **2.54**

Импульс материальной точ-  
ки **1.16**

—, единица **1.19**

— релятивистский **1.89**

— системы материальных  
точек **1.34**

Инверсия заселенностей  
**6.99**; **6.101**

Индуктивность **3.11**

—, единица **3.11**

Индукция взаимная **3.122**

— магнитная **3.86**

— —, единица **3.95**

— электростатическая

**3.44**

— электромагнитная **3.112**

Инертность тел **1.19**

— контура электрическая

**3.119**

Инжекция **3.146**

Интенсивность волны **4.46**

— звука **4.59**

Интервал между двумя собы-  
тиями **1.86**

Интерференция волн **4.51**

— света **5.23**

— — методом деления

амплитуды **5.2.5**

— — — волнового фрон-  
та **5.2.4**

— — — поляризованного **5.5.7**;

**5.87**; **5.88**

Интерферометр **5.2.7**

— двулучевой **5.3.7**

— Майкельсона **5.3.7**

— Фарби—Перо (многолу-  
чевой) **5.3.8**

Ионизатор **3.79**

Ионизация газов **3.79**

— ударная **3.81**

Испарение **2.104**

Источник света, когерент-  
ные свойства **5.22**

ЭДС **1.55**

Камера Вильсона **7.28**

— диффузионная **7.28**

— ионизационная им-  
пульсная **7.27**

— — интегрирующая **7.27**

— искровая **7.27**

— пузырьковая **7.28**

Ка-мезоны **7.53**

Кандела (единица силы све-  
та), с. 397

Капилляр **2.92**

Капиллярность **2.92**

Катодолюминесценция **6.27**;  
**6.126**

Квант **5.101**

Кварки **7.54**

—, характеристики **7.55**;

**7.56**

Кельвин (единица темпера-  
туры), с. 397

Килограмм (единица массы)

**1.16**

Кинематика **1.2**

Когерентность **4.11**; **5.21**

— временная **5.21**

— пространственная **5.21**

Колебания **4.1**

— вынужденные **4.1**; **4.26**

— — электромагнитные

**4.26**

— гармонические **4.2**

— —, комплексная форма

**4.6**

—, деление по признакам

**4.1**

— затухающие свободные

**4.21**

— — — линейной системы

**4.21**

— — — в колебательном

контуре **4.23**

— — — пружинного маят-  
ника **4.22**

— — — линейно поляризован-  
ные **4.19**

— непериодические **4.1**

— периодические **4.1**

— свободные **4.1**

— циркулярно поляризо-  
ванные **4.19**

— электромагнитные **4.1**

— — в колебательном кон-  
туре **4.14**

— — —, дифференци-  
альное уравнение **4.15**

— эллиптически поляризо-  
ванные **4.18**

— — —, анализ **4.19**

Количество вещества **2.7**

— —, единица **2.7**

— теплоты (теплота) **2.45**

— — приведенное **2.64**

Коллектор **3.144**

Кольца Ньютона **5.34**

Компаунд-ядро **7.29**

Конверсия внутренняя **7.23**

Конденсатор **3.4**

— плоский **3.4**

— —, соединения **3.748**

— сферический **3.4**

— цилиндрический **3.47**

Конденсация **2.104**

Контакт двух металлов по  
зонной теории **6.130**; **6.131**

— металла и полупровод-  
ника **6.135—6.137**

— электронного и дыроч-  
ного полупроводника

**6.139—6.141**

Контур колебательный **4.13**

— — открытый **4.63**

— с током в магнитом поле

**3.85**

Коэффициент восстановления

тока **1.46**

— вторичной электронной

эмиссии **3.76**

— диффузии **2.36**

— затухания **4.22**; **4.23**

— мощности **4.40**

— отражения **5.48**

— полезного действия для

кругового процесса **2.62**

— — — цикла Карно **2.72**

- прозрачности **6.46**
- размножения нейтронов **1.19**
- сопротивления **4.22**
- теплопроводности **2.35**
- трансформации **3.123**
- упругости **1.40**; **4.11**
- холодильный **2.70**
- Кривая дисперсии** **3.51**
- инверсии **2.86**
- потенциальная **1.44**
- , анализ **1.45**
- Кривые резонансные амплитудные** **4.27**
- фазовые **4.28**
- фазового равновесия **2.106**
- Кристаллизация (затвердевание)** **2.105**
- Кристаллофосфоры** **6.128**
- , люминесценция **6.128**
- Кристаллы** **2.96**
- атомные **2.98**
- двусосные **5.75**
- ионные **2.98**
- металлические **2.98**
- молекулярные **2.98**
- одноосные **5.75**
- отрицательные **5.79**—**5.82**
- турмалина **5.83**
- Кристаллизация** **2.105**
- Критерий Рэлея** **5.53**
- Кулон (единица электрического заряда)** **3.1**
- Лазер** **6.102**
- газовый **6.102**; **6.105**
- жидкостный **6.102**
- полупроводниковый **6.102**
- , свойства излучения **6.107**
- твердотельный **6.102**; **6.104**
- , элементы **6.103**
- Лептоны** **7.45**
- Ливень электронно-позитронный-фотонный** **7.38**
- Линза** **5.13**
- , основные элементы **5.13**
- , особенности изображений **5.16**
- , построение изображений **5.15**
- рассеивающая **5.12**
- собирающая **5.12**
- тонкая **5.13**
- , типы **5.12**
- Линии напряженности поля тяготения** **1.66**
- — электростатического поля **3.6**
- магнитной индукции **3.87**
- электрического смещения **3.95**
- Линия тока** **1.73**
- удара **1.46**
- Ловушки неохлаждаемые** **2.40**
- охлаждаемые **2.40**
- Луч необыкновенный** **5.76**; **5.77**
- обыкновенный **5.76**; **5.77**
- Лучепреломление двойное** **5.53**
- — в одноосном кристалле **5.76**
- Люкс (единица освещенности)** **5.19**
- Люмен (единица светового потока)** **5.19**
- Люминесценция** **6.125**
- Люминофоры** **6.125**
- Магнетик** **3.191**
- Магнеток Бора** **3.129**
- ядерный **7.77**
- Магнит** **3.16**
- Магниты полосатые** **3.68**
- Манометр** **1.75**
- Масса критическая** **7.93**
- молярная **2.7**
- , единица **2.7**
- тела **1.19**
- гравитационная **7.19**
- инертная **3.19**
- Материал вязкий** **1.60**
- хрупкий **1.60**
- Машина холодильная** **2.70**
- Маятник математический** **4.10**
- —, описание колебаний **4.11**
- пружинный **4.11**
- —, описание колебаний **4.11**
- физический **4.11**
- —, описание колебаний **4.11**
- Мезоны** **7.40**; **7.44**; **7.49**
- Мениск** **2.92**
- Метод вращающегося вектора амплитуды** **4.5**
- зон Френеля **5.41**; **5.42**
- исследования статистический **2.2**
- — термодинамический **2.2**
- Пуазейля **1.80**
- Стокса **1.79**
- Юнга **5.26**
- ядерного магнитного резонанса **7.7**
- Метр (единица длины), с.** **397**
- Механика** **1.2**
- квантовая **1.2**
- —, математический аппарат **6.26**
- классическая
- релятивистская **1.2**; **1.61**
- Модель атома ядерная (планетарная)** **6.1**
- — Резерфорда **6.1**
- — —, недостатки **6.2**
- — Томсона **6.1**
- идеального газа **2.6**
- кварковая **7.55**; **7.56**
- физическая **1.3**
- ядра капельная **7.9**
- — оболочечная **7.9**
- Модуль мгновенной скорости** **1.7**
- Юнга **1.59**
- Молекула** **2.7**; **6.92**
- , как квантовая система **6.93**
- , энергия **6.94**; **6.95**
- Молекулы двухатомные** **6.92**
- многоатомные **6.92**
- неполярные **3.31**
- полярные **3.31**
- Момент атомов магнитный** **3.190**
- диполя электрический **3.8**
- импульса относительно неподвижной оси **1.55**
- — — — точки **1.55**
- — — — твердого тела **1.55**
- инерции тела **1.49**
- — однородных тел **1.51**
- — сплошного цилиндра **1.50**
- силы относительно неподвижной оси **1.53**
- — — — — точки **1.53**



- электрона орбитальный механический 3.128
- — орбитальный магнитный 3.128
- — собственный магнитный 3.129
- — — механический спин 3.128; 3.129; 6.59
- — — магнитный 6.77
- вращающий на рамку с током в магнитном поле 3.86
- ядра магнитный 7.7
- Монокристаллы 2.94
- Мост Уитстона 3.72
- — реохордный 3.72
- Мощность 1.36
- дозы излучения 7.25
- — поглощенная 7.25
- — экспозиционная 7.25
- мгновенная 4.39
- средняя 4.39
- тока удельная тепловая 3.67
- Мультиплеты изотопические 7.49
- Муоны 7.39
- Нагреватель 2.69
- Намагниченность 3.131
- Накачка 6.99
- Напряжение 1.59; 3.57
- задерживающее 5.107
- нормальное 1.59
- тангенциальное 1.59
- Напряженность поля гравитационного 1.69
- — магнитного 3.88
- — —, единица 3.99
- — точенного заряда 3.5
- — электростатического 3.4
- — —, единица 3.4
- Насос водоструйный 1.76
- Насосы диффузионные 2.40
- форвакуумные 2.40
- Насыщение магнитное 3.137
- Натяжение поверхностное 2.86
- Начало термодинамики второе 2.67
- — —, статистическое толкование 2.67
- — — первое 2.46
- — —, применение для изопрощесов 2.54—2.56
- — третье 2.68
- Невесомость 1.66
- Нейтрино 7.47; 7.53
- — мюонное 7.45; 7.53
- — таонное 7.53
- — электронное 7.47; 7.53
- Нейтроны 7.41; 7.31
- — быстрые 7.31
- — высокоэнергетичные 7.31
- — деление 7.32
- — запаздывающие 7.32
- — мгновенные 7.32
- — медленные 7.31
- — очень холодные 7.31
- — резонансные 7.31
- — релятивистские 7.31
- — ультрахолодные 7.31
- — холодные 7.31
- Неравенство Клаузиуса 2.64
- Несмачивание полное 2.90
- Носители элементарного электрического заряда 3.1
- Нуклон 7.1
- Ньютон (единица силы) 1.20
- Облако электронное 6.69
- Область слышимости 4.56
- Оболочки электронные в атоме 6.86
- — —, распределение электронов 6.66
- Объем критический 2.60
- — молярный 2.7
- — —, единица 2.7
- Одновременность событий 1.84
- Однородность времени 1.41
- — пространства 1.33
- Ом (единица сопротивления) 3.58
- Оператор 6.27
- — вектора импульса 6.33
- — Гамильтонан (наб-ла-оператор) 6.36
- — квадрата момента импульса 6.35
- — кинетической энергии 6.36
- — координаты 6.33
- — Лапласа 4.47
- — линейный 6.29
- — проекции момента импульса на полярную ось 6.34
- — — эрмитов 6.28
- — —, свойства 6.27
- — — момента импульса 6.33
- — полной энергии 6.36
- — потенциальной энергии 6.36
- Операторы коммутрующие 6.27
- — некоммутирующие 6.36
- — проекции момента импульса 6.33
- —, произведение 6.27
- —, разность 6.27
- —, связь с опытом 6.32
- —, сумма 6.27
- —, уравнение для собственных значений 6.35
- Описание поля в диэлектрике 3.32
- Оптика 5.1
- — волновая 5.2.1
- — геометрическая 5.1
- — Опыт Ламмерта 2.32
- — Рикке 3.42
- — Стюарта и Толмена 3.71
- — Штерна 2.31
- — Эрстеда 3.84
- Опыты Девиссона и Джермера 6.165
- — —, выводы 3.109; 3.112
- — Франка и Герца 6.11
- — Штерна и Герлаха 6.76
- Освещенность 5.19
- —, единица 5.19
- Оспилятор 4.9
- — гармонический 4.9
- — классический 4.9
- — квантовый 6.57; 6.58
- — —, плотности вероятности 6.59; 6.60
- Ось вращения 1.6
- — оптическая зеркала 5.8
- — — линзы главная 5.12
- — — — побочная 5.13
- — — кристалла 5.75
- Отклонение статическое 4.27; 4.30
- Относительность одновременности 1.84
- Отношение гиромагнитное орбитальных моментов 3.126
- — — спиновых моментов 3.127
- — — ядерное 7.7
- Отражение полное 5.2
- Падение тел свободное 1.11
- Пакет волновой 4.29

- Пар насыщенный **2.81**  
 Парамагнетизм **3.131**  
 Парамагнетики **3.131**  
 Параметры критические  
 — состояния системы термодинамической **2.3**  
 — элементарной ячейки **2.97**  
 Парообразование **2.104**  
 Пары электронно-позитронные **7.24**  
 Паскаль (единица давления) **3.71**  
 Переход вынужденный (индуцированный) **6.97**  
 — фазовый первого рода **2.107**  
 — второго рода **2.107**  
 — электронно-дырочный ( $p-n$ -переход) **5.4.10**  
 Период биений **4.17**  
 — вращения **1.18**  
 — колебаний **4.3**  
 — полураспада **7.12**  
 — —, примеры **7.13**  
 Перигелий **1.63**  
 Петля гистерезиса **3.50**;  
**3.137**  
 Плавление **2.105**  
 Плазма **3.83**  
 — высокотемпературная **3.83**  
 — газоразрядная **3.83**  
 — изотермическая **3.89**  
 — неізотермическая **3.83**  
 —, свойства **3.83**  
 —, степень поляризации **3.81**  
 Пластика в полдлинны волны **5.85**  
 — — целую длину волны **5.85**  
 — — четверть длины волны **5.89**  
 Пластики зонные **5.44**  
 Плечо диполя **3.9**  
 Плоскость главная одноосного кристалла **5.75**  
 — поляризатора главная **5.89**  
 — фокальная **5.13**  
 Плотность вероятности **6.23**  
 — заряда линейная **3.17**  
 — — объемная **3.12**  
 — — поверхностная **3.13**  
 — полного тока **3.146**  
 — потока импульса **2.37**  
 — — массы **2.36**  
 — — энергии **4.46**  
 — — — электромагнитной **4.70**  
 — — теплового потока **2.36**  
 — — тока **3.54**  
 — —, единица **3.54**  
 — — поляризации **3.142**  
 — — смещения **2.140**; **3.142**  
 — — — в вакууме **3.142**  
 — — энергии объемная **3.125**  
 — — энергетической светимости спектральная **5.94**  
 — — — черного тела **5.97**  
 Поверхность волновая **4.44**  
 — проводника **3.41**  
 — разрыва **3.146**  
 — сферическая **5.78**  
 — эквипотенциальная **1.69**; **3.24**  
 — эллипсоидальная **5.78**  
 Поглощение излучения **6.97**  
 — света (абсорбция) **6.97**  
 Подоболочки **8.86**  
 Позитрон **7.19**  
 Показатель адиабаты **2.57**  
 — преломление абсолютный **5.1**  
 — — относительный **5.1**  
 Поле диполя **3.9**  
 — магнитное **3.84**  
 — — в веществе **3.133**  
 — —, движение частиц **3.99**  
 — — движущегося заряда **3.97**  
 — — Земли **3.89**  
 — — соленоида **3.104**  
 — — тороида **3.105**  
 — — кругового тока **3.90**  
 — — макроток **3.90**  
 — — микроток **3.90**  
 — —, характерные особенности **3.85**  
 — —, характеристнки основные **3.86**  
 — — прямого тока **3.103**  
 — — потенциальное **1.33**  
 — — самосогласованное **6.106**  
 — — тяготения (гравитационное) **1.64**  
 — — однородное **1.65**  
 — — центральное **1.66**  
 — — электрическое **3.4**  
 — — вихревое **3.71**  
 — — электромагнитное **3.143**  
 — — электростатическое **3.4**  
 — — бесконечного цилиндра **3.17**  
 — — бесконечной плоскости **3.13**  
 — — Двух плоскостей **3.14**  
 — — объемно заряженного шара **3.16**  
 — — сферической поверхности **3.15**  
 — — потенциальное **3.4**  
 Поликристаллы **2.94**  
 Полимеры **2.95**  
 Политропа **2.60**  
 Полосы интерференционные равного наклона **5.33**  
 — — равной толщины **5.33**  
 Полупроводники дырочные ( $p$ -типа) **5.118**  
 — —, уровень Ферми **6.120**  
 — — собственные **6.4.3**  
 — — примесные **6.4.4**  
 — — электронные ( $n$ -типа) **6.119**  
 — —, уровень Ферми **6.120**  
 Полус зеркала **5.8**  
 Поляризатор **5.69**  
 —, главные плоскости **5.69**  
 —, прохождение света **5.71**  
 Поляризаторы **5.5.4**  
 Поляризация диэлектрика **3.32**  
 — — ионная **3.32**  
 — — ориентационная (дипольная) **3.32**  
 — — электронная (деформационная) **3.32**  
 — — света **5.5**  
 Поляризованность **3.33**  
 Поляриоды **5.83**  
 Поправки Ван-дер-Ваальса **2.79**  
 Порог Болевого ощущения **4.56**  
 — слышимости **4.56**  
 Порядок в расположении частиц ближний **2.101**  
 — — — дальний **2.101**  
 Постоянная Авогадро **2.7**  
 — —, опытное определение **2.53**  
 — Больцмана **2.14**  
 — Вина **5.99**  
 — гравитационная **1.62**;  
**1.63**  
 — дифракционной решетки **5.49**  
 — магнитная **3.95**  
 — молярная газовая **2.14**  
 — Планка **5.100**

- радиоактивного распада 7.12
- Ридберга 6.3
- Стефана—Больцмана 5.90
- Холла 3.101
- электрическая 3.3
- Постулат Эйнштейна второй 1.82
  - — первый 1.82
- Постулаты Бора 6.6
  - —, опытное подтверждение 6.12
- Потенциал поля тяготения 1.68
  - — —, единица 1.68
  - — электростатического 3.21
- Потолок вектора магнитной индукции 3.106
  - — напряженности электростатического поля 3.10
  - — — —, единица 3.10
  - — — —, примеры вычисления 3.11
  - — — —, единица 3.106
  - — — —, интерпретация 3.7
  - — — —, сквозь соленоид 3.108
  - — электрического смещения 3.36
  - — — —, единица 3.36
  - — излучения 5.18
  - —, единица 5.18
  - — световой 5.19
  - —, единица 5.19
  - — энергии 4.46
- Правила Кирхгофа 3.70
  - —, применение 3.71; 3.72
  - отбора 5.70
  - смещение ( $\alpha$ -распад) 7.14
  - — ( $\beta$ -распада) 7.14
- Правило левой руки 3.96
  - Ленца 6.114
  - правого винта 3.85; 3.127
  - сложения скоростей в классической механике 1.24
- Предел пропорциональности 1.60
  - текучести 1.60
  - упругости 1.60
- Преобразования Галилея 1.23
  - — — Лоренца 1.83
- Приближение адиабатическое 6.108
  - самосогласованного поля 6.108
- Призма, спектральный прибор 5.58
  - , ход лучей 5.5
  - Нйколя (нйколь) 5.83
  - поляризационная 5.83
- Призмы полного отражения 5.3
  - поляризационные двулучевые 5.5.4
  - — однолучевые 5.5.4
- Признаки классификации кристаллов 2.96
  - — —, кристаллографический 2.96; 2.97
  - — —, физический 5.5.4
- Принцип возрастания энтропии 2.66
  - Гюйгенса 5.20
  - —, вывод законов отражения и преломления 5.20
  - Гюгейгенса—Френеля 5.40
  - зарядового сопряжения 7.49
  - инвариантности скорости света 1.82
  - независимости действия сил 1.21
  - неразличимости тождественных частиц 6.83
  - относительности Галилея 1.24
  - — Эйнштейна 1.82
  - Паули 6.84
  - —, квантово-механическая формулировка 6.35
  - соответствия Бора 5.11
  - суперпозиции волн 4.48
  - — полей магнитных 3.91
  - — — электростатических 3.7; 3.21
  - — — состояний для волновых функций 6.23
- Природа носителей тока в металлах 3.73
- Проводимость газов 3.79
  - контактного слоя 6.131
  - — — односторонняя 6.139
  - полупроводника при-месная 6.122
  - — — дырочная ( $p$ -типа) 6.119
- — — электронная ( $n$ -типа) 6.118
- — — удельная 6.116
- —  $p$ — $n$ -перехода одно-сторонняя (вентильная) 6.141
- электрическая 3.61
- —, единица 3.61
- Проводник уединенный 3.46
- Проводники 3.41
  - второго рода 3.41
  - первого рода 3.41
  - , соединения 3.64
- Проницаемость среды ди-электрическая 3.34
  - — магнитная 3.88
- Просветление оптики 6.35
- Пространство катодное тем-ное 3.80
  - Фарадеево темное 3.80
- Протон 7.1
- Процесс волновой (волна) 4.41
  - адматный 2.57
  - изобарный 2.9
  - изохорный 2.10
  - изотермический 2.8
  - изоэнтропийный 2.65
  - круговой (цикл) 2.62
  - политропный 2.60
  - равновесный 2.48
  - термодинамический 2.3
  - — необратимый 2.63
  - — обратимый 2.63
- Псевдовекторы 1.15
- Пси-функция 8.121
  - , статистический смысл 5.21
  - , физический смысл 6.22
- Пучности стоячей волны 4.53
- Работа в гравитационном по-ле 1.67
  - выхода электрона из ме-талла 3.77
  - — — —, единица 3.77
  - газа в адиабатном про-цессе 2.59
  - перемещение заряда в электростатическом поле 3.18
  - — контура с током 3.110
  - — проводника с током 3.109
  - при вращении тела 1.54
  - при расширении 2.47
  - тока 3.65
  - силы 1.35



- притяжения 2.76
  - сторонние 3.55
  - —, природа 3.55
  - ядерные 7.6
  - —, свойства 7.8
  - Сименс (единица проводимости) 3.61
  - Симметрия кристаллической решетки 2.97
  - Сингонии 2.97
  - Система диссипативная 1.43
    - замкнутая 1.32
    - координат 1.4
    - консервативная 1.42
    - материальных точек 1.3
    - механическая 1.32
    - — замкнутая 1.32
    - накачки 6.103
    - отсчета 1.4
    - — инерциальная 1.18
    - — неинерциальная 1.18
    - термодинамическая 2.3
    - — замкнутая 2.3
    - элементов Периодическая 6.87
  - Системы, кристаллографические 2.97
  - Скин-эффект 3.117
  - Скорости средние движения электронов 3.74
  - Скорость 1.7
    - , единица 1.7
    - волн групповая 4.49; 4.50
    - — фазовая 4.47
    - космическая вторая 1.70
    - — первая 1.70
    - — третья 1.70
    - наиболее вероятная 2.22
    - средняя квадратичная 2.17
    - — молекул 2.22
    - точки 1.7
    - мгновенная 1.7
    - — средняя 1.7
    - угловая 1.15
    - —, единица 1.16
  - Сложение колебаний взаимно перпендикулярных 4.18
    - — одного направления 6.16
    - — с разными частотами 4.20
  - Слои высокоотражающие 5.36
  - Слой контактный запирающий 6.138
  - Смачивание 2.90
    - полное 2.90
  - Смерть Вселенной тепловая 2.67
  - Смещение красное 5.67
    - фиолетовое 5.67
    - электрическое 3.35
  - Соединение конденсаторов 3.48
  - Сокращение Лоренцево 1.86
  - Сюленойд 3.104
  - Сопоставление характеристик полей тяготения и электростатического и электростатического 3.25
  - Соотношения неопределенностей Гейзенберга 6.16 — 6.20
  - Сопrotивление полное 4.36
    - реактивное 4.36
    - — емкостное 4.33
    - — индуктивное 4.34
    - электрическое 3.58
    - —, зависимость от температуры 3.52
    - удельное 3.58
    - —, примеры 3.59; 3.60
  - Состояние вещества, критерии 2.7
    - — газообразное 2.77
    - — жидкое 2.77
    - — твердое 2.77
    - (—) критическое 2.60
    - метастабильное 6.101
    - системы с инверсией населенностей 6.99
    - энергетическое возбужденное 2.77
    - — основное 6.67
  - Состояния агрегатные 2.106
  - Спектр акустический 4.57
    - — линейчатый 4.57
    - — сплошной 4.57
  - атома водорода по Бору 6.8; 6.3.2
    - — — излучения 6.3
    - — — — в квантовой механике 6.71
    - — — — — поглощения 6.71
    - дифракционный 5.47; 5.48; 5.59
    - молекулярный 6.96
    - — колебательно-вращательный 6.96
    - — колебательный 6.96
  - — электронно-колебательный 6.96
  - — электронный 6.96
  - — полосатый 6.96
  - — призматический 3.58; 5.59
  - — рентгеновский 6.3.7
  - — тормозной 6.88 — 6.90
  - — характеристический 6.89
  - — зонный 6.109
- Спектроскопия рентгеновская 5.51
- Спектры поглощения 5.63
- Спин изотопический 7.49
  - электрона 3.126; 6.77
  - ядра 7.7
- Спиральность 7.47
- Способность разрешающая дифракционной решетки 5.56
  - — объектива 5.54
  - — спектрального прибора 5.55
  - — спектральная поглощательная 5.94
- Сравнение газовых процессов 2.61
  - напряженности и потенциала полей 3.22
  - тяготения и электростатического 3.22
- Среда активная 6.99
  - внешняя 2.3
  - изотропная 4.44
  - мутная 5.64
  - однородная 4.44
  - сплошная 4.41
- Статика 1.2
- Степень ионизации плазмы 3.81
  - поляризации 5.71
- Стерadian, с. 397
- Странность 7.50
- Сублимация (возгонка) 2.104
- Сфера молекулярного действия 2.87
- Сцинтилляции 7.27
- Счетчик газоразрядный 7.27
  - — Гейгера—Мюллера 7.27
  - — пропорциональный 7.27
  - — полупроводниковый 7.27
  - — сцинтилляционный 7.27
  - — черенковский 7.27

- Тело абсолютно твердое 1.3  
 — аморфное 2.93  
 — кристаллическое 2.93  
 — неупругое 1.3  
 — отчета 1.4  
 — серое 5.96  
 — упругое 1.3  
 — черное 5.96; 5.96
- Тембр звука 4.57
- Температура 2.4  
 — инверсии 2.86  
 — критическая 2.80  
 — парообразования 2.104  
 — радиационная 5.104  
 — цветовая 5.104  
 — яркостная 5.104
- Теорема Гаусса для магнитного поля 3.106  
 — — — электростатического поля в вакууме 3.12  
 — — — — диэлектрике 3.97  
 — Карно 2.69  
 — Нернста—Планка 2.68  
 — о кинетической энергии 1.37  
 — о циркуляции вектора магнитной индукции 3.102  
 — — — — намагниченности 5.134  
 — — — — напряженности магнитного поля 3.134  
 — — — — — обобщенная 3.144  
 — — — — электростатического поля 3.19  
 — Штейнера 1.50
- Теория Бора 5.12 6.10  
 — Максвелла для электромагнитного поля 3.7  
 — относительности специальной 1.81  
 — твердых тел зонная 5.43  
 — — — —, диэлектрики 6.112; 6.113  
 — — — —, металлы 6.111; 6.113  
 — — — —, полупроводники 6.112; 6.113  
 — электропроводности металлов классическая 3.73  
 — — — —, трудности 3.76
- Теплоемкость 2.49; 2.52; 2.53  
 —, единица 2.49  
 — молярная 2.49  
 — —, единица 2.49
- —, температурная зависимость 2.51  
 — — при постоянном давлении 2.50  
 — — — — объеме 2.50  
 — — твердых тел 2.102  
 — удельная 2.49  
 — —, единица 2.49  
 — — химических соединений 2.103
- Теплопроводность 2.34; 2.35  
 Теплота 2.45  
 — парообразования 2.104  
 — — удельная 2.104  
 — Пельтье 6.133  
 — плавления 2.105  
 — — удельная 2.105
- Термодинамика 2.1  
 Термостат 2.89
- Тесла (единица магнитной индукции) 3.96
- Течение 1.73  
 — ламинарное (слоистое) 1.78  
 — турбулентное (вихревое) 1.78  
 — установившееся (стационарное) 1.73
- Ток индукционный 3.111; 3.112  
 — конвекционный 3.53  
 — переменный 4.31  
 — полный 3.143  
 — постоянный 3.52  
 — проводимости 3.53  
 — смещения 3.141  
 — электрический 3.53  
 — —, условия возникновения 3.53
- Токи вихревые (токи Фуко) 3.117  
 — микроскопические 3.125  
 — при замыкании цепи 3.121  
 — — размыкании цепи 3.121
- Толщина пленки оптическая 5.35
- Торойд 3.105
- Точка критическая 2.80  
 — Кюри 3.50; 3.137  
 — материальная 1.3  
 — реперная 2.4  
 — тройная 2.108
- Точки реперные 2.4
- Траектория 1.5
- Транзистор 6.124
- Трансформатор 3.123  
 — — — — повышающий 3.123  
 — — — — понижающий 3.123
- Трение внешнее 1.30  
 — внутреннее 1.30; 3.34; 2.36  
 — качения 1.30  
 — покоя 1.30  
 — скольжения 1.30
- Триболюминесценция
- Триод полупроводниковый (транзистор) 6.144  
 — — плоскостной 6.144  
 — — точечный 6.144
- Трубка Вентури 1.75  
 — Пито 1.75  
 — Прандтля 1.75  
 — тока 1.73
- Угол Брюстера 5.73; 5.74  
 — краевой 2.89  
 — поворота элементарный 1.15  
 — предельный 5.2  
 — скольжения 5.50
- Удар (соударение) 1.46  
 — абсолютно неупругий 1.46  
 — — упругий 1.47  
 — центральный 1.46
- Узел стоячей волны 4.53  
 — электрической цепи 3.68
- Узлы кристаллической решетки 2.93
- Упаковка атомов в решетке 2.96  
 — — — — двухслойная 2.99  
 — — — — плотная 2.99  
 — — — — трехслойная 2.96
- Уравнение адиабатного процесса 2.57  
 — Бернулли 1.74  
 — Ван-дер-Ваальса 2.79  
 — волновое 4.47  
 — волны плоской 4.47  
 — — стоячей 4.53  
 — — сферической 4.47  
 — — электромагнитной дифференциальное 4.69  
 — гармонического осциллятора дифференциальное 4.9  
 — динамики вращательно-го движения 1.54  
 — Клапейрона 2.12  
 — Клапейрона—Менделеева 2.13

- Клапейрона—Клаузиуса 2.109
- колебаний вынужденных 4.26
- — гармонических 4.4
- — свободных затухающих 4.22
- Майера 2.50
- неразрывности 1.73
- основное молекулярно-кинетической теории идеальных газов 2.15; 2.16
- Шредингера в операторной форме 6.26
- — — — — стационарное 6.26
- — — — — временное 6.24
- — — — — стационарное 6.25
- Эйнштейна для внешнего фотоэффекта 5.109; 5.110
- Уравнения движения точки кинематические 1.4
- Максвелла в дифференциальной форме 3.147
- — — — — интегральной форме 3.145
- — — — — для стационарных полей 3.146
- — — — —, применение 3.148
- — — — —, следствия 4.68
- Уровень громкости 4.56
- интенсивности звука 4.56
- Уровни акцепторные 6.119
- донорные 6.113
- энергетические возбуденные 6.62
- — — — — основные 6.62
- Ускорение 1.8
- , единица 1.9
- мгновенное 1.8
- , нормальная составляющая 1.8
- полное 1.8
- среднее 1.8
- , тангенциальная составляющая 1.3
- угловое 1.17
- — — — —, единица 1.17
- Условие интерференционных максимумов 4.52; 5.25
- — — — — минимумов 4.52; 5.25
- нормировки вероятностей 6.22
- Условия на границе раздела двух магнетиков 3.135; 3.136
- Участок цепи неоднородный 3.68
- — — — — однородный 3.63
- Фаза (в термодинамике) 2.106
- колебаний 4.3
- — — — — начальная 4.3
- Фарад (единица электроемкости) 3.46
- Фермионы 3.83
- Ферромагнетки 3.137
- жесткие 3.138
- мягкие 3.138
- Фигуры Лиссажу 4.20
- Физика 1.1
- Флуоресценция 6.129
- Фокус зеркала главный 5.8
- — — — — линзы 5.13
- Фон (единица уровня громкости) 4.56
- Формула барометрическая 2.26
- Больцмана 2.66
- Вина 5.100
- Вульфа—Брэггов 5.50
- — — — —, применение 5.51
- зеркала сферического 5.9
- Лапласа 2.91
- линзы тонкой 5.14
- Лоренца 3.98
- Планка 5.102; 5.103
- — — — —, вывод частных законов 5.103
- Рэлея—Джинса 5.100
- Торричелли 1.76
- Формы передачи энергии 2.45
- Фосфоресценция 6.126
- Фотолуминесценция 6.127
- Фотометрия 5.14
- Фотон 5.101
- Фотопроводимость полупроводников 6.45
- — — — — примесная 6.123
- — — — — собственная 6.123
- Фототок насыщения 5.107
- Фотоэмульсии ядерные 7.28
- Фотоэффект 5.62
- , безынерционность 5.110
- вентильный 5.105
- внешний 5.105
- внутренний 5.105
- Фронт волновой 4.44
- Функции оператора взаимно ортогональные 6.29
- — — — — ортогональные и нормированные 6.29
- — — — — собственные 6.29
- — — — —, свойства 6.29
- Функция волновая 6.23
- — — — — антисимметричная 6.82
- — — — — симметричная 6.82
- — — — —, статистический смысл 6.21
- Кирхгофа универсальная 6.97
- распределения Максвелла по скоростям 2.20
- — — — — энергиям 2.23; 2.24
- Характеристика вольт-амперная газового разряда 3.61
- — — — —  $p$ - $n$ -перехода 5.142
- — — — — фотоэффекта 5.107
- Хемилуминесценция 5.126
- Холодильник 2.69
- Центр качаний физического маятника 4.12
- оптический зеркала сферического 5.8
- — — — — линзы 5.13
- масс системы материальных точек 1.34
- — — — —, радиус-вектор 1.34
- — — — —, скорость 1.34
- Цепь переменного тока 4.31—4.36
- Цикл Карно 2.71
- — — — —, КПД 2.71
- — — — —, работа за цикл 2.71
- — — — — обратный 2.62
- — — — — протонно-протонный 7.38
- — — — — прямой 2.62
- — — — — углеродно-азотный 7.36
- Циркуляция вектора магнитной индукции 3.102
- — — — — напряженности вихревого электрического поля 3.140
- — — — — электростатического поля 3.19
- — — — — поля сторонних сил 3.56
- Цуг волновой 5.21

- Частица свободная** 6.2.6  
 — —, уравнение Шредингера 6.38
- Частицы истинно нейтральные** 7.44  
 — тождественные 6.91  
 — —, свойства волновых функций 6.62  
 — элементарные 7.53  
 — —, классификация 7.53  
 — —, законы сохранения 7.52
- Частота вращения** 1.16  
 — колебаний 4.3  
 — —, единица 4.3  
 — — круговая (циклическая) 4.3; 4.15  
 — — резонансная 4.27; 4.30  
 — — собственная 4.25
- Четность** 7.51
- Числа квантовые** 6.84
- Число барионов** 7.48  
 — волновое 4.45  
 — зарядовое ядра 7.2  
 — квантовое 6.63  
 — — главное 6.64  
 — — магнитное 6.65  
 — — орбитальное 6.65  
 — — спиновое магнитное 6.77  
 — координационное 2.99  
 — лептонное 7.46  
 — Лошмидта 2.14  
 — массовое 7.2  
 — Рейнольдса 1.78  
 — степеней свободы молекул 2.41  
 — столкновений молекул среднее 2.29
- Ширина интерференционной полосы** 5.30
- Шкала температурная международная практическая** 2.4  
 — — термодинамическая 2.4  
 — электромагнитных волн 4.63
- Шумы** 4.56
- Эквивалентность магнитных свойств тока и заряда** 3.100
- Экстраполяция самоиндукции** 3.118
- Емкость конденсатора** 3.47  
 — — плоского 3.47  
 — — сферического 3.47  
 — — цилиндрического 3.47  
 — — уединенного проводника 3.47  
 — шара 3.46
- Электрон** 3.1; 7.53  
 —, описание состояния 6.68
- Эмиссия автоэлектронная** 3.78  
 — вторичная электронная 3.78  
 — термоэлектронная 3.78  
 — фотоэлектронная 3.78
- Эмиттер** 6.144
- Энергия** 1.35  
 —, графическое представление 1.44  
 — активации 7.32  
 — внутренняя 2.44  
 — — реального газа 2.82  
 — возбуждения 6.19  
 — волн стоячей 4.54  
 — заряженного конденсатора 3.51  
 — ионизации 3.79; 6.9  
 — атома водорода 6.62  
 — кинетическая 1.37  
 — — вращающегося твердого тела 1.52  
 — — в релятивистской динамике 1.92  
 — — гармонических колебаний 4.8  
 — — средняя молекулы 2.16; 2.25  
 — механическая полная 1.46  
 — нулевых колебаний 6.56  
 — поверхностная 2.88  
 — покоя 1.91  
 — полная релятивистской частицы 6.97  
 — поля магнитного 3.124  
 — — — солонида 3.123  
 — — электростатического 3.52  
 — потенциальная 1.39  
 — — заряда 3.20  
 — — гармонических колебаний 4.8  
 — — межмолекулярного взаимодействия 2.76  
 — — упругодеформированного тела 1.40; 1.59
- связи данного состояния 6.9  
 — — ядра 7.5  
 — — — удельная 7.6  
 — системы неподвижных точечных зарядов 3.48  
 — Ферми 6.115; 6.120; 6.121  
 — электрона в атоме водорода 6.7
- Энтальпия** 2.84
- Энтропия** 2.64  
 —, единица 2.64  
 —, ее измерение 2.65  
 —, статистическое толкование 2.65
- Эффект Джоуля—Томсона** 2.84; 2.85  
 — диамагнитный 3.129  
 — Доплера в акустике 4.60—4.62  
 — — для электромагнитных волн 6.67  
 — — — — — поперечный 5.67  
 — — — — — продольный 5.67  
 — Зеемана 6.78  
 — — аномальный 6.78  
 — — нормальный 6.78 — 6.80  
 — Керра 5.90  
 — Комптона 5.64  
 — —, интерпретация 5.113; 5.116  
 — парамагнитный 3.129  
 — Тиндаля 5.84  
 — туннельный 6.53; 6.55  
 — —, коэффициент прозрачности 6.54; 6.55  
 — Холла 3.101
- Явление Зеебека** 6.132  
 — Пельтье 6.133  
 — Томсона 6.134  
 — электромагнитной индукции капиллярные 2.92
- Явления капиллярные** 2.92  
 — переноса 2.94
- Ядро атома** 7.1  
 — — дочернее 7.14  
 — — материнское 7.14  
 — —, состав 7.1
- Яма потенциальная одномерная с бесконечно высокими стенками** 6.39—6.41
- Яркость энергетическая** 5.18  
 — —, единица 5.18
- Ячейка Керра** 5.90



# СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	4
<b>1. Физические основы механики</b>	
<b>1.1. Основы кинематики</b>	
1.1.1. Структура механики и различные физические модели .....	5
1.1.2. Механическое движение .....	6
1.1.3. Кинематика поступательного движения .....	7
1.1.4. Примеры различных видов движения .....	9
1.1.5. Кинематика вращательного движения твердого тела .....	13
<b>1.2. Основы динамики поступательного движения</b>	
1.2.1. Инерциальные системы отсчета. Масса и импульс тела. Сила .....	15
1.2.2. Второй и третий законы Ньютона .....	17
1.2.3. Принцип относительности Галилея .....	18
1.2.4. Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции .....	19
1.2.5. Силы трения .....	22
1.2.6. Законы сохранения импульса и движения центра масс .....	23
<b>1.3. Работа и энергия</b>	
1.3.1. Энергия, работа, мощность .....	25
1.3.2. Кинетическая и потенциальная энергия .....	26
1.3.3. Закон сохранения энергии .....	29
1.3.4. Графическое представление энергии .....	31
1.3.5. Удар абсолютно упругих и неупругих тел .....	32
<b>1.4. Механика твердого тела</b>	
1.4.1. Момент инерции. Кинематическая энергия вращения .....	35
1.4.2. Момент силы. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела .....	37
1.4.3. Момент импульса и закон его сохранения .....	38
1.4.4. Деформации твердого тела .....	40
<b>1.5. Тяготение. Элементы теории поля</b>	
1.5.1. Законы Кеплера. Закон всемирного тяготения .....	43
1.5.2. Гравитационное поле. Сила тяжести и вес .....	44
1.5.3. Характеристики гравитационного поля. Космические скорости .....	45
<b>1.6. Элементы механики жидкостей</b>	
1.6.1. Давление в жидкости и газе. Уравнение неразрывности .....	48
1.6.2. Уравнение Бернулли и некоторые его применения .....	50
1.6.3. Вязкость (внутреннее трение). Режимы течения жидкостей .....	53
1.6.4. Методы определения вязкости .....	54
<b>1.7. Элементы релятивистской механики</b>	
1.7.1. Постулаты специальной теории относительности (СТО) .....	55
1.7.2. Преобразования Лоренца и следствия из них .....	57
1.7.3. Интервал между событиями .....	61
1.7.4. Импульс и энергия материальной точки в релятивистской динамике .....	61
<b>2. Основы молекулярной физики и термодинамики</b>	
<b>2.1. Молекулярно-кинетическая теория идеальных газов</b>	
2.1.1. Статистический и термодинамический методы исследования .....	64
2.1.2. Термодинамические системы, параметры и процессы .....	65
2.1.3. Законы, описывающие поведение идеальных газов .....	66
2.1.4. Уравнение состояния идеального газа .....	70

2.1.5.	Основное уравнение молекулярно-кинетической теории (МКТ) . . . . .	72
2.1.6.	Закон Максвелла о распределении молекул идеального газа по скоростям и энергиям теплового движения . . . . .	74
2.1.7.	Барометрическая формула. Распределение Больцмана . . . . .	77
2.1.8.	Среднее число столкновений и длина свободного пробега молекул . . . . .	78
2.1.9.	Некоторые подтверждения молекулярно-кинетической теории . . . . .	79
2.1.10.	Явления переноса в термодинамически неравновесных системах . . . . .	81
2.1.11.	Основные представления о свойствах разреженных газов . . . . .	83

## 2.2. Основы термодинамики

2.2.1.	Закон Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы . . . . .	85
2.2.2.	Первое начало термодинамики . . . . .	87
2.2.3.	Работа газа при изменении его объема . . . . .	88
2.2.4.	Теплоемкости. Уравнение Майера . . . . .	88
2.2.5.	Применение первого начала термодинамики к изопроцессам . . . . .	91
2.2.6.	Адиабатный и политропный процессы . . . . .	92
2.2.7.	Круговой процесс (цикл). Обратимый и необратимый процесс . . . . .	95
2.2.8.	Энтропия . . . . .	97
2.2.9.	Второе и третье начала термодинамики . . . . .	99
2.2.10.	Тепловые двигатели и холодильные машины. . . . .	100
2.2.11.	Цикл Карно . . . . .	102
2.2.12.	Термодинамическая диаграмма $T-S$ и ее применение . . . . .	103

## 2.3. Реальные газы, жидкости и твердые тела

2.3.1.	Силы и потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия . . . . .	105
2.3.2.	Уравнение состояния реальных газов. . . . .	107
2.3.3.	Изотермы Ван-дер-Ваальса и их анализ . . . . .	108
2.3.4.	Внутренняя энергия реального газа . . . . .	109
2.3.5.	Эффект Джоуля—Томсона . . . . .	110
2.3.6.	Свойства жидкостей. Поверхностное натяжение . . . . .	112
2.3.7.	Смачивание. . . . .	114
2.3.8.	Давление под искривленной поверхностью. Капиллярные явления . . . . .	115
2.3.9.	Твердые тела: кристаллические и аморфные . . . . .	116
2.3.10.	Типы кристаллических твердых тел. . . . .	118
2.3.11.	Дефекты в кристаллах . . . . .	121
2.3.12.	Теплоемкость твердых тел . . . . .	122
2.3.13.	Испарение, сублимация, конденсация, плавление и кристаллизация . . . . .	124
2.3.14.	Агрегатные состояния. Фазовые переходы. . . . .	125
2.3.15.	Диаграмма состояния и ее анализ. . . . .	127

## 3. Электричество и электромагнетизм

### 3.1. Электростатика

3.1.1.	Электрический заряд и закон его сохранения. Закон Кулона . . . . .	129
3.1.2.	Электростатическое поле и его напряженность . . . . .	130
3.1.3.	Принцип суперпозиции электростатических полей. Поле диполя. . . . .	132
3.1.4.	Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме . . . . .	133
3.1.5.	Применение теоремы Гаусса к расчету полей в вакууме . . . . .	135
3.1.6.	Циркуляция вектора напряженности электростатического поля . . . . .	137
3.1.7.	Потенциал электростатического поля . . . . .	137
3.1.8.	Связь между напряженностью и потенциалом. Эквипотенциальные поверхности . . . . .	139
3.1.9.	Вычисление разности потенциалов по напряженности поля . . . . .	141
3.1.10.	Типы диэлектриков. Поляризация диэлектриков . . . . .	142
3.1.11.	Напряженность поля в диэлектрике. . . . .	143
3.1.12.	Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике . . . . .	144

3.1.13. Условия на границе раздела двух диэлектрических сред . . . . .	146
3.1.14. Сегнетоэлектрики . . . . .	146
3.1.15. Проводники в электростатическом поле . . . . .	147
3.1.16. Емкость. Конденсаторы . . . . .	150
3.1.17. Энергия системы зарядов и уединенного проводника . . . . .	152
3.1.18. Энергия заряженного конденсатора. Энергия электростатического поля . . . . .	152
<b>3.2. Постоянный электрический ток</b>	
3.2.1. Электрический ток и его характеристики . . . . .	153
3.2.2. Сторонние силы. Электродвижущая сила (ЭДС) и напряжение . . . . .	154
3.2.3. Сопротивление проводников. Закон Ома . . . . .	156
3.2.4. Работа и мощность тока. Закон Джоуля—Ленца . . . . .	158
3.2.5. Закон Ома для неоднородного участка цепи (обобщенный закон Ома (ОЗО)) . . . . .	159
3.2.6. Правила Кирхгофа для разветвленных цепей . . . . .	160
<b>3.3. Электрические токи в металлах, вакууме и газах</b>	
3.3.1. Элементарная классическая теория металлов . . . . .	162
3.3.2. Некоторые законы по классической теории и ее трудности . . . . .	163
3.3.3. Работа выхода электронов из металла. Эмиссионные явления . . . . .	165
3.3.4. Электрический ток в газах . . . . .	167
<b>3.4. Магнитное поле</b>	
3.4.1. Магнитное поле и его характеристики . . . . .	171
3.4.2. Принцип суперпозиции. Закон Био—Савара—Лапласа . . . . .	175
3.4.3. Закон Ампера. Взаимодействие параллельных токов . . . . .	176
3.4.4. Магнитная постоянная. Единицы магнитной индукции $B$ и напряженности $H$ . . . . .	177
3.4.5. Движущиеся заряды и магнитные поля . . . . .	177
3.4.6. Циркуляция вектора $B$ магнитного поля в вакууме . . . . .	180
3.4.7. Магнитные поля соленоида и тороида . . . . .	181
3.4.8. Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для поля $B$ . . . . .	182
3.4.9. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле . . . . .	184
<b>3.5. Электромагнитная индукция</b>	
3.5.1. Явление электромагнитной индукции. Закон Фарадея . . . . .	185
3.5.2. Индуктивность контура. Самоиндукция . . . . .	189
3.5.3. Токи при размыкании и замыкании цепи . . . . .	190
3.5.4. Взаимная индукция. Трансформаторы . . . . .	191
3.5.5. Энергия магнитного поля . . . . .	192
<b>3.6. Магнитные свойства вещества</b>	
3.6.1. Магнитные моменты электронов и атомов . . . . .	195
3.6.2. Пара- и диамагнетики . . . . .	196
3.6.3. Намагниченность. Магнитное поле в веществе . . . . .	197
3.6.4. Условия на границе раздела двух магнетиков . . . . .	199
3.6.5. Ферромагнетики и их свойства . . . . .	199
<b>3.7. Элементы теории Максвелла для электромагнитного поля</b>	
3.7.1. Вихревое электрическое поле . . . . .	201
3.7.2. Ток смещения . . . . .	202
3.7.3. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля . . . . .	204
<b>4. Колебания и волны</b>	
<b>4.1. Механические и электромагнитные колебания</b>	
4.1.1. Колебания и их характеристики . . . . .	207
4.1.2. Графическое изображение гармонических колебаний . . . . .	209
4.1.3. Механические гармонические колебания . . . . .	210

4.1.4.	Незатухающий гармонический осциллятор. Маятники . . . . .	211
4.1.5.	Свободные колебания в идеализированном колебательном контуре . . . . .	213
4.1.6.	Сложение гармонических колебаний одного направления. Виения . . . . .	215
4.1.7.	Сложение взаимно перпендикулярных колебаний . . . . .	216
4.1.8.	Свободные затухающие колебания и их анализ . . . . .	217
4.1.9.	Вынужденные колебания и их анализ . . . . .	220
4.1.10.	Переменный ток . . . . .	224
4.1.11.	Резонанс напряжений и токов . . . . .	226
4.1.12.	Мощность в цепи переменного тока . . . . .	228
<b>4.2.</b>	<b>Упругие волны</b>	
4.2.1.	Волны, их основные типы и характеристики . . . . .	229
4.2.2.	Описание бегущих волн . . . . .	232
4.2.3.	Принцип суперпозиции. Групповая скорость . . . . .	233
4.2.4.	Интерференция волн . . . . .	234
4.2.5.	Стойкие волны . . . . .	235
4.2.6.	Звуковые волны . . . . .	237
4.2.7.	Эффект Доплера в акустике . . . . .	239
<b>4.3.</b>	<b>Электромагнитные волны</b>	
4.3.1.	Получение электромагнитных волн и их диапазон . . . . .	241
4.3.2.	Описание электромагнитных волн . . . . .	243
<b>5.</b>	<b>Оптика. Квантовая природа излучения</b>	
<b>5.1.</b>	<b>Элементы геометрической оптики</b>	
5.1.1.	Основные законы оптики. Полное отражение . . . . .	246
5.1.2.	Зеркала и их основные характеристики . . . . .	248
5.1.3.	Линзы и их основные характеристики . . . . .	250
5.1.4.	Фотометрические величины и их единицы . . . . .	254
<b>5.2.</b>	<b>Интерференция света</b>	
5.2.1.	Принцип Гюйгенса — основа волновой оптики . . . . .	255
5.2.2.	Временная и пространственная когерентность . . . . .	256
5.2.3.	Интерференция монохроматического света . . . . .	256
5.2.4.	Получение когерентных пучков делением волнового фронта . . . . .	257
5.2.5.	Получение когерентных пучков делением амплитуды . . . . .	260
5.2.6.	Некоторые применения интерференции . . . . .	262
5.2.7.	Интерферометры . . . . .	263
<b>5.3.</b>	<b>Дифракция света</b>	
5.3.1.	Принцип Гюйгенса—Френеля . . . . .	264
5.3.2.	Метод зон Френеля. Зонные пластинки . . . . .	265
5.3.3.	Дифракция Френеля (дифракция в сходящихся лучах) . . . . .	266
5.3.4.	Дифракция Фраунгофера (дифракция в параллельных лучах) . . . . .	268
5.3.5.	Пространственная решетка. Дифракция рентгеновского излучения . . . . .	271
5.3.6.	Разрешающая способность оптических приборов . . . . .	272
5.3.7.	Дифракционная решетка как спектральный прибор . . . . .	273
<b>5.4.</b>	<b>Распространение света в веществе</b>	
5.4.1.	Нормальная и аномальная дисперсия света . . . . .	273
5.4.2.	Элементарная теория дисперсии . . . . .	274
5.4.3.	Поглощение (абсорбция) света . . . . .	276
5.4.4.	Рассеяние света . . . . .	277
5.4.5.	Излучение Вавилова—Черенкова . . . . .	277
5.4.6.	Эффект Доплера . . . . .	278

<b>5.5. Поляризация света</b>	
5.5.1. Естественный и поляризованный свет . . . . .	279
5.5.2. Поляризация света при отражении и преломлении . . . . .	281
5.5.3. Поляризация при двойном лучепреломлении . . . . .	282
5.5.4. Поляризаторы. . . . .	285
5.5.5. Прохождение плоскополяризованного света сквозь кристаллическую пластинку . . . . .	286
5.5.6. Анализ поляризованного света . . . . .	286
5.5.7. Интерференция поляризованного света . . . . .	288
5.5.8. Искусственная оптическая анизотропия . . . . .	290
5.5.9. Вращение плоскости поляризации . . . . .	291
<b>5.6. Квантовая природа излучения</b>	
5.6.1. Тепловое излучение и его описание . . . . .	292
5.6.2. Фотоэффект: его виды и законы . . . . .	297
5.6.3. Давление излучения . . . . .	299
5.6.4. Эффект Комптона . . . . .	300
5.6.5. Корпускулярно-волновая двойственность свойств электромагнитного излучения . . . . .	301
<b>6. Элементы квантовой физики атомов, молекул и твердых тел</b>	
<b>6.1. Теория атома водорода по Бору</b>	
6.1.1. Модели атома . . . . .	302
6.1.2. Линейчатый спектр атома водорода . . . . .	302
6.1.3. Постулаты Бора. Спектр атома водорода по Бору. . . . .	303
6.1.4. Экспериментальное подтверждение квантования энергетических уровней атомов . . . . .	306
<b>6.2. Элементы квантовой механики</b>	
6.2.1. Гипотеза де Бройля. Волны де Бройля . . . . .	307
6.2.2. Соотношение неопределенностей Гейзенберга . . . . .	310
6.2.3. Волновая функция и ее статистический смысл . . . . .	311
6.2.4. Временное и стационарное уравнения Шредингера . . . . .	312
6.2.5. Операторы в квантовой механике и их свойства . . . . .	313
6.2.6. Операторы важнейших физических величин . . . . .	315
6.2.7. Движение свободной частицы. . . . .	317
6.2.8. Частица в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками . . . . .	318
6.2.9. Отражение и прохождение сквозь прямоугольный потенциальный порог. . . . .	319
6.2.10. Потенциальный барьер конечной ширины. Туннельный эффект. . . . .	322
6.2.11. Линейный гармонический осциллятор. . . . .	325
<b>6.3. Элементы современной физики атомов и молекул</b>	
6.3.1. Атом водорода в квантовой механике. . . . .	327
6.3.2. $1s$ -состояние электрона в атоме водорода . . . . .	331
6.3.3. Спин электрона. Спиновое квантовое число . . . . .	332
6.3.4. Атом во внешнем магнитном поле . . . . .	333
6.3.5. Системы тождественных частиц. . . . .	335
6.3.6. Принцип Паули . . . . .	336
6.3.7. Рентгеновские спектры. . . . .	338
6.3.8. Молекулы: энергия и спектры . . . . .	340
6.3.9. Поглощение, спонтанное и вынужденное излучение . . . . .	342
6.3.10. Оптические квантовые генераторы (лазеры) . . . . .	343
<b>6.4. Элементы физики твердого тела</b>	
6.4.1. Понятие о зонной теории твердых тел . . . . .	346
6.4.2. Металлы, диэлектрики и полупроводники по зонной теории . . . . .	347

6.4.3. Собственная проводимость полупроводников . . . . .	348
6.4.4. Примесная проводимость полупроводников . . . . .	350
6.4.5. Фотопроводимость полупроводников . . . . .	352
6.4.6. Люминесценция твердых тел . . . . .	353
6.4.7. Контакт двух металлов по зонной теории . . . . .	355
6.4.8. Термоэлектрические явления и их применение . . . . .	356
6.4.9. Выпрямление на контакте металл—полупроводник . . . . .	358
6.4.10. Контакт электронного и дырочного полупроводников ( <i>p-n</i> -переход) . . . . .	360
6.4.11. Полупроводниковые диоды и триоды (транзисторы) . . . . .	362

## **7. Элементы физики атомного ядра и элементарных частиц**

### **7.1. Элементы физики атомного ядра**

7.1.1. Основные характеристики и свойства атомных ядер . . . . .	365
7.1.2. Энергия связи ядра. Спин ядра и магнитный момент . . . . .	366
7.1.3. Ядерные силы. Модели ядра . . . . .	368
7.1.4. Радиоактивность. Закон радиоактивного распада . . . . .	369
7.1.5. Правила смещения. Радиоактивные семейства . . . . .	371
7.1.6. Закономерности радиоактивных процессов . . . . .	373
7.1.7. Методы наблюдения радиоактивных излучений и частиц . . . . .	378
7.1.8. Ядерные реакции и их основные типы . . . . .	382

### **7.2. Элементы физики элементарных частиц**

7.2.1. Космическое излучение . . . . .	387
7.2.2. Мюоны и мезоны . . . . .	388
7.2.3. Фундаментальные взаимодействия в природе . . . . .	389
7.2.4. Частицы и античастицы . . . . .	389
7.2.5. Лептоны и их описание . . . . .	390
7.2.6. Адроны и их описание . . . . .	392
7.2.7. Классификация элементарных частиц . . . . .	394
7.2.8. Кварки . . . . .	395

## **Приложения**

1. Основные физические величины . . . . .	397
2. Диапазоны различных физических величин . . . . .	398
3. Основные законы и формулы . . . . .	399
4. Периодическая система элементов Д. И. Менделеева . . . . .	410
5. Последние (самые, самые...) достижения науки и техники к концу XX века . . . . .	411

<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>413</b>
---------------------------------------	------------

*Учебное издание*

**Трофимова Таисия Ивановна**

**ФИЗИКА В ТАБЛИЦАХ И ФОРМУЛАХ**

**Пособие для вузов**

*Зав. редакцией Б. В. Понкратов*  
*Ответственный редактор Ж. И. Яковлева*  
*Художественное оформление Е. П. Кузнецова*  
*Технический редактор Н. А. Торгашова*  
*Компьютерная верстка О. И. Колотова*  
*Корректор Н. С. Соболева*

Изд. лиц. № 061622 от 07.10.97.

Подписано к печати 10.09.02. Формат 70x90<sup>1/16</sup>.  
Бумага типографская. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 31,59. Тираж 5 000 экз. Заказ № 6478.

ООО «Дрофа». 127018, Москва, Суцеский вал, 49.

**По вопросам приобретения продукции  
издательства «Дрофа» обращаться по адресу:**  
127018, Москва, Суцеский вал, 49.  
Тел.: (095) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (095) 795-05-52.

Торговый дом «Школьник».  
109172, Москва, ул. Малые Каменщики, д. 6, стр. 1А.  
Тел.: (095) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.

Магазин «Переплетные птицы».  
127018, Москва, ул. Октябрьская, д. 89, стр. 1.  
Тел.: (095) 912-45-76.

Отпечатано в полном соответствии с качеством  
предоставленных диапозитивов в Тульской типографии.  
300600, г. Тула, пр. Ленина, 109.